Def.:
- $F \in \mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}^n)$ heißt $\mathcal{C}^k$-Vektorfeld auf $U \subseteq \mathbb{R}^n$.
- Ist $\phi \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$, dann heißt $F(x) := \nabla \phi(x)$ Gradientenfeld.
- Ist $F \in \mathcal{C}(U \subseteq \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ und $\gamma \in \mathcal{C}^1([t_0, t_1], U)$, dann definieren wir das Kurvenintegral von F entlang γ als:

$$\int_\gamma F(r) \cdot dr := \int_{t_0}^{t_1} \langle F(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle \, dt .$$

- Ist γ geschlossen, so schreiben wir "$\oint_\gamma F(r) \cdot dr$".

Anwendung: Ist $F(U \subseteq \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, $F(x) := -\frac{x}{\|x\|^3}$ das Kraftfeld der Sonne, γ die Bahnkurve und $\dot{\gamma}$ der Geschwindigkeitsvektor eines Planeten, dann ist $\int_\gamma F(r) \cdot dr$ die "Arbeit" entlang γ.

Wir parametrisieren o.B.d.A. (Drehimpulserhaltung!) $\gamma : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = \begin{pmatrix} R\cos(t) \\ R\sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}$.

Dann ist $\oint_\gamma F(r) \cdot dr = -\frac{1}{R} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} dt = 0$.

Auf einer Kreisbahn wird also keine Arbeit verrichtet.

Def.: Ein Vektorfeld $F \in \mathcal{C}(U \subseteq \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ heißt konservativ, wenn $\oint_\gamma F(r) \cdot dr = 0$ für alle stückweisen $\mathcal{C}^1$-Kurven in U gilt.

Satz: (Gradientenfelder sind konservativ)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\phi \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ & $\gamma \in \mathcal{C}^1([t_0, t_1], U)$. Dann gilt:

$$\int_\gamma \nabla\phi(r) \cdot dr = \phi(\gamma(t_1)) - \phi(\gamma(t_0)).$$

Beweis: Kettenregel: $\frac{d}{dt}\phi(\gamma(t)) = \nabla\phi(\gamma(t)) \cdot \dot\gamma(t)$. Also:

$$\int_\gamma \nabla\phi(r)\cdot dr = \int_{t_0}^{t_1} \nabla\phi(\gamma(t)) \cdot \dot\gamma(t)\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}\phi(\gamma(t))\, dt \overset{HDI}{=} \phi(\gamma(t_1)) - \phi(\gamma(t_0)). \quad \square$$

Satz: Für ein Vektorfeld $F \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R}^n)$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, sind äquivalent:

(i) "Wegunabhängigkeit des Integrals", d.h. $\int_\gamma F(r)\cdot dr = \int_{\tilde\gamma} F(r)\cdot dr$ für alle stückweisen $\mathcal{C}^1$-Kurven $\gamma, \tilde\gamma \in \mathcal{C}([0,1], U)$ mit $\gamma(0) = \tilde\gamma(0) \wedge \gamma(1) = \tilde\gamma(1)$.

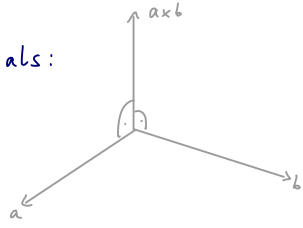
(ii) F ist konservativ.

(iii) "Existenz eines Potentials": $\exists\, \phi \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}) : F = \nabla\phi$.

IV. VEKTORANALYSIS

Def.: Das Kreuzprodukt ist für $a, b \in \mathbb{R}^3$ definiert als:

$$a \times b := \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}.$$



Satz: Für $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ gilt:

- $\|a \times b\| = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \sin(\sphericalangle(a,b))$
- $\langle a, a \times b \rangle = \langle b, a \times b \rangle = 0$
- $a \times b = -b \times a$ (Antikommutativität)
- $a \times (b \times c) = b\langle a, c \rangle - c\langle a, b \rangle$ (Graßmann-Identität)

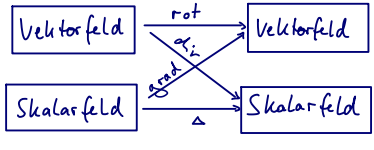
Def.:

- Kronecker-Delta: $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$
- Levi-Civita-Symbol: $\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, & (ijk) \text{ gerade Permutation von } (123) \\ -1, & \text{— " — ungerade — " —} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

Bem.: Damit lässt sich die i-te Komponente des Kreuzprodukts schreiben als $(a \times b)_i = \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} a_j b_k$. Vektoranalytische Identitäten lassen sich damit elegant beweisen.

Eine dafür nützliche Identität ist $\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$.

Zwischen den vier wichtigsten Differentialoperatoren gelten die Zusammenhänge:



Alle vier lassen sich mit dem Nabla-Operator $\nabla := \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \vdots \\ \partial_n \end{pmatrix}$ schreiben.

Def.: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

- Der Gradient $\operatorname{grad} : \mathcal{C}^k(U,\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^{k-1}(U,\mathbb{R}^n)$ ist definiert als

$$\operatorname{grad} f := \nabla f := \begin{pmatrix} \partial_1 f \\ \vdots \\ \partial_n f \end{pmatrix}.$$

- Die Divergenz $\operatorname{div} : \mathcal{C}^k(U,\mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}^{k-1}(U,\mathbb{R})$ ist definiert als

$$\operatorname{div} F := \langle \nabla, F \rangle := \sum_{i=1}^{n} \partial_i F_i .$$

- Der Laplace-Operator $\Delta : \mathcal{C}^k(U,\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^{k-2}(U,\mathbb{R})$ ist definiert als

$$\Delta f := \nabla^2 f := \operatorname{div} \operatorname{grad} f = \sum_{i=1}^{n} \partial_i^2 f = \operatorname{tr}(H_f).$$

- Die Rotation $\operatorname{rot} : \mathcal{C}^k(U,\mathbb{R}^3) \to \mathcal{C}^{k-1}(U,\mathbb{R}^3)$ ist definiert als

$$(\operatorname{rot} F)_i := (\nabla \times F)_i = \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\, \partial_j F_k .$$

Bem.: div & rot lassen sich als lokale Quelldichte bzw. Wirbelstärke verstehen.

Satz: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen, $\phi \in \mathcal{C}^2(U,\mathbb{R})$ und $\tilde{F} \in \mathcal{C}^2(U,\mathbb{R}^3)$. Dann gilt:

(i) $F = \nabla \phi \Rightarrow \nabla \times F = 0$ „Gradientenfelder sind wirbelfrei"

(ii) $F = \nabla \times \tilde{F} \Rightarrow \langle \nabla, F \rangle = 0$ „Wirbelfelder sind quellenfrei"

Beweis: (i)

$$(\nabla \times \nabla \phi)_i = \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\, \partial_j \partial_k \phi = -\sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{ikj}\, \partial_k \partial_j \phi = -(\nabla \times \nabla \phi)_i$$

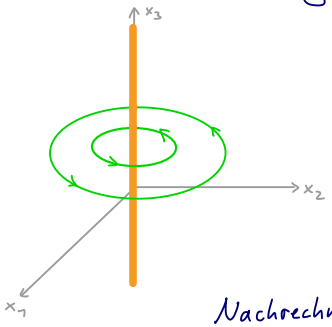
($\uparrow$ $\phi \in \mathcal{C}^2$ & $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{ikj}$)

(i)

$$\langle \nabla, \nabla \times \tilde{F} \rangle = \sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\, \partial_i \partial_j \tilde{F}_k = -\sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{jik}\, \partial_j \partial_i \tilde{F}_k = -\langle \nabla, \nabla \times \tilde{F} \rangle \qquad \square$$

($\uparrow$ $\tilde{F} \in \mathcal{C}^2$ & $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik}$)

Aus (i) folgt, dass konservative Vektorfelder stets verschwindende Rotation haben. Gilt auch die Umkehrung?



Magnetfeld eines stromdurchflossenen Leiters auf der x_3-Achse:

$$v(x) = \begin{pmatrix} -\frac{x_2}{x_1^2+x_2^2} \\ \frac{x_1}{x_1^2+x_2^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nachrechnen zeigt, dass tatsächlich $\operatorname{rot} v(x) = 0$.

Auf der anderen Seite gilt jedoch mit $\gamma : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), 0)$:

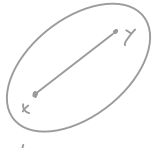
$$\oint_\gamma v(x) \cdot dx = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} dt = 2\pi \neq 0.$$

D.h. $v(x)$ ist nicht konservativ. Also ist die Umkehrung von (i) i.A. falsch. Sie gilt jedoch, wenn wir an die Definitionsmenge von v eine weitere Forderung stellen. Für unser $v : U \to \mathbb{R}^3$ ist nämlich $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2 = 0 \}$ & diese Menge ist nicht „sternförmig". Machen wir eine kleine Exkursion in die Topologie...

Einschub I:

Erinnerung: Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **konvex**, wenn

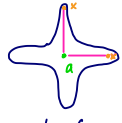
$$\forall x, y \in M : \forall \lambda \in [0,1] : \lambda a + (1-\lambda) b \in M.$$



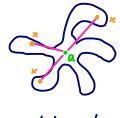
konvex

nicht konvex

Def.: $U \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **sternförmig**, wenn es ein $a \in U$ gibt, so dass $\forall x \in U : \forall t \in [0,1] : ta + (1-t)x \in U$.



sternförmig
(nicht konvex!)



nicht sternförmig

Lemma: (von Poincaré)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen & sternförmig und $F \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^n)$.

Dann gilt: $\boxed{\partial_i F_k = \partial_k F_i}$ $\forall i, k \in \{1, \dots, n\}$.

D.h. für $n = 3$ gilt: $\operatorname{rot} F = 0$.

Satz: Ist $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen & sternförmig und $F \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$, so dass $\langle \nabla, F \rangle = 0$.

Dann ist $A(r) := \int_0^1 t\, F(tr)\, dt \times r$ ein Vektorpotential von F, d.h. $F = \nabla \times A$.

Wir können diese beiden Aussagen nochmal verallgemeinern:

Einschub II:

Def.: Ein Gebiet $U \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt einfach zusammenhängend, wenn sich jede geschlossene Kurve in U stetig auf einen Punkt zusammenziehen lässt.

Bsp.: $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist für $n \geq 3$ einf. zshgd.

Bem.: konvex $\Rightarrow$ sternförmig $\Rightarrow$ einfach zusammenhängend

Wir können nun überall die Forderung nach Sternförmigkeit fallen lassen & den schwächeren einfachen Zusammenhang einbauen, die Aussagen gelten analog. Ist man jedoch an dem Beweis dieser interessiert, so ist er mit sternförmigen Mengen leichter zu führen.

Wir haben also:

$$F = \nabla \phi \quad \Longleftrightarrow \quad \oint F(r) \cdot dr = 0 \quad \Longrightarrow \quad \nabla \times F = 0$$

"Gradientenfeld" — "konservatives Feld" — "wirbelfrei"

'$\Leftarrow$' auf einf. zshgd. Gebieten

Das beseitigt nun unser „Magnetfeld-Problem". Dort war U nicht einfach zshgd.

$$F = \nabla \times A \quad \Longrightarrow \quad \langle \nabla, F \rangle = 0$$

"Vektorpotential" — "quellenfrei"

'$\Leftarrow$' auf einf. zshgd. Gebieten

In der Physik nutzt man letztere Eigenschaft zur „Eichfreiheit" aus.

Man verwendet die „Coulombeichung" $\operatorname{div} A = 0$, so dass $B = \operatorname{rot} A$.

Damit folgt z.B.: $\mu_0 j = \operatorname{rot} B = \operatorname{rot}(\operatorname{rot} A) = \nabla \underbrace{\operatorname{div} A}_{=0} - \Delta A$, d.h. $\Delta A = -\mu_0 j$

$\mu_0 j$: Stromdichte; $\operatorname{rot} B$: Maxwellgleichung

Man kann also aus einer Stromdichte ein Vektorpotential konstruieren.

V. IMPLIZITE & INVERSE FUNKTIONEN

Welche Kriterien müssen erfüllt sein, damit eine Gleichung umkehrbar ist?
Wann kann eine Gleichung nach einer bestimmten Variablen aufgelöst werden?

Zur Erinnerung an Analysis 1:
Eine Bijektion ist eine eindeutige, invertierbare Abbildung, die also jedes Element des Urbilds auf genau ein Element des Bilds abbildet. Sie ist gleichzeitig injektiv & surjektiv.

Def.:
- Eine bijektive Abbildung $f: U \to V$, $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen heißt ein $\mathcal{C}^k$-Diffeomorphismus, falls $f, f^{-1} \in \mathcal{C}^k$.
- f heißt lokaler $\mathcal{C}^k$-Diffeomorphismus, falls jeder Punkt $x \in U$ eine offene Umgebung $U_x \subseteq U$ besitzt, so dass $f|_{U_x} : U_x \to f(U_x)$ ein $\mathcal{C}^k$-Diffeomorphismus ist.

Satz: Für $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen ist $f \in \mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}^n)$ genau dann ein lokaler $\mathcal{C}^k$-Diffeomorphismus, wenn die Jacobi-Matrix $J_f(x)$ $\forall x \in U$ invertierbar ist. Für die lokal definierte Umkehrabbildung f^{-1} gilt dann: $\boxed{J_{f^{-1}}(f(x)) = (J_f(x))^{-1}}$.

Def.: Seien $U \subseteq \mathbb{R}^m$, $V \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f: U \times V \to \mathbb{R}^n$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$. Dann sind

$$\partial_x f := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \partial_y f := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}$$

die partiellen Differentiale von f.

Satz: (Implizite Funktionen)

Sei $f \in \mathcal{C}^k(U \times V, \mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{N}$, $U \subseteq \mathbb{R}^m$, $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $x_0 \in U$, $y_0 \in V$ mit $f(x_0, y_0) = 0$ und $\det(D_y f(x_0, y_0)) \neq 0$. Dann gibt es offene Umgebungen $\tilde{U} \subseteq U$, $\tilde{V} \subseteq V$ von x_0, y_0 und genau eine Funktion $g \in \mathcal{C}^k(\tilde{U}, \tilde{V})$ mit $f(x, g(x)) = 0 \quad \forall x \in \tilde{U}$.

Weiter gilt für $x \in \tilde{U}$:

$$\boxed{J_g(x) = -\left[\partial_y f(x, g(x))\right]^{-1} \partial_x f(x, g(x))}.$$

Bem: Da $D_y f \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine quadratische Matrix ist, ist sie invertierbar, sofern $\det(D_y) \neq 0$. $D_x f$ kann & muss nicht invertiert werden da i.A. # Zeilen $\neq$ # Spalten.

Beweis: w.l.o.g. nur für $U, V \subseteq \mathbb{R}$ offen.

$$0 = \frac{d}{dx} f(x, g(x)) = \underbrace{\left(\partial_1 f(x, g(x)) \quad \partial_2 f(x, g(x))\right)}_{\text{Kettenregel}} \begin{pmatrix} 1 \\ g'(x) \end{pmatrix} = \partial_1 f(x, g(x)) + \partial_2 f(x, g(x)) g'(x) \quad \square$$

Für die Anwendbarkeit des Satzes müssen also drei Dinge überprüft werden:

- Gilt $f \in \mathcal{C}^k(U \times V, \mathbb{R}^n)$ mit $k \geq 1$?
- Gilt $f(x_0, y_0) = 0$?
- Ist $\partial_y f(x_0, y_0)$ invertierbar ($\Leftrightarrow \det(D_y f(x_0, y_0)) \neq 0$) ?

Bsp.: $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = 2x + y^2 + e^{z-1} z^2$

Ist $f(x, y, z) = 4$ in $(1, 1, 1)$ lokal nach z auflösbar?

- f ist stetig differenzierbar ✓
- Für $\tilde{f}(x, y, z) := f(x, y, z) - 4$ gilt offenbar $\tilde{f}(1, 1, 1) = 0$ ✓
- Es ist $\partial_z f(x, y, z) = e^{z-1}(z^2 + 2z)$, also $\det(\partial_z f(1, 1, 1)) = 3 \neq 0$ ✓

$\Rightarrow$ Ja, ist auflösbar.

Bem.: Der Satz über implizite Funktionen liefert keine explizite Umformung nach bestimmten Variablen. Jedoch garantiert er die Existenz einer solchen Auflösung und stellt eine Rechenvorschrift für die Ableitung dieser Auflösung an festen Punkten bereit.