

Hinweise zur Beurteilung von Messungen, Messergebnissen und Messunsicherheiten (ABW)

Scientific knowledge is a body of statements of varying degree of certainty — some most unsure, some nearly sure, *but none absolutely certain*.

R.P. Feynman

Literatur

- P. Möhrke, B.-U. Runge, *Arbeiten mit Messdaten: Eine praktische Kurzeinführung nach GUM*, Springer Spektrum Verlag, 2020
- W. Kessel, *Meßunsicherheit, ein wichtiges Element der Qualitätssicherung*, Physikalisch-Technische Bundesanstalt, Braunschweig, <https://www.ptb.de/cms/fileadmin/internet/publikationen/kessel.pdf>
- B.N. Taylor, C.E. Kuyatt, *Guidelines for Evaluating and Expressing the Uncertainty of NIST Measurement Results*, National Institute of Standards and Technology, NIST Technical Note 1297, 1994 <https://dx.doi.org/10.6028/NIST.TN.1297>

1 Vorbemerkungen

Dieses Skript soll die Grundlage für die Behandlung von Messunsicherheiten und die Bewertung von Messergebnissen im physikalischen Praktikum bilden. Es kann aber nur einen Einblick in diese sehr komplexe Thematik geben. Eine vollständige und ausführliche Behandlung dieses Themas würde den Rahmen dieses Skriptes und des Grundpraktikums sprengen. Daher wird auch zum Großteil auf mathematische Herleitungen verzichtet. Die Zielsetzung im Praktikum ist es, dass Sie ein Gefühl für den Ursprung von Messunsicherheiten bekommen, die Grundlage der Behandlung von Messunsicherheiten lernen und deren Anwendung üben.

1.1 Unterscheidung von *Unsicherheiten* und *Fehlern*

Es liegt in der Natur einer Messung, dass sie nicht beliebig genau sein kann. Es hat also nichts mit einem Fehlverhalten oder einer falschen Messung zu tun, dass ein Ergebnis vom „wahren Wert“ abweicht. Deshalb sollte man auch nicht von „Fehlern“ sprechen, sondern von „Unsicherheiten“ oder „Abweichungen“.

Um „Fehler“ handelt es sich, wenn die Abweichungen auf dem Versagen des messenden Physikers oder seiner Apparatur zurückzuführen sind, etwa wenn man 1,50 V statt 1,05 V abliest oder aufschreibt. Man kann diese Fehler weder vollständig ausschließen noch sinnvoll mathematisch bearbeiten. Daher ist der Begriff „Fehlerrechnung“ nicht sinnvoll.

Das Auftreten solcher Fehler und ihr Schaden wird aber begrenzt, wenn man sorgfältig arbeitet und wichtige Arbeitsschritte unabhängig wiederholt. Dieser Typ von Abweichungen sei im Vorfeld durch eine Plausibilitätsprüfung der Messwerte erledigt, und wird nicht weiter betrachtet.

Die meisten Unsicherheiten, mit denen wir es im Praktikum, oder mit denen Physiker in Forschung und Anwendung zu tun haben, beruhen auf Unvollkommenheiten unserer Messgeräte und unserem Umgang mit ihnen.

Jedes Messgerät hat eine (bauartbedingte) Genauigkeit, die unsere Messung begrenzt. So lässt sich beispielsweise ein Multimeter mit vier Ziffern unmöglich mit fünf signifikanten Stellen ablesen.

Neben der Genauigkeit der verwendeten Messgeräte spielt aber auch deren Einfluss auf den gemessenen Vorgang eine Rolle. So kann das Messinstrument z.B. als zusätzlicher „Verbraucher“ elektrischer Energie auftreten, sein Einfluss muss dann rechnerisch eliminiert werden, da man sich ja eigentlich für den „ungestörten“ Zustand interessiert.

Schließlich gibt es noch *Schwankungen des Messwertes* selbst. Dies sind eigentlich keine *Messabweichungen*, da ja der momentan vorliegende Messwert korrekt ermittelt wird. Meist ist man jedoch an der zu Grunde liegenden physikalischen Größe, oft dem Mittelwert, interessiert und nicht an der aktuellen Fluktuation.

Als wichtiges Beispiel ist hier die Zerfallskonstante des radioaktiven Zerfalls zu nennen. Die einzelnen gemessenen Zerfälle folgen perfekt statistischen Gesetzen und schwanken dementsprechend.

1.2 Schreibweise von Werten und Unsicherheiten

Es gibt verschiedene Möglichkeiten Messwerte und Ergebnisse sinnvoll anzugeben. Allen gemein ist, dass der **Wert** x wird immer zusammen mit seiner **Unsicherheit** $u(x)$, und mit der dazugehörigen **Einheit** angegeben wird.

Der Übersichtlichkeit halber soll im Anfängerpraktikum die Form

$$(x \pm u(x)) \text{ Einheit} \quad (1)$$

gewählt werden, wobei $u(x)$ als **absolute Unsicherheit** angegeben wird. Es wird also die Unsicherheit einfach an den ermittelten Wert der Größe mit einem \pm -Zeichen in der gleichen Einheit angehängt, zum Beispiel $(355,62 \pm 0,31) \text{ mm}$ oder $(2,53 \pm 0,13) \text{ mV}$. Die Größe und die Unsicherheit werden dabei **immer** in der selben Größenordnung angegeben. Weiterhin ist darauf zu achten, dass die Stellenzahl von Wert und Unsicherheit konsistent ist, also die gleiche Genauigkeit besitzt.

Eine andere gebräuchliche Schreibweise der absoluten Unsicherheit ist, dass die gültigen Ziffern der Unsicherheit in Klammern hinter den Wert geschrieben werden. In den obigen Beispielen also $355,62(31) \text{ mm}$ oder $2,53(13) \text{ mV}$. Die Ziffern in Klammern geben dabei die Unsicherheit der entsprechenden Ziffern vor der Klammer an. Diese Schreibweise ist soll im Praktikum aber nur dann gewählt werden, wenn die Genauigkeit so groß ist, dass die \pm -Schreibweise aufgrund vieler zu schreibender Nullen nur schwer lesbar ist (z.B. $(9,876543210 \pm 0,00000023) \text{ mol} = 9,876543210(23) \text{ mol}$).

Man findet manchmal auch die **relative Unsicherheit**, die als Anteil vom Messwert angeben. In diesem Fall schreibt man dann z.B. $355,62 \text{ cm} \pm 0,08\%$ oder $2,53 \text{ mV} \pm 5\%$. Dies bietet bei der Fortpflanzung der Unsicherheiten (4) oft Vorteile beim Rechnen. **Für die reine Angabe der Unsicherheit beim Ergebnis soll dies im Praktikum nicht verwendet werden.** Auch bei der Angabe der relativen Unsicherheit muss darauf geachtet werden, dass die Angabe des Wertes konsistent mit der Unsicherheit ist.

1.3 Konsistente Angabe der Unsicherheit: Stellenzahl

Die Unsicherheit einer Messgröße muss auch **implizit** in Form von signifikanten Stellen richtig angegeben werden, z.B. $355,62 \text{ mm}$ und nicht $355,6 \text{ mm}$ oder $355,620 \text{ mm}$, wenn die Unsicherheit auf der zweiten Nachkommastelle ist. Diese Form der Angabe muss immer durchgeführt werden, und mit der expliziten Angabe der Unsicherheit konsistent sein. Insbesondere ist bei der Übernahme von Werten vom Taschenrechner darauf zu achten. So ist z.B. die Angabe $(6543,21 \pm 50) \text{ g}$ für eine Masse falsch, richtig wäre hier $(6540 \pm 50) \text{ g}$, oder $(6,54 \pm 0,05) \text{ kg}$.

Da auch die Unsicherheit selber nicht exakt ist, muss bei deren Angabe auch auf die Stellenzahl geachtet werden. Für das Praktikum soll gelten, dass Unsicherheiten auf *zwei* geltende Ziffern angegeben werden, wobei immer aufgerundet wird.

Bei der Angabe von Werten sollen sinnvolle „mathematische Vorsilben“ verwendet werden. Gerade noch lesbar ist die Angabe 0,35562 m, besser wäre aber 35,562 cm (falls der Wert wirklich so genau ist). Die Angabe von $4,66 \cdot 10^{-7}$ m für eine Lichtwellenlänge ist zwar formal korrekt, aber ohne Hirnakrobatik nicht mehr verarbeitbar. So wie man die Entfernung von München nach Berlin weder im Lichtjahren (zumal das auch keine gesetzliche Einheit mehr ist!) noch in mm angibt, sondern in km (auch weil dadurch das Problem mit den signifikanten Stellen verringert wird), sollte man Lichtwellenlängen in nm (oder μm bei Infrarotstrahlung) angeben, also 466 nm. Völlig indiskutabel sind Schreibweisen wie 4.66E-7m oder 466E-9m. Für andere Zahlen und Größen gilt das natürlich analog.

Anzumerken ist hier noch, dass bei Zwischenergebnissen „intern“ durchaus mit einer Stelle mehr gerechnet werden darf/soll. Damit vermeidet man, dass sich Rundungsfehler aufsummieren.

1.4 Unsicherheitstypen

Mit dem „Guide to the expression of uncertainty in measurement (GUM)“ gibt es internationale Empfehlungen für den Umgang mit Messunsicherheiten, an denen wir uns im Praktikum orientieren. Darin werden zwei Typen von Unsicherheiten betrachtet:

Typ A: Unsicherheiten, die mit statistischen Methoden bestimmt wurden.

Typ B: Alle auf andere Arten gewonnene Unsicherheiten. Dies können z.B. Herstellerangaben oder Angaben eines Kalibrierscheines sein, oder auch Abschätzungen beim Ablesen eines Einzelwertes.

Die früher übliche, aber oft nicht eindeutige, Unterscheidung in „statistische“ und „systematische“ Unsicherheiten wird nicht mehr benutzt.

1.5 Verteilungen

Bei der Beurteilung der Messunsicherheiten spielen Verteilungen der Daten. In Tabelle 1 sind die für das Praktikum wichtigen Verteilungen gezeigt. Im folgenden werden diese dann genauer beschrieben.

1.5.1 Binomialverteilung

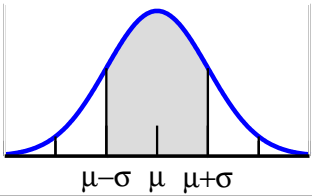
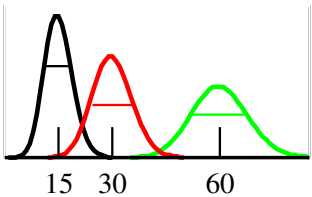
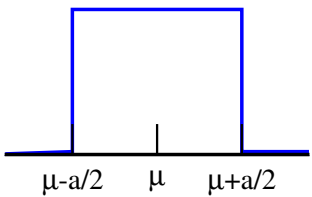
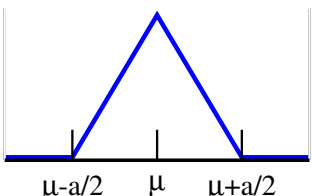
Experimente mit nur zwei möglichen Ausgängen (z.B. das Werfen einer idealen Münze) heißen *Bernoulli-Experimente*. Von mehrstufigen Zufallsexperimenten spricht man, wenn man solche Experimente mehrfach hintereinander ausführt. Die Wahrscheinlichkeit, bei n Versuchen die Anzahl k eines bestimmten Ereignisses (z.B. „Kopf“) zu erhalten, folgt der Binomialverteilung

$$B_{n,p}(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}, \quad (2)$$

wobei p die Wahrscheinlichkeit ist, dass das gewünschte Ereignis bei einem Einzelexperiment eintritt. Der Erwartungswert μ , also die mittlere Anzahl k der gewünschten Ereignisse bei n Versuchen und der Wahrscheinlichkeit p

$$\mu = n \cdot p,$$

Tabelle 1: Darstellung verschiedener Verteilungen und möglicher Anwendungen

Name	Aussehen	Verwendung	Unsicherheit
Normal- verteilung (Gaußkurve)		Mehrfache Messung, statistische Ermittlung von Wert und Unsicherheit aus n Einzelmessungen	$u(\bar{x}) = \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$
Poisson- verteilung		Zählexperimente, z.B. radioaktiver Zerfall. Hier beispielhaft für die Erwartungswerte $\mu = 15$ (schwarz), $\mu = 30$ (rot) und $\mu = 60$ (grün).	$u(n) = \sqrt{n}$
Rechteck- verteilung		Einzelner Ablesewert z.B. eines digitalen Anzeigeinstruments. a entspricht der Schrittweite der Anzeige.	$u(\mu) = \frac{a}{2\sqrt{3}}$
Dreieck- verteilung		Einzelner Ablesewert z.B. eines analogen Anzeigeinstruments. a ist der Abstand zwischen zwei ablesbaren Markierungen.	$u(\mu) = \frac{a}{2\sqrt{6}}$

und die Standardabweichung

$$\sigma_k = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}.$$

Die Binomialverteilung selbst hat zwar in der Experimentalphysik keine allzu große Bedeutung, aus ihr folgen aber als Näherungen die Poisson-Verteilung und die Normalverteilung. Sie ist daher als grundlegende Verteilung hier aufgeführt.

1.5.2 Normalverteilung

Die Binomialverteilung kann durch eine (Gaußsche) Normalverteilung approximiert werden, wenn n hinreichend groß, und p weder zu groß noch zu klein ist. Als Faustregel gilt $n \cdot p \cdot (1 - p) \geq 9$.

Die Gaußsche Normalverteilung ist gegeben durch

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \quad (3)$$

Die Gauß-Funktion („Glockenkurve“) ist symmetrisch um den Erwartungswert μ und so normiert, dass das Integral von $h(x)$ zwischen $-\infty$ und ∞ gerade 1 ergibt. σ ist die *Standardabweichung* oder *Breite* der Verteilung. Je größer diese ist, desto breiter die Kurve. Im Abstand σ vom Mittelwert aus gerechnet befindet sich der Wendepunkt der Kurve. Berechnet man die Fläche bis zu diesem Wert, so ergibt sich:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = 0,683... \quad (4)$$

Die Wahrscheinlichkeit, einen Messwert im Intervall von $\bar{x} - \sigma$ bis $\bar{x} + \sigma$ zu finden beträgt (für $n \rightarrow \infty$) also 68,3% .

Andere gebräuchliche Intervalle sind:

1-fache Standardabweichung	$\bar{x} - \sigma$ bis $\bar{x} + \sigma$	(68,3%)
2-fache Standardabweichung	$\bar{x} - 2\sigma$ bis $\bar{x} + 2\sigma$	(95,5%)
3-fache Standardabweichung	$\bar{x} - 3\sigma$ bis $\bar{x} + 3\sigma$	(99,7%)

1.5.3 Poisson-Verteilung

Von *Zählereignissen* spricht man, wenn bei einem Experiment die Messwerte nur Natürliche Zahlen (einschließlich der Null) annehmen können. Dies bedeutet jedoch nicht zwingend, dass die Messwerte frei von jeglicher Unsicherheit sind, da man sich ja nicht verzählen kann. Es kommt vielmehr darauf an, für welche Größe man sich letztendlich interessiert. Geht es um die Anzahl in einem konkreten Fall tatsächlich gezählter Ereignisse, so lässt sich diese (bei sorgfältiger Zählung) durchaus ohne Unsicherheit bestimmen. Normalerweise interessiert man sich aber für einen „typischen“ Zählwert bei mehrfacher Wiederholung eines Experiments. Ein Beispiel ist hier die Anzahl der γ -Quanten, die pro Sekunde von einer radioaktiven Quelle emittiert werden. Diese Zahl kann durchaus schwanken, da die Emission zufällig geschieht. Die Wahrscheinlichkeit einen bestimmten Zählwert v in einem gegebenen Zeitintervall zu erhalten folgt der *Poisson-Verteilung*

$$P(v) = \frac{\mu^v}{v!} \cdot e^{-\mu}, \quad (5)$$

wobei μ der zu erwartende mittlere Zählwert im Zeitintervall ist. Nach unendlich vielen Experimenten erhält man

$$\bar{v} = \mu.$$

Die Standardabweichung ist

$$\sigma_v = \sqrt{\mu}. \quad (6)$$

Die Poissonverteilung stellt dabei eine Näherung der Binomialverteilung für kleine Wahrscheinlichkeiten p (z.B. Zerfallswahrscheinlichkeit) bei großer Anzahl an Messungen n (Anzahl der vorhandenen radioaktiven Kerne) dar.

1.5.4 Rechteckverteilung

Bei einer Rechteckverteilung ist die Wahrscheinlichkeit für einen Wert in einem Bereich $\pm \frac{a}{2}$ um den Erwartungswert μ konstant, und sonst Null:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} & \text{für } -\frac{a}{2} \leq x - \mu \leq \frac{a}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (7)$$

Die Standardabweichung dieser Verteilung ist

$$\sigma_v = \frac{a}{2\sqrt{3}}. \quad (8)$$

1.5.5 Dreiecksverteilung

Bei der Dreiecksverteilung ist die Annahme, dass die Wahrscheinlichkeit in der Mitte der Verteilung am Größten ist, und dann zu den Rändern linear abfällt.

$$p(x) = \begin{cases} \frac{2}{a^2} \cdot (x - \mu + \frac{a}{2}) & \text{für } \mu - \frac{a}{2} \leq x \leq \mu \\ \frac{2}{a^2} \cdot (-x + \mu + \frac{a}{2}) & \text{für } \mu \leq x \leq \mu + \frac{a}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (9)$$

Die Standardabweichung dieser Verteilung ist

$$\sigma_v = \frac{a}{2\sqrt{6}}. \quad (10)$$

2 Unsicherheiten vom Typ A

2.1 Mittelwert und Erwartungswert

Wiederholt man Messungen an demselben Messobjekt mit demselben Messgerät unter gleichen Bedingungen, so werden sich die einzelnen Messwerte x_i trotzdem aufgrund der unterschiedlichen statistischen Abweichung voneinander unterscheiden. Sie streuen um einen Mittelwert \bar{x} , der sich mit wachsender Zahl n der Messungen dem wahren Wert μ (dem Erwartungswert der Messgröße) nähert. Als gute Näherung kann man dabei eine Normalverteilung (s. 1.5.2) annehmen. Wenn keine besonderen Umstände vorliegen die eine spezielle Gewichtung der Abweichung notwendig machen, verwendet man als Wert für die Messgröße das *arithmetische Mittel*:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (11)$$

2.2 Standardabweichung

Das arithmetische Mittel \bar{x} hat die Eigenschaft, dass die Summe der Abweichungen $\Delta x_i = (x_i - \bar{x})$ der Einzelmessungen gerade verschwindet:

$$\sum_{i=1}^n \Delta x_i = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0.$$

Die Summe der Quadrate der Abweichungen dagegen verschwindet nicht, solange auch nur einer der Messwerte vom Bezugswert abweicht:

$$\sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \neq 0.$$

Weiterhin wird diese Summe genau für den Mittelwert \bar{x} als Referenzwert minimal, d.h. ersetzt man \bar{x} durch einen anderen Bezugswert \tilde{x} , so wird die Summe größer.

Als Maß für die Streuung der Messwerte um den Mittelwert definiert man mit der Summe der Abweichungsquadrate die *Standardabweichung* σ :

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (12)$$

σ_x ist eine positive Größe die genau dann zu Null wird wenn alle Messwerte übereinstimmen.

σ_x soll eine Schätzung der Abweichung vom wahren Wert μ liefern, der im allgemeinen aber nicht bekannt ist. Daher verwendet man die Abweichung vom Mittelwert \bar{x} . Für eine Einzelmessung ist diese Schätzung natürlich nicht durchführbar, was durch den Faktor $1/n-1$ berücksichtigt wird. Für $n=1$ ist σ nicht definiert.

Die Gleichung der Standardabweichung kann so umgeformt werden, dass der Mittelwert zunächst nicht benötigt wird:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \left[n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right]}$$

Diese Notation bietet rechentechnisch Vorteile, z.B. wenn während der Messwertaufnahme die Unsicherheit direkt bestimmt werden soll, und sich der Mittelwert laufend ändert.

Standardabweichung des Einzelwertes

Die Standardabweichung σ_x beantwortet also die Frage: *Wie weit weicht typisch ein einzelner Messwert x_i vom Mittelwert \bar{x} ab.* Dies ist zur Beurteilung des Messwertes von Interesse. Sie ist eine Größe die – von Schwankungen abgesehen – von der Zahl der Messwerte unabhängig ist.

Standardabweichung des Mittelwertes

Für die Betrachtung der Messunsicherheiten ist die interessierende Frage aber:

Wie weit weicht typisch der Mittelwert \bar{x} aller Messungen vom wahren Wert μ ab?

Diese Abweichung sollte mit zunehmender Zahl der Messungen immer kleiner werden, der Mittelwert nähert sich immer mehr dem wahren Wert an. Bei einer großen Anzahl von Messwerten gilt für die *Standardabweichung des Mittelwertes*:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sigma_x \quad (13)$$

Diese Größe sinkt mit der Wurzel der Anzahl der Messwerte.

n	1 - α = 68,2%		1 - α = 95%		1 - α = 99,7%	
	t	t/√n	t	t/√n	t	t/√n
2	1,84	1,30	13,97	9,88	235,8	166,7
3	1,32	0,76	4,53	2,61	19,21	11,09
4	1,20	0,60	3,31	1,65	9,22	4,61
5	1,15	0,51	2,87	1,28	6,62	2,96
6	1,11	0,45	2,65	1,08	5,51	2,25
8	1,08	0,38	2,43	0,86	4,53	1,60
10	1,06	0,34	2,32	0,73	4,09	1,29
20	1,03	0,23	2,14	0,48	3,45	0,77
30	1,02	0,19	2,09	0,38	3,28	0,60
50	1,01	0,14	2,05	0,29	3,16	0,45
100	1,00	0,10	2,03	0,20	3,08	0,31
200	1,00	0,07	2,01	0,14	3,04	0,21

Tabelle 2: Werte für die Studentfunktion t und t/\sqrt{n} bei verschiedenen Vertrauensniveaus.

2.3 Die Typ-A-Unsicherheit einer Messgröße

Üblicherweise wird die einfache Standardabweichung des Mittelwerts als Typ-A-Unsicherheit angegeben:

$$u_A(x) = \sigma_{\bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sigma_x \quad (14)$$

Der Bereich $[\bar{x} - \sigma_{\bar{x}}; \bar{x} + \sigma_{\bar{x}}]$ heißt *Konfidenzbereich auf dem Vertrauensniveau 68,3%*.

Gibt man die Unsicherheit auf anderen Vertrauensniveaus an, z.B. 95,5% oder 99,7%, also $u_A(x) = 2 \sigma_{\bar{x}}$ oder $u_A(x) = 3 \sigma_{\bar{x}}$, dann ist dies ausdrücklich anzumerken.

Korrektur für wenige Messwerte

Liegen nur wenige Messwerte vor, muss statt der Normalverteilung die Student-t-Verteilung¹ verwendet werden. Den Unterschied beider Verteilungen berücksichtigt man durch einen Korrekturfaktor t , der aus der Tabelle 2 entnommen werden kann.

Für die Unsicherheit des Mittelwerts gilt dann:

$$u(\bar{x}) = \frac{t}{\sqrt{n}} \sigma_x = t \cdot \sigma_{\bar{x}} \quad (15)$$

Wie zu erwarten ergibt sich z.B. für $n \rightarrow \infty$ und 68,3% Vertrauensniveau $t = 1$ oder für $n \rightarrow \infty$ und 99,7% Vertrauensniveau $t = 3$, d.h. die Korrektur verschwindet. Für kleine Zahlen und hohe Vertrauensniveaus hingegen wird die Korrektur erheblich.

Es sei hier noch betont, dass keineswegs jede zufällige Abweichung einer Gaußschen Normalverteilung folgen muss. Ob das im konkreten Fall zutrifft kann durch geeignete Testverfahren (z.B. den χ^2 -Test) ermittelt werden, für die jedoch auf die Literatur verwiesen wird.

¹William Sealey Gosset veröffentlichte seine Arbeit unter dem Pseudonym *Student*, da sein damaliger Arbeitgeber eine Veröffentlichung nicht genehmigte.

3 Unsicherheiten vom Typ B

Alle Unsicherheiten, die nicht durch Mehrfachmessung gewonnen wurden fallen unter den Typ B, und können z.B. aus folgenden Informationen abgeschätzt werden:

- Herstellerangaben, Kalibrierscheine oder andere Zertifikate,
- Referenzdaten aus Handbüchern,
- Daten und Ergebnisse aus vorangegangenen Messungen,
- allgemeine Kenntnisse und Erfahrungen über die Eigenschaften und das Verhalten von Messinstrumenten und Materialien.

Da grundsätzlich Messwerte nur einen Aussagewert haben wenn ihre Genauigkeit und der Gültigkeitsbereich bekannt sind, macht diese prinzipiell fehlende Ausschlussmöglichkeit unerkannter Messabweichungen physikalische Messungen zu Aussagen, die von der Erfahrung des Messenden und Auswertenden abhängen. Es ist daher gerade bei wenig experimenteller Erfahrung wesentlich, verstärkt das Augenmerk auf das Erkennen dieser Abweichungen zu richten.

Es gibt kein Kriterium, festzustellen, ob man alle Unsicherheiten erkannt hat, aber durch systematische Analyse können die meisten Unsicherheiten abgeschätzt werden.

Während eine Messgröße nur eine Typ A-Unsicherheit haben kann, ist nicht ausgeschlossen, dass mehrere Typ B Unsicherheiten berücksichtigt werden müssen.

Im Folgenden sollen einige Anhaltspunkte zum Erkennen von Typ B Unsicherheiten und deren Behandlung besprochen werden.

3.1 Unsicherheiten von Messgeräten

Messgeräte haben eine endliche, oft durch die Bauart begrenzte Genauigkeit. In vielen Fällen liegen Angaben des Messgeräte-Herstellers vor, aus denen direkt die Unsicherheit abgeschätzt werden kann. Dabei sind einige wichtige Begriffe zu beachten:

Die Auflösung: Dies ist die offensichtlichste Eigenschaft eines Messgerätes. Wenn auf einer digitalen Anzeige, z.B. nur 4 Stellen angegeben sind, dann ist unmöglich mehr Stellen abzulesen. Diese kleinste Einheit der letzten Stelle eines digitalen Messgerätes wird auch als ‚1 Digit‘ bezeichnet. Die Auflösung eines digitalen Messgerätes beträgt also im Normalfall ± 1 Digit. Ein analoges Messgerät hat natürlich auch eine Auflösung, sie ergibt sich aus dem Abstand zwischen zwei Zeigepositionen, die mit dem Auge noch gut unterschieden werden können (wobei dies nicht zwingend die Markierungen sein müssen).

Behandlung: Die Auflösung verwenden wir im Praktikum nur, wenn keine Typ-A-Unsicherheit vorliegt, also der Messwert nur einmal bestimmt wurde.

Hat eine Digitalanzeige eine Auflösung d dann der Wert zwischen also zwischen Messwert $-\frac{d}{2}$ und Messwert $+\frac{d}{2}$ liegen, wobei alle Werte dazwischen gleich wahrscheinlich erscheinen. Man kann daher eine Rechteckverteilung annehmen und erhält als entsprechende Unsicherheit $u_B = \frac{d}{2\sqrt{3}}$ (vgl. Gl. (8))

Beim Ablesen von analogen Messgeräten (Zeigemessgeräten) hat man eher eine Dreieckverteilung, da man eventuell eine Tendenz ablesen kann. Daher hat man dann entsprechend Gleichung (10) $u_B = \frac{d}{2\sqrt{6}}$. Die Position eines Zeigers zwischen zwei Endwerten kann durch Interpolation auf typisch 20% bis 50% des Abstandes zwischen den Strichen bestimmt werden. Die verwendete Auflösung ist also nicht zwingend der Abstand der Skalenmarkierungen

Die Reproduzierbarkeit: Wenn man mehrfach eine Messung unter absolut gleichen Bedingungen wiederholen würde, so ist die Reproduzierbarkeit der maximale Unterschied dieser Messungen. Für manche Messgeräte ist eine Reproduzierbarkeit explizit angegeben. Diese kann dann Verwendung finden, wenn keine Typ-A-Unsicherheit ermittelt wurde.

Behandlung: Hat man für ein Gerät Angaben zur Reproduzierbarkeit und zur Auflösung, so verwenden wir im Praktikum nur den größeren der beiden, da der kleinere dann meist keine Rolle mehr spielt.

Der Skalierungsunsicherheit: Messgeräte werden meist bei Null und am Maximalwert kalibriert. Die Skalierungsunsicherheit beschreibt die Abweichung eines Messgerätes vom Sollwert bei Vollausschlag. Hier geht die Unsicherheit des verwendeten Kalibrierstandards ein, oder ungenau definierte Bauelemente. Dieser Typ trägt mit wachsendem Messwert proportional zur Gesamtabweichung bei. Entsprechend wird er meist durch eine Prozentangabe beschrieben, also eine relative Unsicherheit.

Behandlung: In den meisten Fällen kann man diesen Anteil der Unsicherheit einfach verwenden. Misst man aber mit dem selben Gerät verschiedene Größen derselben Art (also z.B. verschiedene Spannungen), die später in ein Gesamtergebnis eingehen, muss man sich anschauen, ob Korrelationen von Messunsicherheiten zu berücksichtigen sind (s. 4.4)

Die Nullpunktunsicherheit: Da am Nullpunkt definitionsgemäß der Messwert 0 vorliegen soll, spielt das Eichnormal keine Rolle mehr. Vom Typ her ist dies eine absolute Abweichung, die in den vielen Fällen korrigiert werden kann. Übrig bleibt z.B. die Temperatur- oder Alterungsdrift der Bauteile. Bei den meisten modernen Messgeräten ist diese Abweichung deutlich kleiner als die Abweichung bei Vollausschlag.

Muss man bei einem Gerät erst einen Nullabgleich durchführen (Nullpunkt wird „von Hand“ eingestellt), ist dies bei einem digitalen Messgerät nicht genauer möglich als es die Anzeige zulässt. Es bleibt dann ein Anteil von der gleichen Größe der Auflösung.

Bei analogen Geräten lässt sich der Nullpunkt in etwa auf die Strichbreite der Skalenmarkierung einstellen. Die verbleibende Unsicherheit ist normalerweise deutlich kleiner als die angegebene →Geräteklasse.

Die Nichtlinearität: Das Kalibrieren am Nullpunkt und am Skalen-Endpunkt stellt eine lineare Näherung dar. Es gibt aber keine Gewähr, dass dazwischen tatsächlich ein lineares Verhalten vorliegt. Die daraus entstehenden Unsicherheiten werden als Nichtlinearitäten bezeichnet.

Die Unsicherheitsklasse: Diese Art der Angabe von Unsicherheiten ist typisch für analoge Messgeräte. Klasse 1 entspricht 1 % vom Vollausschlag im entsprechenden Messbereich als Unsicherheit. Klasse 1 bei 30 V Vollausschlag bedeutet also eine absolute Ungenauigkeit von 0,3 V in gesamten Messbereich, unabhängig vom Messwert. Oft sind diese Angaben noch an eine Gebrauchslage des Gerätes gekoppelt.

Da die hier genannten Unsicherheiten unterschiedlichen Ursprung haben, müssen Sie soweit möglich getrennt betrachtet werden. Man hat dann für eine Größe mehrere Typ-B-Unsicherheiten.

Oft findet man für Messgeräte eine Unsicherheitsangabe der Art

$$\text{Unsicherheit} = A\% \text{ vom Messwert} + B \text{ Digit.}$$

Der erste Teil bezieht sich dabei (hauptsächlich) auf die Skalierungsunsicherheit, der zweite Teil auf die anderen Anteile (Nullpunktunsicherheit und Nichtlinearität, teilweise auch Reproduzierbarkeit). Ohne weitere Angaben berücksichtigt man diese beiden Anteile als zwei Typ-B-Unsicherheiten. Die Auflösung ist meist noch separat angegeben oder ersichtlich.

3.2 Einfluss durch Umgebungsparameter

Durch den Einfluss der Umgebung können sowohl die Messapparatur als auch das zu messende System selbst beeinflusst werden. Die daraus resultierenden Unsicherheiten sind am schwierigsten greifbar, da die Umgebungsparameter zum Teil nur sehr schwer zu ermitteln und ihr Einfluss zu beurteilen sind.

Beispiele für solche Umgebungsparameter sind die Temperatur, die Luftfeuchtigkeit, elektrische und magnetische Streufelder (Erdmagnetfeld, Felder von Stromkabeln), Streulicht, ...

Aber auch die Alterung von Geräten und Bauteilen gehören zu dieser Rubrik.

Den Einfluss einiger dieser Parameter kann man gut korrigieren (z.B. durch „Nullmessungen“), über andere können wir im Praktikum keine Aussagen treffen.

3.3 Beeinflussung des Messwerts durch die Messung

Das System, dessen Eigenschaften man bestimmen will, kann durch die Messprozedur verändert werden. Man misst dann nicht die Eigenschaften des Systems, sondern die des Systems mit Messvorrichtung.

Diese Beeinflussung kann in den meisten Fällen beliebig klein gemacht, oder durch Korrekturen berücksichtigt werden. In manchen Fällen muss dies aber trotzdem diskutiert werden.

Ein Beispiel hierfür ist die Bestimmung von Strom und Spannung in einer elektrischen Schaltung. Der endliche Widerstand eines normalen Spannungsmessgerätes führt dann zu einem nichtverschwindenden Beitrag in der Strommessung. Andersherum führt der nichtverschwindende Widerstand im Strommessgerät zu einem verfälschten Wert bei der Spannungsmessung. Es ist so nicht möglich auf diese Weise Strom und Spannung an einem elektrischen Bauteil gleichzeitig genau zu bestimmen.

3.4 Abschätzung der Unsicherheit bei Einzelmessungen

Häufig kommt es vor, dass man für eine Einzelmessung eine Unsicherheit abschätzen muss, da es nicht möglich oder sehr aufwendig ist, eine Messung mehrfach zu wiederholen. Man *ersetzt* also die Unsicherheit vom Typ A durch eine vom Typ B. Liegt für eine Messgröße schon eine Unsicherheit nach Typ A vor, entfällt die Abschätzung. Andere Unsicherheiten nach Typ B müssen aber weiterhin betrachtet werden.

Als Anhaltspunkt für die Genauigkeit einer Einzelmessung kann im Praktikum gelten:

- Reaktionszeiten (bei einem „unvorhergesehenen“ Ereignis) mit einer Stoppuhr liegen bei 0,2 bis 0,3 Sekunden. Unvorhergesehen heißt hier, dass man zwar ein Ereignis erwartet, aber man hat keinen Anhaltspunkt wann es genau eintritt. Bei vorhersehbaren Ereignissen (z.B. den Umkehrpunkt eines Pendels, den man aus der Pendelbewegung gut abschätzen kann) ist die Unsicherheit aus der Reaktionszeit kleiner. Werden Zeit-Differenzen gemessen, sind die Abweichungen kleiner, da sich die Reaktionszeit bis auf die Schwankungen heraus mittelt.
- Die Position von zwei parallelen versetzten Strichen kann typisch mit einer Genauigkeit von der halben bis ganzen Strichbreite bestimmt werden. Dies tritt z.B. beim Anlegen eines Lineals an eine Kante auf.
- Wie genau man etwas messen kann, hängt nicht nur von der Auflösung des Messgerätes ab, sondern auch von der Beschaffenheit des zu messenden Objekts oder der Messgröße. Ein Beispiel ist hier die Längenmessung eines Körpers, wobei eine scharfe Kante eine genauere Ablesung ermöglicht als eine abgerundete Kante. Eine pauschale Aussage ist hier nicht möglich. Man bekommt aber mit der Zeit ein Gefühl für solche Unsicherheiten (die oben genannten „allgemeine Kenntnisse und Erfahrungen“).

Im Praktikum werden solche Abschätzungen *nur dann* verwendet, wenn keine Typ-A-Unsicherheiten für die entsprechenden Größen erhoben wurden.

4 Kombinierte Standardunsicherheit: Fortpflanzung der Unsicherheiten

4.1 Verknüpfung der Unsicherheiten mehrerer Eingangsgrößen

Bisher wurde immer eine Messgröße betrachtet. In den meisten Fällen interessiert man sich aber für eine Größe g , die nicht direkt gemessen werden kann, sich aber aus mehreren direkt gemessenen Größen x_i berechnen lässt:

$$g = g(x_1, \dots, x_N) \quad (16)$$

Wir gehen davon aus, dass für die die Eingangsgrößen die Schätzwerte \bar{x}_i , und die Unsicherheiten $u(x_i)$ bekannt sind. Dann kann der Mittelwert \bar{g} für die gesuchte Größe g bestimmt werden, indem die einzelnen Mittelwerte in die Funktion g einsetzt werden:

$$\bar{g} = g(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N) \quad (17)$$

Die Unsicherheit der Größe g erhält man dann zu

$$u(\bar{g}) = \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} u(x_i, x_j)} = \sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{\partial g}{\partial x_i} u(\bar{x}_i) + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N 2 \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} u(x_i, x_j)} \quad (18)$$

Die Ausdrücke $\frac{\partial g}{\partial x_i}$ stehen für die partiellen Ableitungen von $g(x_1, \dots, x_N)$ an der Stelle $\bar{g} = g(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N)$. Sie stellen eine Art *Wichtungsfaktoren* für die einzelnen Unsicherheiten dar. $u(\bar{x}_i)$ für die Unsicherheiten der Mittelwerte der Messgrößen \bar{x}_i , $u(x_i, x_j)$ sind die Kovarianzen für die Größen x_i und x_j .

Sind die Unsicherheiten der Eingangsgrößen nicht korreliert (Es geht nicht um die Größen selber, sondern um die Unsicherheiten!) verschwinden die Kovarianzen und man erhält

$$u(\bar{g}) = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial g}{\partial x_i} \right)^2 u^2(\bar{x}_i)}, \quad (19)$$

was auch als *Gaußsche Fehlerfortpflanzung* bezeichnet wird.

Im Praktikum kann man die Unsicherheiten in vielen Fällen als unkorreliert ansehen. Es treten aber auch Fälle auf, bei denen man die Korrelationen berücksichtigen muss (vgl. Abschnitt 4.4)

Zu beachten ist noch, dass die Wichtungsfaktoren im allgemeinen eine Einheit haben!

4.2 Berücksichtigung mehrerer Unsicherheiten für die Eingangsgrößen

Es wurde in den Gleichungen (18) und (19) zunächst angenommen, dass für die Eingangsgrößen \bar{x}_i jeweils *eine* Unsicherheit vorliegt. Aus Abschnitt 3 geht aber hervor, dass jede der Einzelgrößen eine Unsicherheit von Typ A ($u_A(x)$) und mehrere Unsicherheiten vom Typ B ($u_{B1}(x)$, $u_{B2}(x)$, ...) haben kann. Zum Bilden der Gesamtunsicherheit der Eingangsgröße geht man genauso vor, wie bei der Fortpflanzung in Gleichung (19):

$$\Delta x = \sqrt{u_A^2(x) + u_{B1}^2(x) + u_{B2}^2(x), \dots} \quad (20)$$

4.3 Spezialfälle der Fortpflanzung der Abweichungen

Wenn man nur die Ableitungen ausrechnet und die entsprechenden Werte einsetzt, kann sich dies recht aufwendig gestalten. Man kann sich die Arbeit erleichtern, wenn man Größen geschickt zusammenfasst und damit einfachere Ableitungen erhält.

4.3.1 Summen oder die Differenzen

Errechnet sich die gesuchte Größe nur aus Summen und Differenzen von Messgrößen

$$g = \sum_{i=1}^N (\pm x_i)$$

dann sind die partiellen Ableitungen $+1$ oder -1 , also gilt:

$$\Delta \bar{g} = \sqrt{\sum_{i=1}^N u^2(x_i)} \quad (21)$$

Alle Wichtungsfaktoren sind hier 1. Die Gesamtabweichung ist die quadratische Summe der absoluten Einzelabweichungen.

4.3.2 Produkte oder Quotienten

Errechnet sich die gesuchte Größe nur aus Produkten oder Quotienten von Messgrößen

$$g = \prod_{i=1}^N x_i^{m_i},$$

so sind Wichtungsfaktoren gerade $m_i \cdot \frac{g}{x_i}$, und es ergibt sich

$$u(\bar{g}) = \bar{g} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(m_i \cdot \frac{u(\bar{x}_i)}{\bar{x}_i} \right)^2} \quad (22)$$

Die relative Gesamtabweichung ist die quadratische Summe der relativen Einzelabweichungen gewichtet mit den Potenzen m_i .

Dies lässt sich verallgemeinern auf den Fall, dass die sich Ableitungen der Größe g schreiben lassen als

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = c_i \cdot \frac{g}{x_i}, \quad (23)$$

wobei die Wichtungsfaktoren c_i für die Stelle \bar{g} ausgewertet werden (im allgemeinen stehen dort wieder Funktionen von den Größen x_i). Dann gilt für die Unsicherheit:

$$u(\bar{g}) = \bar{g} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(c_i \cdot \frac{u(\bar{x}_i)}{\bar{x}_i} \right)^2} \quad (24)$$

4.4 Korrelierte Unsicherheiten

Wenn die Messunsicherheit der einen Eingangsgröße mit der Messunsicherheit einer anderen Eingangsgröße in gleicher- oder gegenläufiger Weise variiert, kann das z.B. daran liegen, dass

- das selbe Messgerät verwendet wurde.
- die Größen vom selben verwendeten (nicht stabilisierten) Netzgerät beeinflusst werden.
- das selbe Kalibriernormal verwendet wurde.
- ...

Dann muss man sich anschauen, welche Anteile der Unsicherheiten korreliert sein könnten, und wie man dies berücksichtigt.

Bei der Beurteilung, welche Anteile der Unsicherheit korreliert sein können, gibt es folgende Anhaltspunkte:

- Typ-A-Unsicherheiten sind per Definition nicht korreliert.
- Von den Typ-B-Unsicherheiten kann man die Auflösung, die Reproduzierbarkeit und die Nichtlinearität als nicht korreliert einstufen (zumindest im Anfängerpraktikum).
- Die Skalierungsunsicherheit und eine Nullpunktunsicherheit könnten dagegen korreliert sein.

Die folgenden Fälle können im Praktikum relevant werden:

Die Berechnete Größe hängt von der **Summe oder der Differenz** zweier Eingangsgrößen x_1 und x_2 ab, die mit demselben Messgerät gemessen wurde:

$$g(x_1, x_2, \dots, x_N) = \underbrace{f(x_3, \dots, x_N)}_{=:A} \cdot (x_1 \pm x_2) \quad (25)$$

Für die korrelierten Anteile der Unsicherheiten $u(x_1)$ und $u(x_2)$ können die Kovarianzen nicht mehr vernachlässigt werden, die Anteile aus A spielen in der Überlegung keine Rolle. Für eine vollständige Korrelation von $u(x_1)$ und $u(x_2)$ erhält man

$$u^2(x_1) + u^2(x_2) \longrightarrow (u(x_1) \pm u(x_2))^2. \quad (26)$$

Für die Differenz bleibt von der (prozentualen) Skalierungsunsicherheit nur der Anteil für die Differenz übrig, die Nullpunktunsicherheit fällt weg. Bei der Summe wird die resultierende Skalierungsunsicherheit größer als bei einer unkorrelierten Annahme, die Nullpunktunsicherheit geht doppelt ein (sonst nur $\sqrt{2}$).

Ähnliches gilt für **Produkte und Quotienten**. Bei letzterem

$$g(x_1, x_2, \dots, x_N) = \underbrace{f(x_3, \dots, x_N)}_{=:A} \cdot \frac{x_1}{x_2} \quad (27)$$

ergibt sich bei vollständiger Korrelation

$$\left(\frac{u(x_1)}{x_1}\right)^2 + \left(-\frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2 \longrightarrow \left(\frac{u(x_1)}{x_1} - \frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2, \quad (28)$$

und eine prozentuale Skalierungsunsicherheit fällt weg.

5 Verknüpfung mehrerer Werte mit unterschiedlichen Abweichungen: der gewichtete Mittelwert

Hat man für eine Messgröße mehrere Werte zur Verfügung so scheint dies zunächst unproblematisch, es ergibt sich die Möglichkeit der Mittelwertbildung, die –egal welche Abweichung dominiert– sicher ein genaueres Ergebnis zu liefern scheint als jeder der Einzelwerte. Die einfache Mittelwertbildung setzt jedoch voraus, dass jeder der Messwerte die gleiche Genauigkeit aufweist.

Oft möchte man aber Werte mitteln, die nicht die gleiche Genauigkeit aufweisen da sie z.B. unter unterschiedlichen Bedingungen gemessen, oder aus unterschiedlichen Experimenten kommen. Dann muss man die einzelnen Beiträge bei der Mittelwertbildung unterschiedlich stark werten, so dass die genaueren Werte stärker berücksichtigt werden. Dazu dient der *gewichtete Mittelwert*:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n w_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n w_i} \quad (29)$$

wobei die Wichtungsfaktoren w_i die Kehrwerte der Unsicherheitsquadrate sind:

$$w_i = \frac{1}{u(x_i)^2} \quad (30)$$

Mit den Wichtungsfaktoren bildet man die „innere Unsicherheit“ des Mittelwertes \bar{x}

$$u_{\text{int}}(\bar{x}) = \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^n w_i}}. \quad (31)$$

Der Wert ist immer kleiner als jede der Einzelunsicherheiten $u(x_i)$.

Zusätzlich betrachtet man noch die „äußere Unsicherheit“ des Mittelwertes \bar{x}

$$u_{\text{ext}}(\bar{x}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (w_i \cdot (x_i - \bar{x})^2)}{(n-1) \cdot \sum_{i=1}^n w_i}}. \quad (32)$$

Diese wird groß, wenn die Streuung der x_i größer ist, als es ihre einzelnen Unsicherheiten erwarten lassen. Dies kann vorkommen, wenn man z.B. wichtige Einflussgrößen nicht berücksichtigt hat. Der Vergleich von $u_{\text{int}}(\bar{x})$ und $u_{\text{ext}}(\bar{x})$ ist also ein Test für die gemachten Annahmen für die Unsicherheiten.

Als Unsicherheit $u(\bar{x})$ verwendet man dann das Maximum von $u_{\text{int}}(\bar{x})$ und $u_{\text{ext}}(\bar{x})$.

6 Korrelierte Messwerte

Alle bisherigen Betrachtung gehen von Messgrößen aus, die jeweils unabhängig voneinander aufgenommen werden. Die Verknüpfung geschieht im nächsten Schritt bei der Auswertung. Alternativ kann der vermutete formelmäßige Zusammenhang jedoch auch in die Messung integriert werden. Bei der Bestimmung der Dichte eines Körpers bedeutet dies z.B., dass man nicht nur bei einem Volumen misst, sondern die Massen von verschiedenen Volumina bestimmt und jeweils den resultierenden Quotienten vergleicht. Der Vorteil dieser Methode gegenüber einer punktuellen Messung liegt in einer Überprüfung des postulierten formelmäßigen Zusammenhangs. Bestimmte Typen von Fehlern äußern sich bei dieser Methode auch in spezifischen Abweichungen,

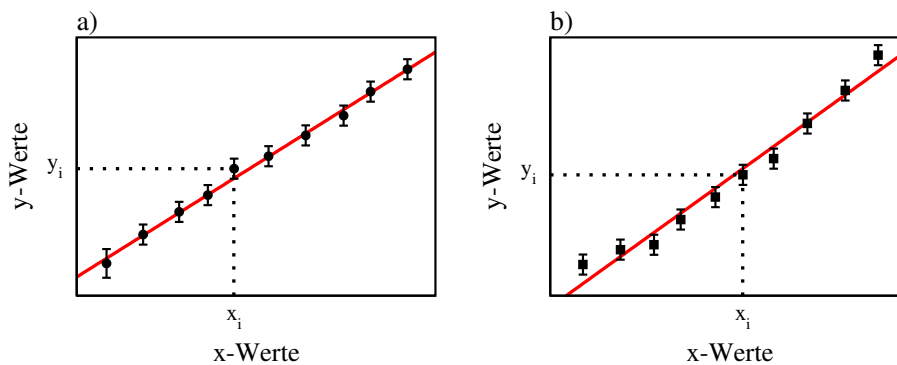


Abbildung 1: Auftragung der Wertepaare $(x_i; y_i)$ inklusive „Fehlerbalken“ und Ausgleichsgeraden. a) Die Annahme der linearen Abhängigkeit scheint gerechtfertigt. b) Es liegt wahrscheinlich kein rein linearer Zusammenhang vor. Am linken und rechten Rand liegen die Punkte alle über der Geraden, in der Mitte alle darunter.

wodurch Aussagen über die Ursachen möglich werden. Ein weiterer Vorteil der Methode ist die Möglichkeit der grafischen Darstellung der Gesetzmäßigkeit die erheblich anschaulicher ist als reine Zahlen.

6.1 Graphische Auswertung, Ausgleichsgerade

Die einfachste Beziehung zwischen zwei Messgrößen ist die lineare Abhängigkeit

$$y(x) = a_0 + a_1 \cdot x \quad (33)$$

mit den beiden freien Parametern a_0 und a_1 .

Messwertepaare $(x_i; y_i)$, von denen man eine solchen Gesetzmäßigkeit erwartet, trägt man graphisch auf. Die Position der Messwertepaare kennzeichnet man mit einem Symbol. Es erhöht die Übersichtlichkeit wenn man unterschiedliche Symbole für unterschiedliche Messreihen verwendet. Mit der Abbildung lässt sich dann zunächst eine Plausibilitätsprüfung durchführen, ob die Annahme des Zusammenhangs gerechtfertigt ist, indem man eine versucht eine Gerade durch die Datenpunkte zu legen (Dies kann man zunächst per Hand, oder gleich mit Hilfe einer Software machen). Gelingt es nicht eine solche Gerade zu finden, so kann dies heißen, dass

- kein linearer Zusammenhang vorliegt.
- Ausreißer, also grobe Fehler, vorliegen.
Dies erkennt man daran, dass einzelne Messwerte erheblich von der Geraden abweichen, und alle anderen Messwerte gut mit einer Geraden übereinstimmen. Ausreißer belässt man zwar in der Graphik, kennzeichnet sie aber und berücksichtigt sie nicht bei der Bestimmung der Geraden.
- nicht erkannte systematische Abweichungen einfließen.

Abbildung 1 zeigt zwei solcher Messungen. Man erkennt, dass die Messwerte voneinander abhängig sind, sie also keine unstrukturierte Punktelwolke bilden. Bei den Daten in Abbildung 1a) scheint tatsächlich ein linearer Zusammenhang vorzuliegen, die Daten streuen gleichmäßig um die Gerade. In Abbildung 1b) ist aber zu erkennen, dass die Daten an den Rändern des Wertebereichs alle oberhalb der Ausgleichsgeraden liegen, in der Mitte aber alle darunter. Obwohl die Fehlerbalken von mehr als 67% der Datenpunkte die Gerade enthalten, könnte dies deutet darauf hindeuten, dass die Annahme des linearen Zusammenhangs nicht gerechtfertigt ist (Ausgangspunkt für diese Daten war in der Tat eine parabelförmige Abhängigkeit).

6.2 Lineare Regression

Neben der graphischen Auswertung, die unabdingbar ist um Ausreißer zu erkennen, ist eine rechnerische Auswertung nötig.

Zur Ermittlung der *Regressionsgeraden* unterscheidet man zunächst zwischen einer *abhängigen* und einer *unabhängigen* Variablen. Die unabhängige Variable (z.B. x) wird als genau angenommen, die abhängige (y) als mit Abweichungen behaftet. Man ermittelt das Quadrat des Abstand jedes Messpunkts zu einer Geraden in Richtung der abhängigen Variable und summiert diese auf

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i - (a_0 + a_1 \cdot x_i))^2.$$

Die Regressionsgerade ist diejenige, bei der diese Summe S minimal wird. Das Prinzip heißt *Methode der kleinsten Quadrate*.

Für einen Datensatz gibt es immer zwei Regressionsgeraden, je nachdem welche Variable man als unabhängig betrachtet. Diese sind nur dann gleich, wenn alle Punkte exakt auf einer Geraden liegen.

Zur Berechnung der Regressionsgeraden (abhängige Variable y) bestimmt man zuerst die Koeffizientendeterminante

$$D = n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2$$

Achsenabschnitt a_0 und Steigung a_1 erhält man dann als

$$a_0 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i x_i}{D} \quad \text{und} \quad a_1 = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{D} \quad (34)$$

Die Standardabweichung ist auch hier über die quadratische Summe der Abweichungen der Messwerte y_i zum Schätzwert definiert, der sich hier aber aus dem y -Wert der Geraden an der Stelle x_i ergibt

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - (a_0 + a_1 x_i))^2}{n-2}}$$

Da durch die verwendete Gerade ein Freiheitsgrad eingeschränkt wird, wird der Normierungsfaktor zu $1/(n-2)$. Die Unsicherheit der beiden Parameter berechnet sich zu

$$u(a_0) = \sigma_y \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{D}} \quad \text{und} \quad u(a_1) = \sigma_y \sqrt{\frac{n}{D}} \quad (35)$$

6.3 Lineare Regression mit Wichtung

Im Abschnitt 6.2 wurde angenommen, dass jeder Messwert die gleiche Genauigkeit aufweist. Daher war es sinnvoll, die Summe der quadratischen Abweichungen aller Messpunkte zu nehmen. Sind aber die Punkte auf dem Datenfeld unterschiedlich genau, so ist es sinnvoll, die genaueren Punkte bei der Berechnung stärker zu berücksichtigen.

Wie beim gewichteten Mittelwert wird dem mit einem Wichtungsfaktor w_i Rechnung getragen

$$w_i = \frac{1}{u^2(y_i)}$$

Man erhält dann die Koeffizientendeterminante

$$D = \sum_{i=1}^n w_i \sum_{i=1}^n w_i x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n w_i x_i \right)^2$$

den Achsenabschnitt

$$a_0 = \frac{\sum_{i=1}^n w_i x_i^2 \sum_{i=1}^n w_i y_i - \sum_{i=1}^n w_i x_i \sum_{i=1}^n w_i y_i x_i}{D}$$

und die Steigung

$$a_1 = \frac{\sum_{i=1}^n w_i \sum_{i=1}^n w_i x_i y_i - \sum_{i=1}^n w_i x_i \sum_{i=1}^n w_i y_i}{D}$$

Für eine *konstante absolute Unsicherheit* sind alle Wichtungsfaktoren gleich, und man erhält die ‚normale‘ Regression.

Für eine *konstante relative Unsicherheit* werden die Wichtungsfaktoren $w_i = 1/y_i^2$.

Hier sei noch darauf hingewiesen, dass es sinnvoll ist, korrelierte Unsicherheiten (vgl. 4.4) aus der Berechnung der Geraden herauszulassen, und als Faktor mittels Fortpflanzung nach der Berechnung der Geraden zu berücksichtigen.

6.4 allgemeine Regression

Natürlich sind nicht alle Zusammenhänge in der Natur linear, und man hat einen beliebigen funktionalen Zusammenhang $y = f(x)$. Viele nichtlinearen Zusammenhänge lassen sich auf eine lineare Regression zurückführen, indem man eine geeignete Variablentransformation vornimmt.

In der Praxis wird man aber selten die Regression von Hand ausführen, sondern sich numerischer Verfahren bedienen. Dazu gibt es eine Vielzahl fertiger Programme.

Prinzipiell geht man aber genauso vor, wie bei der linearen Regression, man bildet die Summe der Abstandsquadrate

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2, \quad (36)$$

und variiert die in $f(x)$ vorkommenden Parameter so, dass S minimal wird. Auch dabei gibt es Verfahren, Unsicherheiten für die Parameter zu bestimmen. Diese enthalten dann alle unkorrelierten Unsicherheiten der Eingangsparameter, wenn die Unsicherheiten der Eingangswerte bei der Regression (mit Wichtung) berücksichtigt wurden.

7 Beispiele

Im Folgenden soll das bisher geschriebene an konkrete Beispiele aus dem Praktikum demonstriert werden.

7.1 Beispiel 1: Kugelfallviskosimeter

Beim Kugelfallviskosimeter ist die Formel für die Viskosität η zu

$$\eta = \frac{2 \cdot r^2 \cdot g}{9 \cdot v} \cdot (\rho_K - \rho_{Fl}) = \frac{2 \cdot r^2 \cdot t \cdot g}{9 \cdot h} \cdot \left(\frac{3 \cdot m}{4\pi \cdot r^3} - \rho_{Fl} \right) \quad (37)$$

gegeben, wobei r der Kugelradius, $v = h/t$ die Geschwindigkeit, h die Fallhöhe, t die Fallzeit, $\rho_K = \frac{3 \cdot m}{4\pi \cdot r^3}$ die Kugeldichte, m die Kugelmasse, ρ_{Fl} die Dichte der Flüssigkeit und g die Erdbeschleunigung sind. Wir betrachten für die Unsicherheit die fünf Messgrößen r, t, h, m, ρ_{Fl} .

Bildet man die Ableitungen nach den Eingangsgrößen, so erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} &= \frac{\eta}{t} \\ \frac{\partial \eta}{\partial h} &= -\frac{\eta}{t} \\ \frac{\partial \eta}{\partial m} &= \frac{\partial \eta}{\partial (\rho_K - \rho_{Fl})} \cdot \frac{\partial (\rho_K - \rho_{Fl})}{\partial \rho_K} \cdot \frac{\partial \rho_K}{\partial m} = \frac{\rho_K}{\rho_K - \rho_{Fl}} \cdot \frac{\eta}{m} \\ \frac{\partial \eta}{\partial \rho_{Fl}} &= -\frac{\rho_{Fl}}{\rho_K - \rho_{Fl}} \cdot \frac{\eta}{\rho_{Fl}} \\ \frac{\partial \eta}{\partial r} &= \left(2 - 3 \cdot \frac{\rho_K}{\rho_K - \rho_{Fl}} \right) \cdot \frac{\eta}{r} \end{aligned}$$

Im Vergleich mit Gleichung (23) hat man also

$$\begin{aligned} c_t &= 1 \\ c_h &= -1 \\ c_m &= \frac{\rho_K}{\rho_K - \rho_{Fl}} \\ c_{\rho, Fl} &= -\frac{\rho_{Fl}}{\rho_K - \rho_{Fl}} \\ c_r &= \left(2 - 3 \cdot \frac{\rho_K}{\rho_K - \rho_{Fl}} \right) \end{aligned}$$

Nun muss man noch die Unsicherheiten der Eingangsgrößen bestimmen.

Der Radius r (bzw. den Durchmesser $2r$) wurde für 10 Kugeln bestimmt. Damit bekommt man eine Typ-A-Unsicherheit aus der Mehrfachmessung. Angaben zur Typ-B-Unsicherheiten des verwendeten Messschiebers liegen nicht vor. Die Messabweichung darf nach DIN 862 aber maximal 0,05 mm (bei einer Auflösung von 0,05 mm) betragen, so dass man dies hier als Typ-B-Unsicherheit verwenden kann.

Auch bei der Fallzeit t hat man über die Mehrfachmessung eine Typ-A-Unsicherheit. Sollte diese wider Erwarten Null sein, kann man als Typ-B-Unsicherheit die Auflösung der Stoppuhr ansetzen. Andere Typ-B-Unsicherheiten der Stoppuhr sind im Vergleich dazu im Allgemeinen sehr gering und können vernachlässigt werden. Typische Gangabweichungen sind 10-30 s/Tag für mechanische und 10-30 s/Monat für Quarzuhren).

Die Fallhöhe h wird mit einem Meterstab gemessen. Die Unsicherheit eines Klasse III-Meterstabs ist $a + b \cdot L$, mit $a = 0,6 \text{ mm}$, $b = 0,4 \text{ mm/m}$ und L der auf den nächsten vollen Meter aufgerundeten, gemessenen Länge. Im Fall einer Länge bis 1 m ist also $u_B(h) = 1,0 \text{ mm}$. Eine weitere Typ-B-Unsicherheit kommt aus der Genauigkeit, mit der Sie die Länge überhaupt bestimmen können (z.B. bei zwei Kabelbindern als Messmarken). Dies müssen Sie sinnvoll abschätzen.

Für die Masse m sind auf der Waage mehrere Typ-B-Unsicherheiten angegeben.

Für die Dichtemessung (ρ_{Fl}) mit dem Aräometer sind keine Herstellerangaben vorhanden. Zumindest aus der Auflösung und der Ablesegenauigkeit des Meniskus ergeben sich Typ-B-Unsicherheiten.

Korrelationen der Unsicherheiten müssen hier nicht berücksichtigt werden, so dass man nun alle Werte hat um mit Gleichung (24) die Unsicherheit der Viskosität zu bestimmen.

7.2 Beispiel 2: Messung der Schallgeschwindigkeit über Stehende Wellen

Bei diesem Versuch misst man bei fester Schallfrequenz f die Längen l_n in einem halboffenen Rohr, bei denen als n -te Resonanzmaximum auftritt. Als Zusammenhang mit der Schallgeschwindigkeit v_S ist gegeben zu

$$l = (2 \cdot n - 1) \cdot \frac{\lambda}{4} = \underbrace{\frac{v}{2 \cdot f}}_{\text{Steigung } m} \cdot n - \frac{v}{4 \cdot f}. \quad (38)$$

λ bezeichnet dabei die Wellenlänge.

Der Versuch wird für drei verschiedene Frequenzen f durchgeführt, die Auswertung erfolgt größtenteils graphisch, wie in Abbildung 2 gezeigt.

Als Eingangsmessgrößen hat man die Frequenz f , die Längen l_n und die dazugehörigen Ordnungen n .

Die Ordnung n kann man genau abzählen, wenn man keine Resonanz-Maxima überhört. Ein möglicher Fehler ist, dass man nicht bei der ersten Ordnung beginnt. Da die Auswertung aber über die Steigung m einer Ausgleichsgerade gemacht wird, verfälscht eine Verschiebung der Geraden das Ergebnis nicht.

Für die Länge l treten Unsicherheiten beim Einstellen und Ablesen des jeweiligen Resonanzmaximums auf. Ersteres geht vielleicht auf 2,0 cm genau, zweiteres auf 0,20 cm. Dies führt zu einer gesamten Typ-B-Unsicherheit der Einzellängen l_n von $u_B = \sqrt{(2,0 \text{ cm})^2 + (0,20 \text{ cm})^2} = 2,1 \text{ cm}$ (2,01 cm aufgerundet). Eine Nullpunktunsicherheit durch ein nicht exakt angebrachtes Maßband führt wieder nur zu einer Verschiebung der Geraden und muss nicht berücksichtigt werden. Dazu kommt noch eine Skalierungsunsicherheit des Maßbandes von (geschätzt) 0,5 cm/m. Eine prozentuale Änderung der Länge führt zu einer Änderung der Steigung um den gleichen Faktor.

Als dritte Größe bleibt die Frequenz. Der Hersteller gibt an, dass die Genauigkeit der Frequenzanzeige besser ist als die letzte Stelle, also weniger als 1 Digit beträgt. Die daraus resultierende Unsicherheit ist so gering, dass sie getrost vernachlässigt werden kann. Allerdings ist die Frequenz nicht stabil. Sie schwankt (je nach Aufbau mehr oder weniger) während des Versuchs um 0,50...2,0 Hz. Diese Schwankung muss man beobachten und in der Auswertung berücksichtigen.

In Abbildung 2 sind „Messdaten“ (es handelt sich um fiktive Daten, die nicht einer realen Versuchsdurchführung im Praktikum entsprechen) der Längen bei den verschiedenen Resonanzordnungen gezeigt. Die verwendeten Frequenzen sind $f_1 = 599,0 \pm 1,0 \text{ Hz}$, $f_2 = 1012,00 \pm 0,50 \text{ Hz}$ und $f_3 = 1399,0 \pm 2,0 \text{ Hz}$. Die Temperatur betrug 40°C (was selbst im Sommer recht unwahrscheinlich ist). In Tabelle 3 sind die ermittelten Geradensteigungen und die berechneten Schallgeschwindigkeiten aufgetragen. Die Unsicherheiten der Steigungen enthalten schon alle die oben Aufgeführten Unsicherheiten für die Einzellängen. In der Unsicherheit der Schallgeschwindigkeit ist auch die Unsicherheit der Frequenz mitberücksichtigt.

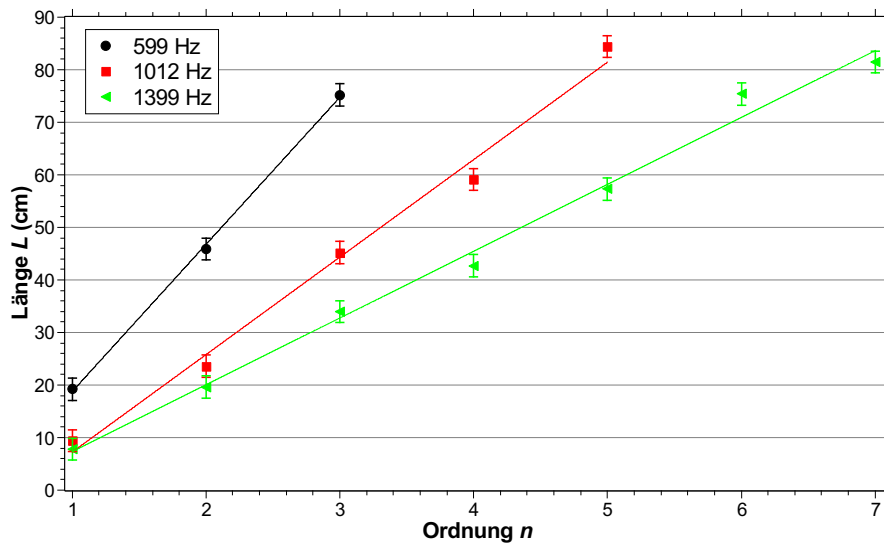


Abbildung 2: Auftragung der gemessenen Länge über die Ordnung der Maxima der stehenden Welle für drei unterschiedliche Frequenzen mit linearer Anpassung.

Tabelle 3: Ergebnisse für die Schallgeschwindigkeit für die verschiedenen Frequenzen. Bei den Unsicherheiten ist die Skalierungsunsicherheit des Maßbandes noch nicht eingerechnet. Die Steigungsunsicherheit wurde mit dem Programm SciDaVis bestimmt.

Frequenz (Hz)	Steigung in Abb. 2 (cm)	Schallgeschwindigkeit (m/s)
$599,0 \pm 1,0$	$28,00 \pm 0,78$	$335,4 \pm 9,4$
$1012,00 \pm 0,50$	$18,50 \pm 0,35$	$374,4 \pm 7,1$
$1399,0 \pm 2,0$	$12,70 \pm 0,21$	$355,3 \pm 5,9$

Nun muss noch die Skalierungsunsicherheit des Maßbandes eingerechnet werden und der gewichtete Mittelwert nach Gleichung (29) gebildet werden. Die Skalierungsunsicherheit geht in *alle* Messreihen gleichermaßen ein. Würde man diese auf die drei Messreihen anwenden und dann den Mittelwert bilden, würde der Anteil an der Gesamtunsicherheit verringert werden, was nicht sein darf. Daher wird erst der gewichtete Mittelwert gebildet und dann die Skalierungsunsicherheit eingerechnet. Die innere Unsicherheit ist nach Gleichung (31) $u_{\text{int}}(v) = 4,1 \text{ m/s}$, die äußere nach (32) $u_{\text{ext}}(v) = 9,8 \text{ m/s}$, wobei der größere Wert, also u_{ext} verwendet wird. Dieser wird nun noch mit der Skalierungsunsicherheit, die wir als 0,5% angenommen haben, quadratisch addiert. Als Ergebnis für die Schallgeschwindigkeit erhält man dann

$$\bar{v} = 358 \pm 10 \text{ m/s.}$$

Bei 40°C erwartet man eine Schallgeschwindigkeit von etwa 355 m/s, was im Unsicherheitsbereich des Ergebnisses liegt. Man sieht aber, dass die drei Einzelwerte nicht in Ihren Unsicherheitsbereichen überlappen. Es liegen also noch weitere nicht erkannte Unsicherheiten vor.

7.3 Beispiel 3: Digitalmultimeter

Für Digitalmultimeter ist meist eine Unsicherheit der Form $A\% + B \text{ Digit}$ und Auflösung C gegeben die bei einem Digitalmessgerät gerade einem „Digit“ entspricht. Diese Angabe gilt es dann zu interpretieren.

Zunächst stellt man sich die Frage, ob der prozentuale Anteil auf den Messwert oder auf den Skalenendwert zu beziehen ist. Sehr wahrscheinlich handelt es sich bei diesem Anteil um die Skalierungsunsicherheit, daher ist der Messwert die richtige Bezugsgröße. Außerdem könnte man einen prozentualen Anteil vom Skalenendwert direkt als absoluten Wert ($A' \text{ Digit}$) angeben, so dass der Bezug auf den Messwert sinnvoll erscheint.

Als zweites besteht die Unsicherheit aus den beiden Anteilen $A\%$ und $B \text{ Digit}$. Da diese getrennt angegeben werden, haben sie wahrscheinlich unterschiedliche Ursachen. Wir haben es also mit zwei Typ-B-Unsicherheiten u_{B1} und u_{B2} zu tun.

Als drittes ist noch zu beachten, dass es sich bei den Herstellerangaben meist um Garantiegrenzen handelt, so dass man als Unsicherheit die einer Rechteckverteilung verwenden muss. Man erhält dann (die Breite der Verteilung ist immer zweimal der angegebene Wert!)

$$u_{B1}(x) = \frac{A\% \cdot x}{\sqrt{3}}$$

$$u_{B2}(x) = \frac{B \cdot C}{\sqrt{3}}$$

Dann muss man noch die Auflösung selbst als Unsicherheit betrachten, die man wieder als Rechteckverteilung behandelt. Man bekommt dann

$$u_{B3}(x) = \frac{C}{\sqrt{3}}$$

Die Gesamtunsicherheit des Messwertes ist dann

$$u_B(x) = \sqrt{u_{B1}^2(x) + u_{B2}^2(x) + u_{B3}^2(x)} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{A\% \cdot x}{\sqrt{3}}\right)^2 + (B^2 + 1) \cdot \left(\frac{C}{\sqrt{3}}\right)^2} \quad (39)$$

Ein konkretes Zahlenbeispiel: Das Multimeter *Voltcraft VC-130* zeigt im Messbereich 20 V einen Wert von 7,65 (V) an. In der Abbildung 3 dazu die Angabe „ $\pm 0,5\% + 8$ “, die Auflösung ist 0,01 V. Die Anleitung

Bereich VC130-1/150-1	Genauigkeit	Auflösung
200 mV	$\pm(0,5\% + 8)$	0,1 mV
2000 mV		1 mV
20 V		0,01 V
200 V		0,1 V
250 V	$\pm(0,8\% + 8)$	1 V

Abbildung 3: Auszug aus der Anleitung der im Praktikum verwendeten Multimeter *Voltcraft VC-130*

beschreibt im Text, dass damit 0,5% vom Messwert und 8 Digits gemeint sind.

Damit erhält man in obiger Nomenklatur $A = 0,5$, $B = 8$ und $C = 0,01$ V $u_{B1} = 0,022$ V, $u_{B2} = 0,046$ V und $u_{B3} = 0,006$ V, sowie als Gesamtunsicherheit $u_B(x) = 0,051$ V.

Mit der Gleichung (39) sieht man außerdem, dass die Unsicherheit aus der Auflösung u_{B3} durch die quadratische Addition gegenüber den 8 Digits nicht mehr ins Gewicht fällt.

Hinweis:

Das Problem bei Herstellerangaben ist, dass diese meist nicht eindeutig sind und einer Interpretation bedürfen. Die hier Angegebene ist dabei nicht die einzig mögliche. Wundern Sie sich also nicht, wenn Sie in anderen Quellen eventuell etwas Abweichendes finden.