Zentrum Mathematik | Technische Universität München
Marius Gritl
Marcel Ilg
WS 2020/21

Ferienkurs Analysis 1 für Physik (MA9202)

Probeklausur

12. März 2021
Arbeitszeit: 90 Minuten **Name:** ____________________

Diese Klausur enthält 12 Seiten (Einschließlich dieses Deckblatts) und 7 Aufgaben.
Die Gesamtpunktzahl beträgt 77.

Punkteverteilung

Aufgabe	Punkte	Erreicht
1	19	
2	11	
3	9	
4	8	
5	11	
6	7	
7	12	
Gesamt:	77	

Erlaubte Hilfsmittel: keine

Beachten Sie die Hinweise zur Probeklausur! Auf die Gestaltung der Klausur, der Wiederholungsklausur sowie des Drittversuchs hat ausschließlich Prof. König Einfluss. Insbesondere sind uns die Aufgabenstellungen beider Klausuren gänzlich unbekannt. Daher liefert das Vorkommen oder Nicht-Vorkommen gewisser Themen in der Probeklausur keinen Hinweis auf das Vorkommen oder Nicht-Vorkommen besagter Themen in der Klausur, der Wiederholungsklausur oder im Drittversuch!

Musterlösung

1. (19 Punkte) **Gemischtes**

In den folgenden Aufgaben sind **keine** Begründungen gefordert und werden auch nicht zur Bewertung herangezogen. Gewertet werden ausschließlich die Ergebnisse in den dafür vorgesehenen Kästen. Sollte der Platz in den besagten Kästen nicht ausreichen, so sollten Sie in eindeutiger Weise kennzeichnen, wo Sie die Aufgabe bearbeitet haben.

(a) (2 Punkte) Geben Sie Infimum und Supremum der Menge $M := \{x \in \mathbb{R} : x^{42} + x^2 = 0\}$ an.

$\inf(M) \overset{[1]}{=} 0$	$\sup(M) \overset{[1]}{=} 0$

Zur Lösung: M ist eine einelementige Menge $M = \{0\}$.
Dann ist offenbar $\inf(M) = \sup(M) = 0$.

(b) (2 Punkte) Geben Sie zwei divergente Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an, deren Produkt $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

$a_n \overset{[1]}{=} (-1)^n$	$b_n \overset{[1]}{=} (-1)^n$

Zur Lösung: s.o.

(c) (3 Punkte) Geben Sie den Grenzwert der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-(1+i)^n}{2^n}$ an.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-(1+i)^n}{2^n} \overset{[3]}{=} 1 - i$$

Zur Lösung: Geometrische Reihe.

(d) (2 Punkte) Bestimmen Sie $c \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R}\backslash\{-1\} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi x)+x-1}{x^2-1}, & \text{für } x \neq 1, \\ c & \text{für } x = 1, \end{cases}$$

auf ihrem Definitionsbereich stetig ist. $c \overset{[2]}{=} \frac{1-\pi}{2}$

Zur Lösung: f wird in $x = 1$ durch $\lim_{x\to 1} \frac{\sin(\pi x)+x-1}{x^2-1} \overset{\text{l.H.}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\pi\cos(\pi x)+1}{2x} = \frac{1-\pi}{2}$ stetig fortgesetzt.

(e) (3 Punkte) Geben Sie die Ableitung der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arctan\left(\frac{\ln(x)}{x^2+1}\right)$ an.

$$f'(x) \overset{[3]}{=} \frac{1}{1+\left(\frac{\ln(x)}{x^2+1}\right)^2} \frac{(x^2+1)\frac{1}{x} - 2x\ln(x)}{(x^2+1)^2} = \frac{x + \frac{1}{x} - 2x\ln(x)}{(x^2+1)^2 + (\ln(x))^2}$$

Zur Lösung: Quotientenregel, Kettenregel.

(f) (2 Punkte) Geben Sie das Ergebnis des Grenzwerts $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x^2+42}$ an.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x^2+42} \overset{[2]}{=} 0$$

Zur Lösung: s.o., l'Hospital ist hier nicht anwendbar.

(g) (3 Punkte) Führen Sie bei folgendem Integral die vorgegebene Substitution durch, **ohne** das Integral konkret zu berechnen.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x^2)}{1+(\sin(x))^2} \mathrm{d}x \overset{\substack{[3]\\ u=\sin(x)}}{=} \int_0^1 \frac{\cos((\arcsin(u))^2)}{(1+u^2)\cdot\sqrt{1-u^2}} \mathrm{d}u$$

Zur Lösung: Da ja $u(0) = 0$ und $u(\frac{\pi}{2}) = 1$, ergeben sich obige Grenzen. Weiter gilt formal wegen $u(x) = \sin(x) \Rightarrow u'(x) = \cos(x) \Rightarrow \mathrm{d}u = \cos(x)\mathrm{d}x$:

$$\int \frac{\cos(x^2)}{1+(\sin(x))^2} \mathrm{d}x \overset{u=\sin(x)}{=} \int \frac{1}{1+u^2} \cdot \frac{\cos((\arcsin(u))^2)}{\cos(\arcsin(u))} \mathrm{d}u$$
$$\overset{(\sin(\xi))^2+(\cos(\xi))^2=1}{=} \int \frac{\cos((\arcsin(u))^2)}{(1+u^2)\cdot\sqrt{1-u^2}} \mathrm{d}u.$$

(h) (2 Punkte) Geben Sie die Lösung des folgenden Anfangswertproblems an:

$$\dot{x}(t) = t^{2021}, \quad x(0) = 1.$$

$$x(t) \overset{[2]}{=} \frac{1}{2022} t^{2022} + 1$$

Zur Lösung: Die vorliegende Differentialgleichung liegt in getrennten Variablen vor. Damit folgt

$$\int_1^{x(t)} \mathrm{d}\tilde{x} = \int_0^t \tilde{t}^{2021} \mathrm{d}\tilde{t} \Leftrightarrow x(t) = \frac{1}{2022} t^{2022} + 1.$$

2. (11 Punkte) **Komplexe Zahlen und vollständige Induktion**

Die Folge komplexer Zahlen $(z_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei rekursiv definiert durch

$$z_0 = i, \qquad z_1 = 1, \qquad z_{n+2} = -\frac{z_n + i \cdot z_{n+1}}{2}.$$

(a) (4 Punkte) Geben Sie den den Real- und Imaginärteil, sowie den Betrag der komplexen Zahl $z = (z_2 + z_3)^{-1}$ an.

$\mathrm{Re}(z) \overset{[1]}{=} -\frac{1}{2}$	$\mathrm{Im}(z) \overset{[1]}{=} \frac{1}{2}$	$\lvert z\rvert \overset{[2]}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}$

Zur Lösung:

Es gilt:

$$z = (z_2 + z_3)^{-1} = -\frac{1}{i+1} = -\frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{i-1}{2}$$

und somit folgen die obigen Ergebnisse für Real- und Imaginärteil, sowie den Betrag.

(b) (7 Punkte) Stellen Sie eine Vermutung über die explizite (d.h. nicht rekursiv definierte) Darstellung von $(z_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ auf und beweisen Sie diese mit Hilfe von vollständiger Induktion.

Die Rechnung des vorherigen Aufgabenteil begünstigt die Vermutung, dass

$$z_n = (-i)^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

gilt **[2]** . Dies wird mithilfe vollständiger Induktion wie folgt bewiesen:

Induktionsanfang $n = 0$ und $n = 1$: Es gilt $z_0 = i = \frac{1}{-i}$ und $z_1 = 1 = (-i)^0$ **[2]**.

Induktionsschritt: $n + 1 \to n + 2$. Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Für alle $k \in \{0, \ldots, n+1\}$ gelte die Induktionsannahme $z_k = (-i)^{k-1}$. Somit gilt:

$$\begin{aligned} z_{n+2} &= -\frac{z_n + iz_{n+1}}{2} \overset{\text{I.A.}}{=} -\frac{(-i)^{n-1} + i \cdot (-i)^n}{2} \\ &= -(-i)^{n-1} = (-i)^{n+1} = (-i)^{(n+2)-1} \ \textbf{[3]} \end{aligned}$$

3. (9 Punkte) **Konvergenz von Reihen**

(a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) := \ln(1 + x) - x$ monoton fallend ist.

Die Ableitung von f erfüllt:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 \leq \frac{1}{1+0} - 1 = 0 \text{ [}\mathbf{1}\text{]}.$$

Da die Ableitung nichtpositiv ist, folgt aus dem Monotoniekriterium, dass f monoton fallend ist[**1**].

(b) (2 Punkte) Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ die Abschätzung $\ln(n) \leq n - 1$.

Dank (a) wissen wir, dass

$$\ln(1 + x) - x = f(x) \leq f(0) = \ln(1 + 0) - 0 = 0 \Leftrightarrow \ln(1 + x) \leq x \text{ [}\mathbf{1}\text{]}.$$

Einsetzen von $x = n - 1$ liefert dann

$$\ln(1 + n - 1) = \ln(n) \leq n - 1 \text{ [}\mathbf{1}\text{]}.$$

(c) (3 Punkte) Begründen Sie, ob die Reihe $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)}$ konvergent ist.

Dank (b) gilt für alle $n \geq 2$:

$$\ln(n) \leq n - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\ln(n)} \geq \frac{1}{n-1} \text{ [}\mathbf{1}\text{]}.$$

Bekanntermaßen divergiert die harmonische Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1}$ [**1**]. Somit folgt die Divergenz der betrachteten Reihe aus dem Minorantenkriterium [**1**].

(d) (2 Punkte) Begründen Sie, ob die Reihe $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$ konvergent ist.

Der natürliche Logarithmus ist monoton steigend. Damit ist die Folge $\frac{1}{\ln(n)}$ monoton fallend [**1**] und die Konvergenz der gegebenen alternierenden Reihe folgt aus dem Leibnizkriterium [**1**].

4. (8 Punkte) **Anwendung des Zwischenwertsatzes**

   (a) (2 Punkte) Formulieren Sie den Zwischenwertsatz für eine stetige Funktion $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $a < b$.

   Für die stetige Funktion $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ mit $a < b$ gilt

   $$\forall y \in \mathbb{R} : \min\{f(a), f(b)\} \leq y \leq \max\{f(a), f(b)\} : \exists x \in [a, b] : f(x) = y. \ \mathbf{[2]}$$

   (b) (6 Punkte) Sei nun $f[a, b] \to [a, b]$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass es ein $x^* \in [a, b]$ mit $f(x^*) = x^*$ gibt.
   Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $x \mapsto f(x) - x$ und wenden Sie auf diese den Zwischenwertsatz an.

   Sei also $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = f(x) - x$. g ist wie f stetig [**1**].
   Außerdem gilt $g(a) = f(a) - a \in [0, b - a]$, also $g(a) \geq 0$ [**1**].
   Weiter ist $g(b) = f(b) - b \in [a - b, 0]$, also $g(b) \leq 0$ [**1**].
   Nach dem Zwischenwertsatz gibt es also ein $x^* \in [a, b]$ mit $g(x^*) = 0$ [**2**].
   Somit haben wir ein $x^* \in [a, b]$ gefunden, für das $f(x^*) = g(x^*) + x^* = x^*$ gilt [**1**].

5. (11 Punkte) **Ableitung der Umkehrfunktion und partielle Integration**

(a) (4 Punkte) Zeigen Sie unter Zuhilfenahme des Satzes zur Ableitung der Umkehrfunktion, dass für $\arcsin : [-1,1] \to \mathbb{R}$ gilt: $(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Wir wenden den Satz zur Ableitung der Umkehrfunktion auf die Funktion $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an.

$$(\sin^{-1})'(x) = \arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} \overset{(\star)}{=} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ [\mathbf{4}].$$

Wobei wir in $(\star)$ ausgenutzt haben, dass $\forall x \in \mathbb{R} : (\sin(x))^2 + (\cos(x))^2 = 1$.

(b) (3 Punkte) Zeigen Sie unter Verwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung, also ohne Einsatz von Integrationstechniken, dass $g : (-1,1) \to \mathbb{R}$, $g(x) = -\sqrt{1-x^4}$ eine Stammfunktion von $f(x) = \frac{2x^3}{\sqrt{1-x^4}}$ ist.

Gemäß dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist die Funktion g genau dann eine Stammfunktion der stetigen Funktion f, wenn $g'(x) = f(x)$ für alle sinnvollen x ist [**1**]. Nun folgt mit der Kettenregel

$$g'(x) = -\frac{-4x^3}{2\sqrt{1-x^4}} = \frac{2x^3}{\sqrt{1-x^4}} = f(x) \ [\mathbf{2}].$$

(c) (4 Punkte) Berechnen Sie nun nachvollziehbar den Wert des Integrals $\int_0^1 x \arcsin\left(x^2\right) \mathrm{d}x$

Mit partieller Integration und unter Ausnutzung von (b) folgt

$$\begin{aligned}\int_0^1 x \arcsin\left(x^2\right) \mathrm{d}x &\overset{[\mathbf{2}]}{=} \left[\frac{x^2}{2} \arcsin\left(x^2\right)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2} \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}} \mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\left[\sqrt{1-x^4}\right]_0^1 \; [\mathbf{1}] \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \; [\mathbf{1}]\end{aligned}$$

6. (7 Punkte) **Konvergenz von Funktionenfolgen**

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei die Funktion $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = e^{x-n}$ gegeben.

(a) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise konvergiert.

Es gilt für alle $x \in [0, \infty)$:

$$\lim_{n\to\infty} e^{x-n} = \lim_{n\to\infty} \left(e^x \cdot e^{-n}\right) \overset{[1]}{=} e^x \cdot \lim_{n\to\infty} e^{-n} = e^x \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n \overset{[1]}{=} 0.$$

Also konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für alle $x \in [0, \infty)$ gegen $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$ **[1]**.

(b) (4 Punkte) Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[0, 1]$ sogar gleichmäßig konvergiert.

Wegen der Monotonie der Exponentialfunktion gilt für alle $x \in [0, 1]$ und alle $n \in \mathbb{N}$:

$$|f_n(x) - f(x)| = e^{x-n} \overset{[1]}{=} e^x \cdot e^{-n} \overset{[1]}{\leq} e^1 \cdot e^{-n} = e \cdot \left(\frac{1}{e}\right)^n =: a_n.$$

Wegen $a_n \to 0$ für $n \to \infty$ **[1]** ist die Konvergenz auf $[0, 1]$ sogar gleichmäßig **[1]**.

7. (12 Punkte) **Kurze Fragen**

Im Folgenden sind einige Aussagen gegeben, deren Wahrheitsgehalt Sie überprüfen müssen. Kreuzen Sie jeweils an, ob die Aussage wahr oder falsch ist und geben Sie auch eine Begründung für Ihre Entscheidung an.
Antworten ohne Begründung werden nicht bewertet!

(a) (3 Punkte) Jede in einem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist automatisch auch differenzierbar in diesem Punkt x_0.

☐ Wahr ☒ Falsch
Begründung:

Die Begründung erfolgt mittels Gegenbeispiel. Betrachtet wird die stetige Betragsfunktion $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$.
Diese ist stückweise stetig differenzierbar mit $\frac{\mathrm{d}|x|}{\mathrm{d}x} = 1$ für $x > 0$ und $\frac{\mathrm{d}|x|}{\mathrm{d}x} = -1$ für $x < 0$. Durch Betrachtung der Grenzwerte dieser Ableitungen ergibt sich

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{\mathrm{d}|x|}{\mathrm{d}x} = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{x \uparrow 0} \frac{\mathrm{d}|x|}{\mathrm{d}x} = -1,$$

somit hat die Ableitung bzw. der Differenzenquotient bei $x = 0$ eine Unstetigkeitsstelle, weshalb die Betragsfunktion hier nicht differenzierbar ist **[3]**.

(b) (3 Punkte) Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolge mit $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sei konvergent, dann konvergiert auch die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{|a_n|}$.

☐ Wahr ☒ Falsch
Begründung:

Sei $a_n = \frac{1}{n^2}$. Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ist nach Vorlesung konvergent.

Jedoch ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{|a_n|} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ bekanntermaßen divergent. Somit ist obige Aussage falsch **[3]**.

(c) (3 Punkte) Folgendes uneigentliches Integral ist existent:

$$\int_0^1 \frac{e^{-x}}{x} \mathrm{d}x.$$

☐ Wahr ☒ Falsch

Begründung:

Wegen $e^{-x} = \frac{1}{e^x} \geq \frac{1}{e}$ für alle $x \in (0, 1)$ folgt

$$\int_0^1 \frac{e^{-x}}{x} \mathrm{d}x \geq \frac{1}{e} \int_0^1 \frac{1}{x} \mathrm{d}x.$$

Und das Integral $\int_0^1 \frac{1}{x} \mathrm{d}x$ ist bekanntermaßen divergent **[3]**.

(d) (3 Punkte) Die allgemeine Lösung $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung $\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + x(t) = 0$ ist gegeben durch $x(t) = \alpha e^{-t}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$.

☐ Wahr ☒ Falsch

Begründung:

Die Differentialgleichung hat das charakteristische Polynom $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2$. $\lambda_1 = -1$ ist also eine doppelte Nullstelle, womit $\{e^{-t}, te^{-t}\}$ ein Lösungsfundamentalsystem ist. Die allgemeine Lösung lautet also
$x(t) = \alpha e^{-t} + \beta te^{-t}$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ **[3]**.

Platz für Notizen: