Pendel (PEN)

Themengebiet: Mechanik

Der Versuch „Pendel“ besteht aus zwei Teilversuchen. Im ersten Teil wird mit einem *Reversionspendel* die Erdbeschleunigung im Praktikumsraum bestimmt. Im zweiten Teil werden dann *gekoppelte Schwingungen* zweier Pendel untersucht.

1 Grundlagen

1.1 Mathematisches Pendel

An einem nahezu masselosen Faden der Länge l hängt ein nahezu punktförmiger Körper der Masse m. Die Annahmen *masselos* und *punktförmig* stellen Näherungen dar, die das *mathematische Pendel* charakterisieren.

In Abbildung 1 ist ein mathematisches Pendel skizziert. Bei einer Auslenkung aus der Ruhelage führt das Pendel unter dem Einfluss der Schwerkraft Schwingungen aus. Die Komponente der Schwerkraft G, die die Masse in Richtung der Bahntangente s beschleunigt, beträgt

$$F = -m \cdot g \cdot \sin\varphi, \tag{1}$$

wobei g die Erdbeschleunigung und φ der Auslenkwinkel sind.

Betrachtet man nun die Beschleunigung entlang der Kreisbahn $\ddot{s} = l \cdot \ddot{\varphi}$ so ergibt sich als Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned} 0 &= m \cdot \ddot{s} - F = m \cdot l \cdot \ddot{\varphi} + m \cdot g \cdot \sin\varphi \\ 0 &= \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \cdot \sin\varphi \end{aligned} \tag{2}$$

Für hinreichend kleine Auslenkungen kann man die Kleinwinkelnäherung $\sin\varphi \approx \varphi$ verwenden und erhält die Bewegungsgleichung der harmonischen Schwingung

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \cdot \varphi = 0, \tag{3}$$

mit der allgemeinen Lösung

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cdot \sin(\omega t + \phi) = A \cdot \sin(\omega t) + B \cdot \cos(\omega t), \tag{4}$$

mit den Amplituden φ_0, bzw. A und B, der Kreisfrequenz $\omega = \sqrt{g/l}$ und einer Phasenverschiebung ϕ (bei geeigneter Wahl des Zeitnullpunkts wird $\phi = 0$, gleichbedeutend mit $B = 0$). Für die Schwingungsdauer τ des Pendels erhält man

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{5}$$

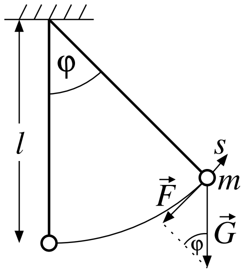

Abbildung 1: Mathematisches Pendel

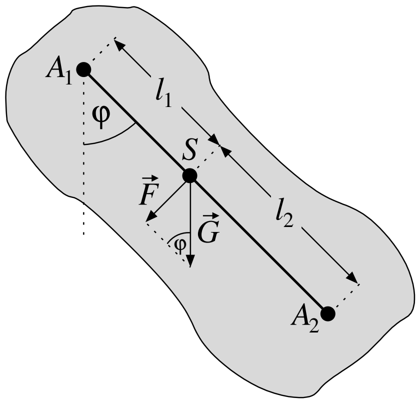

Abbildung 2: Physikalisches Pendel

1.2 Physikalisches Pendel

Entfernt man sich von der Idealisierung des mathematischen Pendels und betrachtet einen beliebigen starren Körper, der sich um eine feste, horizontale Achse A_1 drehen kann, die im Abstand l_1 zum Schwerpunkt S verläuft, so erhält man ein *physikalisches Pendel*. Ein solches ist in Abbildung 2 skizziert. Anstatt der Kräfte werden nun die bei der Drehbewegung auftretenden Momente betrachtet.

Das beschleunigende Drehmoment M, das durch die im Schwerpunkt angreifende Schwerkraft G erzeugt wird, ist analog zu (1)

$$M = l_1 \cdot m \cdot g \cdot \sin\varphi \tag{6}$$

Dieses Drehmoment führt zu einer Änderung des Drehimpulses $L = J_1 \cdot \dot{\varphi}$, mit dem Trägheitsmoment J_1 bezüglich der Drehachse A_1. Daraus ergibt sich dann die Bewegungsgleichung

$$J_1 \cdot \ddot{\varphi} + m \cdot g \cdot l_1 \cdot \sin\varphi = 0 \tag{7}$$

Mit der Kleinwinkelnäherung für kleine Auslenkungen ergibt sich analog zu (3) eine Schwingungsgleichung

$$\ddot{\varphi} + \frac{m \cdot g \cdot l_1}{J_1} \cdot \varphi = 0. \tag{8}$$

Die Lösung ist wieder eine harmonische Schwingung mit der Schwingungsdauer

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{J_1}{m \cdot g \cdot l_1}}\,. \tag{9}$$

Drückt man noch das Trägheitsmoment J_1 bezüglich der Achse A_1 mit Hilfe des Satz' von Steiner durch das Trägheitsmoment J_S bezüglich des Schwerpunktes aus, so ergibt sich

$$\tau = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{J_\mathrm{S} + m \cdot l_1^2}{m \cdot g \cdot l_1}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{1}{g}\left(\frac{J_\mathrm{S}}{m \cdot l_1} + l_1\right)}. \tag{10}$$

1.3 Reversionspendel

Betrachtet man Gleichung (10) für eine feste Schwingungsdauer τ, so ergibt sich eine quadratische Gleichung bezüglich l_1. Es muss also eine zweite, im allgemeinen von l_1 verschiedene Lösung l_2 geben, die Gleichung (10) erfüllt.

$$\frac{J_\mathrm{S}}{m \cdot l_1} + l_1 = \frac{J_\mathrm{S}}{m \cdot l_2} + l_2 \tag{11}$$

Außer durch die triviale Lösung $l_1 = l_2$ erhält man noch die Lösung

$$l_2 = \frac{J_\mathrm{S}}{m \cdot l_1} \tag{12}$$

Dies bedeutet, dass der Körper bezüglich eine zur Achse A_1 parallelen Achse A_2, die vom Schwerpunkt den Abstand l_2 besitzt, die gleiche Schwingungsdauer besitzt wie für Schingungen um A_1. In Abbildung 2 ist die Achse A_2 eingezeichnet, die in der Verlängerung von A_1S über S hinaus liegt, so dass der Abstand der beiden Achsen $\overline{A_1A_2} = l_1 + l_2$ ist. In einem solchen Fall, wenn der Schwerpunkt und die beiden Rotationsachsen auf einer Geraden liegen, spricht man von einem *Reversionspendel.*

Vergleicht man die Gleichungen (5) und (10) so stellt man fest, dass ein mathematisches Pendel dann die selbe Schwingungsdauer wie ein hhysikalisches Pendel hat, wenn die Fadenlänge

$$l_\mathrm{r} = \frac{J_\mathrm{S} + m \cdot l_1^2}{m \cdot l_1} \tag{13}$$

ist. l_r heißt *reduzierte Pendellänge*. Mit (12) und (13) erhält man

$$l_\mathrm{r} = l_1 + l_2, \tag{14}$$

und es ergibt sich für die Schwingungsdauer der Zusammenhang

$$\tau^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{l_\mathrm{r}}{g} = 4\pi^2 \cdot \frac{l_1 + l_2}{g}. \tag{15}$$

Es ist ersichtlich, dass in diesem Fall die Schwingungsdauer unabhängig von der Masse und dem Trägheitsmoment des Pendels ist, und nur von der reduzierten Länge und der Erdbeschleunigung abhängt.

1.4 Gekoppelte Pendel

Im Folgenden werden zwei Stabpendel betrachtet, die durch eine Feder miteinander verbunden sind. Durch die Feder üben die Pendel in Abhängigkeit von ihren jeweiligen Auslenkung Drehmomente aufeinander aus, Sie sind also gekoppelt. Als Vereinfachung wird zudem angenommen, dass es sich um gleich aufgebaute Pendel (also gleiches Trägheitsmoment J, und gleiche Schingungsdauer τ) handelt. Schematisch ist dies in Abbildung 3 dargestellt. Die Winkel φ_n bezeichnen dabei die Auslenkung aus der ursprünglichen Ruhelage, ψ_n sind die Auslenkungen aus der sich mit der Feder einstellenden Gleichgewichtslage mit den Winkeln φ_{01} und φ_{02}. Mit der Annahme gleicher Pendel (symmetrischer Fall) ist $\varphi_{01} = -\varphi_{02} =: \varphi_0$ und damit

$$\psi_1 = \varphi_1 - \varphi_0 \qquad \text{und} \qquad \psi_2 = \varphi_2 + \varphi_0. \tag{16}$$

Für die folgenden Betrachtungen wird weiter davon ausgegangen, dass die Auslenkungen so klein sind, dass immer die Kleinwinkelnäherung $\sin\varphi \approx \varphi$ gilt.

Das Drehmoment, das auf das Pendel 1 wirkt ist dann

$$\begin{aligned} M_1 &= \underbrace{-D \cdot \varphi_1}_{\text{rücktreibendes Moment}} + \underbrace{\kappa \cdot (r \cdot \varphi_2 - r \cdot \varphi_1) \cdot r}_{\text{Drehmoment durch Feder}} + \underbrace{M_0}_{\text{durch Vorspannung der Feder}} \\ &= -D \cdot \varphi_1 + \kappa \cdot r^2 \cdot (\varphi_2 - \varphi_1) + M_0 \end{aligned} \tag{17}$$

und analog für das Pendel 2

$$M_2 = -D \cdot \varphi_2 - \kappa \cdot r^2 \cdot (\varphi_2 - \varphi_1) - M_0. \tag{18}$$

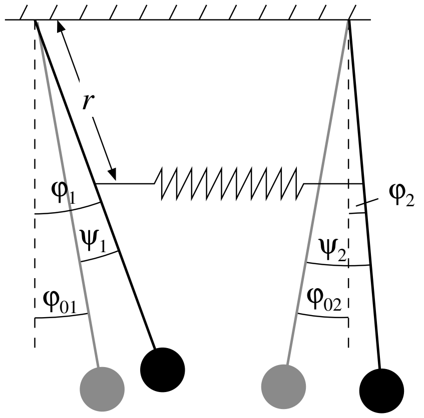

Abbildung 3: Winkelbezeichnungen für die gekoppelten Pendel: Die neue Gleichgewichtslage ist in grau eingezeichnet, die Winkel φ_n bezeichnen die Auslenkung aus der ursprünglichen Ruhelage, die Winkel ψ_n aus der neuen Gleichgewichtslage.

Dabei ist nach Gleichung (6) $D = m \cdot g \cdot l$, mit der Pendelmasse m und l dem Abstand des Schwerpunktes vom Aufhängungspunkt, κ ist die Federkonstante und M_0 das aus der Vorspannung der Feder entstehende Drehmoment. In der Gleichgewichtslage müssen die beiden Drehmomente verschwinden, man erhält dann

$$M_0 = \left(D + 2\,\kappa\,r^2\right) \cdot \varphi_0 \tag{19}$$

und kann die Gleichungen (17) und (18) auf die Winkel ψ_n umschreiben

$$M_1 \;=\; -D \cdot \psi_1 + \kappa \cdot r^2 \cdot (\psi_2 - \psi_1) \tag{20}$$
$$M_2 \;=\; -D \cdot \psi_2 - \kappa \cdot r^2 \cdot (\psi_2 - \psi_1)\,. \tag{21}$$

Dies führt dann zu den gekoppelten Differentialgleichungen

$$J \cdot \ddot{\psi}_1 + D \cdot \psi_1 - \kappa \cdot r^2 \cdot (\psi_2 - \psi_1) \;=\; 0 \tag{22}$$
$$J \cdot \ddot{\psi}_2 + D \cdot \psi_2 + \kappa \cdot r^2 \cdot (\psi_2 - \psi_1) \;=\; 0. \tag{23}$$

Führ man nun die Abkürzungen $k^2 := \frac{\kappa \cdot r^2}{J}$ und $\omega_{\mathrm{gl}}^2 := \frac{D}{J}$ und die Substitutionen

$$X := \psi_1 + \psi_2 \qquad \text{und} \qquad Y := \psi_1 - \psi_2 \tag{24}$$

ein, ergeben sich durch Addition bzw. Subtraktion der beiden Gleichungen (22) und (22)

$$\ddot{X} + \omega_{\mathrm{gl}}^2 \cdot X \;=\; 0 \tag{25}$$
$$\ddot{Y} + \underbrace{\left(\omega_{\mathrm{gl}}^2 + 2\,k^2\right)}_{\omega_{\mathrm{geg}}^2} \cdot Y \;=\; 0. \tag{26}$$

Als Lösung erhält man harmonische Schwingungen mit den Kreisfrequenzen ω_{gl} bzw. $\omega_{\mathrm{geg}} = \sqrt{\omega_{\mathrm{gl}}^2 + 2\,k^2}$ und den Koeffizienten $A1, A2, A3, A4$, welche durch die Anfangsbedingungen (Anfangswinkel und Anfangswinkelgeschwindigkeit der beiden Pendel) bestimmt sind

$$X(t) \;= A_1 \cdot \sin(\omega_{\mathrm{gl}}\, t) + A_2 \cdot \cos(\omega_{\mathrm{gl}}\, t), \tag{27}$$
$$Y(t) \;= A_3 \cdot \sin(\omega_{\mathrm{geg}}\, t) + A_4 \cdot \cos(\omega_{\mathrm{geg}}\, t). \tag{28}$$

Um die Bedeutung der Lösungen zu veranschaulichen, werden nun zwei Spezialfälle betrachtet.

1. Im ersten Fall soll nur $X(t)$ Schwingungen ausführen, es soll also $Y(t) = \psi_1 - \psi_2 \equiv 0$ sein. Dies ist gleichbedeutend damit, das die Pendel immer gleiche Auslenkung haben, also $\psi_1 = \psi_2$. Die Pendel schwingen also in Phase mit der Kreisfrequenz

$$\omega_{\mathrm{gl}} = \sqrt{\frac{D}{J}} = \sqrt{\frac{m \cdot g \cdot l}{J}}\,. \tag{29}$$

   Ein Vergleich mit Gleichung (10) ergibt, dass dies gerade die Frequenz ist, mit der auch ein einzelnes Pendel ohne Kopplung schwingen würde.

2. Im zweiten Fall soll nur $Y(t)$ Schwingungen ausführen, es soll also $X(t) = \psi_1 + \psi_2 \equiv 0$ sein. Dies ist gleichbedeutend damit, das die Pendel immer genau entgegengesetzte Auslenkung $\psi_1 = -\psi_2$ haben. Die Pendel schwingen in diesem Fall mit der Kreisfrequenz

$$\omega_{\mathrm{geg}} = \sqrt{\omega_{\mathrm{gl}}^2 + 2k^2} = \sqrt{\frac{m \cdot g \cdot l + 2\,\kappa \cdot r^2}{J}}\,, \tag{30}$$

   also mit einer höheren Frequenz.

Diese beiden Fälle sind die Fundamentalschwingungen des Systems. Im allgemeinen Fall liegt eine Überlagerung beider Schwingungsmoden vor. Durch Rücktransformation auf die Ausgangswinkel erhält man schließlich

$$\psi_1(t) = \frac{X+Y}{2} = \frac{A_1\,\sin(\omega_{\mathrm{gl}}\,t) + A_2\,\cos(\omega_{\mathrm{gl}}\,t) + A_3\,\sin(\omega_{\mathrm{geg}}\,t) + A_4\,\cos(\omega_{\mathrm{geg}}\,t)}{2} \tag{31}$$

$$\psi_2(t) = \frac{X-Y}{2} = \frac{A_1\,\sin(\omega_{\mathrm{gl}}\,t) + A_2\,\cos(\omega_{\mathrm{gl}}\,t) - A_3\,\sin(\omega_{\mathrm{geg}}\,t) - A_4\,\cos(\omega_{\mathrm{geg}}\,t)}{2} \tag{32}$$

Für die Anfangsbedingung, dass aus der Gleichgewichtslage eines der Pendel angestoßen wird (also $\dot{\psi}_1 \neq 0$, $\dot{\psi}_2 = 0$ und $\psi_1 = \psi_2 = 0$) ergibt sich $A := A_1 = A_3 \neq 0$ und $A_2 = A_4 = 0$.

Die Lösung der Schwingungsgleichung ist dann

$$\psi_1(t) \;=\; 2A \cdot \sin\left(\frac{\omega_{\mathrm{gl}} + \omega_{\mathrm{geg}}}{2} \cdot t\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega_{\mathrm{geg}} - \omega_{\mathrm{gl}}}{2} \cdot t\right) \;=\; 2A \cdot \sin(\omega_{\mathrm{M}} \cdot t) \cdot \cos(\omega_{\mathrm{S}} \cdot t) \tag{33}$$

$$\psi_2(t) \;=\; 2A \cdot \cos\left(\frac{\omega_{\mathrm{gl}} + \omega_{\mathrm{geg}}}{2} \cdot t\right) \cdot \sin\left(\frac{\omega_{\mathrm{geg}} - \omega_{\mathrm{gl}}}{2} \cdot t\right) \;=\; 2A \cdot \cos(\omega_{\mathrm{M}} \cdot t) \cdot \sin(\omega_{\mathrm{S}} \cdot t). \tag{34}$$

Die Pendel schwingen also mit der mittleren Kreisfrequenz $\omega_{\mathrm{M}} = \frac{\omega_{\mathrm{gl}} + \omega_{\mathrm{geg}}}{2}$, wobei die Amplitude mit der Schwebungskreisfrequenz $\omega_{\mathrm{S}} = \frac{\omega_{\mathrm{geg}} - \omega_{\mathrm{gl}}}{2}$ moduliert ist.

Als Maß für die Stärke der Kopplung wird nun noch der Kopplungsgrad K definiert als

$$K = \frac{\omega_{\mathrm{geg}}^2 - \omega_{\mathrm{gl}}^2}{\omega_{\mathrm{gl}}^2 + \omega_{\mathrm{geg}}^2} = \frac{\tau_{\mathrm{gl}}^2 - \tau_{\mathrm{geg}}^2}{\tau_{\mathrm{gl}}^2 + \tau_{\mathrm{geg}}^2} = \frac{\kappa \cdot r^2}{D + \kappa \cdot r^2} \tag{35}$$

Für „weiche“ Federn (kleines κ) und kleine Abstände des Angriffspunktes der Feder von der Drehachse ist der Kopplungsgrad klein, für eine sehr „starre“ Feder ($\kappa \to \infty$) geht der Kopplungsgrad gegen $K = 1$.

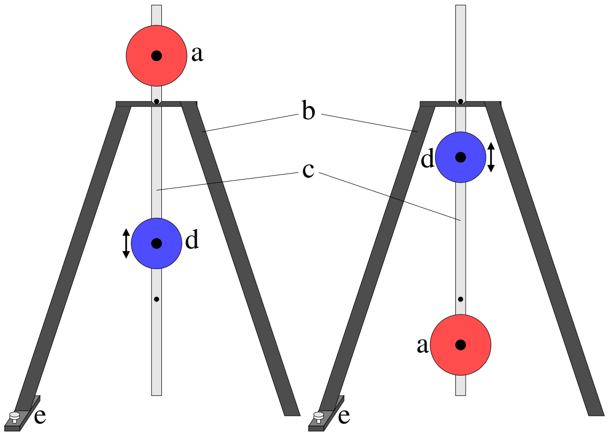

Abbildung 4: Aufbau des Reversionspendels in beiden Positionen: a) feste Masse, b) Gestell mit Lager, c) Pendelstange, d) bewegliche Masse), e) Justierschraube

2 Versuchsaufbau und -durchführung

2.1 Reversionspendel

Mit dem Reversionspendel soll in diesem Versuch die Erdbeschleunigung im Praktikumsraum bestimmt werden.

Nach Gleichung (15) wird eine Konfiguration gesucht, in der die Schwingungsdauer des Pendels um zwei unterschiedliche Schingungsachsen gleich sind. Im Versuch verändert man dazu die Massenverteilung, indem man ein Gewicht entlang der Pendelstange verschiebt, und misst die dazugehörigen Schwingungsdauern um zwei feste Achsen.

Der Aufbau des Reversionspendels ist in Abbildung 4 skizziert. Es besteht aus einem Aluminiumgestell, an dem oben eine Lagerplatte befestigt ist. In die Vertiefung der Lagerplatte wird dann die an der Pendelstange befestigte Lagerachse eingehängt. Mit der Justierschraube wird das Gestell so ausgerichtet, dass die Lagerplatte waagrecht ist (Überprüfung mit der Wasserwaage an der Lagerplatte).

Das große (rote) Gewicht ist fest an der Pendelstange angebracht. Das kleinere (blaue) Gewicht lässt sich mit einer Rändelschraube lösen und entlang der Pendelachse verschieben. An der Pendelstange sind Vertiefungen in 2,5 cm Abstand angebracht, an denen das Gewicht wieder fixiert werden kann.

Zusätzlich steht eine Lichtschranke bereit, mit der Pendeldauern mit einer Genauigkeit von 1 ms gemessen werden können. Die Lichtschranke wird so platziert, dass sie in der Ruheposition des Pendels unterbrochen ist. An dieser Position sind die Messabweichungen am geringsten.

Achtung:
Um eine Beschädigung des Lagers zu vermeiden darf die Position des Gewichtes nur verändert werden, wenn das Pendel nicht im Lager hängt.
Achten Sie beim Einhängen der Pendelstange in das Lager darauf, dass die Lagerachse nicht verbogen wird (vorsichtig und gerade einhängen).

Aufgabe 1: Ausrichten der Apparatur
Richten Sie mit den Justierschrauben am Fuß das Gestell so aus, dass das Lager waagrecht ist.

Aufgabe 2: Messungen

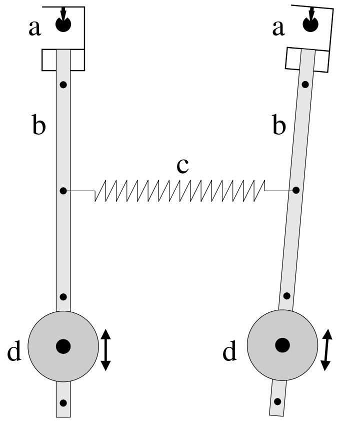

Abbildung 5: Aufbau der gekoppelten Pendel: a) Spitzenlager mit Winkelaufnehmer, b) Pendelstange mit verschiedenen Löchern zum Einhängen der Feder, c) Feder, d) bewegliche Masse)

Messen Sie für alle Stellungen des beweglichen (blauen) Gewichtes die Schingungsdauer in beiden Orientierungen des Pendels:

1. Stellen Sie zunächst das Gewicht auf einen Abstand ein. Hängen Sie dann die Pendelstange in das Lager und positionieren die Lichtschranke an der Ruheposition des Pendels.
2. Lenken Sie das Pendel vorsichtig aus. Die Auslenkung am unteren Ende des Pendels darf nicht mehr als 5 cm betragen, sonst erden Abweichungen von der Kleinwinkelnäherung relevant.
3. Messen Sie mit der Lichtschranke die Pendeldauer für eine ganze Schwingung. Wiederholen Sie dies mehrere Male, um ein Gefühl für die Reproduzierbarkeit zu bekommen (statistische Unsicherheit!).
4. Hängen Sie das Pendel nun in der anderen Position in das Lager und messen Sie auch in dieser Position die Schwingungsdauer.

Wiederholen Sie diese Schritte nun auch für die andrern Positionen des blauen Gewichts.

2.2 Gekoppelte Pendel

Abbildung 5 zeigt den Aufbau der beiden Pendel für diesen Versuchsteil

Die Aufängung (a) der beiden (baugleichen) Pendel besteht aus je zwei Nadeln, die in Vertiefungen des Lagerstabes liegen. Im Lagerstab ist ein Magnetsensor integirert, über den die Winkelauslenkung des Pendels gemessen wird. In der Pendelstange (b) befinden sich vier Löcher, in die die Feder (c) eingehängt werden kann, um so eine Kopplung herzustellen.

Achtung:
Um eine Beschädigung des Lagers zu vermeiden darf die Position des Gewichtes nur verändert werden, wenn das Pendel nicht im Lager hängt.
Achten Sie beim Einhängen der Pendel in das Lager darauf, dass die Lagernadeln nicht verbogen werden (vorsichtig und gerade einhängen).

Aufgabe 3: Einstellen der Pendellängen

Verststellen Sie die Lage der Gewichte so, dass der Abstand der Gewichte vom Lager bei beiden Pendeln gleich ist.

Hängen Sie nun die Pendel vorsichtig in die Lager ein. Achten Sie darauf dass die auf dem Pendel angegebenen Nummern mit denen der Lager übereinstimmen (die Messelektronik der Lager ist auf die Pendel abgestimmt). Befestigen Sie noch keine Kopplungsfeder an den Pendeln.

Aufgabe 4: Überprüfen der Schwingungsdauern

Lenken Sie beide Pendel aus (die Auslenkung am unteren Ende des Pendels soll nicht mehr als 5 cm betragen) und lassen Sie die Pendel gleichzeitig los. Starten Sie eine Messung am Computer, um daraus die Schingungsdauer der Pendel zu ermitteln. Überprüfen Sie die Phasenlage der beiden Schwingungen nach etwa 5 Minuten, sowohl per Auge als auch auf dem Computer. Diese darf sich nicht merklich geändert haben. Speichern Sie die Messdaten am Computer ab.

Sollte sich die Phase in der Messzeit geändert haben, wiederholen Sie die Einstellung der Pendellänge und Überprüfen Sie die Schwingungsdauern erneut.

Befestigen Sie nun eine der Kopplungsfedern zwischen den Pendeln (gleiches Befestigungsloch an beiden Pendeln wählen). Vergessen Sie nicht die Position der Feder bezüglich der Drehachse zu bestimmen und zu notieren.

Aufgabe 5: Eigenmoden des Systems

1. Lenken Sie beide Pendel gleich aus (gleichsinnig und gleiche Amplitude, die Amplitude soll am unteren Ende des Pendels nicht mehr als 5 cm betragen). Starten Sie eine Messung am Computer. Die Messdauer wählen Sie etwa eine Minute. Speichern Sie die Messdaten ab.

2. Lenken Sie beide Pendel gegensinnig, aber wieder mit gleicher Amplitude aus. Starten Sie wieder eine Messung (ca. eine Minute) und speichern Sie auch diese Daten ab.

Aufgabe 6: Schwebung

Bringen Sie beide Pendel in die Ruhelage uns stoßen dann ein Pendel an und starten Sie eine Messung am Computer. Messen Sie mindestens solange, bis Sie bei beiden Pendeln mindestens zwei volle Schebungeperiade auswerten können (min. fünf Knoten), bei starken Kopplungen (kurzen Schwebungsperioden) liefern mehr Perioden bessere Ergebnisse.

Wiederholen Sie die Aufgaben 5 und 6 für die anderen drei Befestigungslöcher mit der gleichen Feder, sowie für alle Löcher mit der anderen Feder.

3 Auswertung

3.1 Reversionspendel

Aufgabe 7:

Stellen Sie die gemessenen Schwingungsdauern für beide Orientierungen des Reversionspendels gegen die Position des Gewichtes in *einem* Diagramm dar. Passen Sie die sich ergebenden Kurven im Bereich der Schnittpunkte mit geeigneten Funktionen an.

Aufgabe 8:

Bestimmen an den beiden Schnittpunkten getrennt die Schwingungsdauer $\tau = \tau_1 = \tau_2$ mit Unischerheiten.

Hinweis zur Bestimmung der Unsicherheit:
Verschieben Sie die Ausgleichskurven um eine mittleren Unsicherheit der Schwingungsdauer (welche Annahme ist sinnvoll?) nach oben und nach unten. Suchen Sie dann die maximale und minimale Schwingungs-

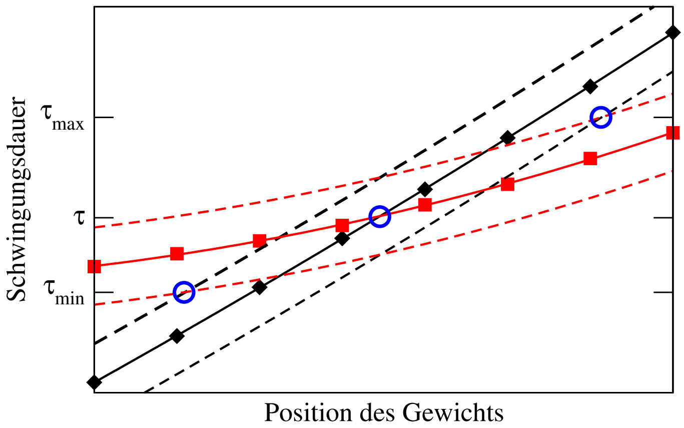

Abbildung 6: Auswertung der Daten zum Reversionspendel. Die gesuchte Schwingungsdauer ergibt sich am Schnittpunkt der Kurven für die beiden Aufhängepunkte (schwarz und rot). Die Unsicherheit wird über eine Minimum-Maximum-Abschätzung ermittelt. Die blauen Kreise zeigen die mittlere Schwingungsdauer sowie den Maximal- und Minimalwert.

dauer τ_{max} und τ_{min} (vgl. Abbildung 6). Als Unsicherheit der mittleren Schingungsdauer nehmen Sie dann $(\tau_{\mathrm{max}} - \tau_{\mathrm{min}})/2$.

Aufgabe 9:

Überprüfen Sie nun, ob die beiden ermittelten Schingungsdauern im Rahmen der Unsicherheiten übereinstimmen, und bilden Sie den gewichteten Mittelwert für die Schwingungsdauer mit Unsicherheit.

Aufgabe 10:

Berechnen Sie aus den Messdaten nun die Erdbeschleunigung mit Unsicherheit.

3.2 gekoppelte Pendel

Aufgabe 11: Schwingungsdauern der Eigenmoden

Bestimmen Sie aus den in Aufgabe 5 gemessenen Daten für alle Kopplungen die Schwingungsdauern τ_{gl} und τ_{geg} und die dazugehörigen Kreisfrequenzen ω_{gl} und ω_{geg}. Berechnen Sie die sich daraus ergebenden theoretischen Werte für die Schwebungsfrequenz ω_{S} und die mittlere Kreisfrequenz ω_{M}.

Aufgabe 12: Schwebung

Bestimmen Sie die Schwebungsfrequenzen ω_{S} und die mittleren Kreisfrequenzen ω_{M} für alle Kopplungen aus den in Aufgabe 6 gemessenen Daten. Berechnen Sie daraus auch den jeweiligen Kopplungsgrad K.

Aufgabe 13:

Tragen Sie die Schwebungskreisfrequenzen, die mittleren Schwingungsfrequenzen jeweils mit ihren theoretischen Werten gegen den Kopplungsabstand r auf. Tragen Sie auch den Kopplungsgrad gegen den Kopplungsabstand r auf.

Diskutieren Sie die gefundenen Abhängigkeiten, welche Abhängigkeiten wären theoretisch zu erwarten? Woraus können eventuelle Abweichungen entstehen.

Hinweis zur Bestimmung der Unsicherheit:
Die statistischen Unsicherheiten für die Zeiten ergeben sich hier aus Annahmen, wie gut Sie die exakten Able-

sepunkte (z.B. Schwebungsknoten oder Amplitudenmaxima) aus den Daten ablesen können.

Hinweis zur Ausarbeitung

Die Ausarbeitung muss sich nicht an der Reihenfolge der Aufgaben halten. Sie sollen sich selbst eine geeignete Ordnung überlegen.

Auch wenn es nicht explizit angegeben ist, sind alle Ergebnisse mit Unsicherheiten anzugeben.