Zentrum Mathematik | Technische Universität München
Marius Gritl
Marcel Ilg
WS 2020/21

Ferienkurs Analysis 1 für Physik (MA9202)

Probeklausur

12. März 2021
Arbeitszeit: 90 Minuten **Name:** ______________________

Diese Klausur enthält 12 Seiten (Einschließlich dieses Deckblatts) und 7 Aufgaben.
Die Gesamtpunktzahl beträgt 77.

Punkteverteilung

Aufgabe	Punkte	Erreicht
1	19	
2	11	
3	9	
4	8	
5	11	
6	7	
7	12	
Gesamt:	77	

Erlaubte Hilfsmittel: keine

Beachten Sie die Hinweise zur Probeklausur! Auf die Gestaltung der Klausur, der Wiederholungsklausur sowie des Drittversuchs hat ausschließlich Prof. König Einfluss. Insbesondere sind uns die Aufgabenstellungen beider Klausuren gänzlich unbekannt. Daher liefert das Vorkommen oder Nicht-Vorkommen gewisser Themen in der Probeklausur keinen Hinweis auf das Vorkommen oder Nicht-Vorkommen besagter Themen in der Klausur, der Wiederholungsklausur oder im Drittversuch!

1. (19 Punkte) **Gemischtes**

In den folgenden Aufgaben sind **keine** Begründungen gefordert und werden auch nicht zur Bewertung herangezogen. Gewertet werden ausschließlich die Ergebnisse in den dafür vorgesehenen Kästen. Sollte der Platz in den besagten Kästen nicht ausreichen, so sollten Sie in eindeutiger Weise kennzeichnen, wo Sie die Aufgabe bearbeitet haben.

(a) (2 Punkte) Geben Sie Infimum und Supremum der Menge $M := \{x \in \mathbb{R} : x^{42} + x^2 = 0\}$ an.

$\inf(M) =$	$\sup(M) =$

(b) (2 Punkte) Geben Sie zwei divergente Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an, deren Produkt $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

$a_n =$	$b_n =$

(c) (3 Punkte) Geben Sie den Grenzwert der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-(1+i)^n}{2^n}$ an.

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-(1+i)^n}{2^n} =$

(d) (2 Punkte) Bestimmen Sie $c \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R}\backslash\{-1\} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi x)+x-1}{x^2-1}, & \text{für } x \neq 1, \\ c & \text{für } x = 1, \end{cases}$$

auf ihrem Definitionsbereich stetig ist. $c =$

(e) (3 Punkte) Geben Sie die Ableitung der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arctan\left(\frac{\ln(x)}{x^2+1}\right)$ an.

$f'(x) =$

(f) (2 Punkte) Geben Sie das Ergebnis des Grenzwerts $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x^2+42}$ an.

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x^2+42} = \qquad\qquad}$$

(g) (3 Punkte) Führen Sie bei folgendem Integral die vorgegebene Substitution durch, **ohne** das Integral konkret zu berechnen.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x^2)}{1+(\sin(x))^2} \mathrm{d}x \overset{u=\sin(x)}{=} \int_{\boxed{}}^{\boxed{}} \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad} \mathrm{d}u.$$

(h) (2 Punkte) Geben Sie die Lösung des folgenden Anfangswertproblems an:

$$\dot{x}(t) = t^{2021}\ , \quad x(0) = 1. \quad \boxed{x(t) = \qquad\qquad}$$

2. (11 Punkte) **Komplexe Zahlen und vollständige Induktion**

Die Folge komplexer Zahlen $(z_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei rekursiv definiert durch

$$z_0 = i, \qquad z_1 = 1, \qquad z_{n+2} = -\frac{z_n + i \cdot z_{n+1}}{2}.$$

(a) (4 Punkte) Geben Sie den den Real- und Imaginärteil, sowie den Betrag der komplexen Zahl $z = (z_2 + z_3)^{-1}$ an.

$\mathrm{Re}(z) =$	$\mathrm{Im}(z) =$	$\lvert z\rvert =$

(b) (7 Punkte) Stellen Sie eine Vermutung über die explizite (d.h. nicht rekursiv definierte) Darstellung von $(z_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ auf und beweisen Sie diese mit Hilfe von vollständiger Induktion.

3. (9 Punkte) **Konvergenz von Reihen**

   (a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) := \ln(1 + x) - x$ monoton fallend ist.

   (b) (2 Punkte) Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ die Abschätzung $\ln(n) \leq n - 1$.

   (c) (3 Punkte) Begründen Sie, ob die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)}$ konvergent ist.

   (d) (2 Punkte) Begründen Sie, ob die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$ konvergent ist.

4. (8 Punkte) **Anwendung des Zwischenwertsatzes**

   (a) (2 Punkte) Formulieren Sie den Zwischenwertsatz für eine stetige Funktion $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $a < b$.

   (b) (6 Punkte) Sei nun $f[a, b] \to [a, b]$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass es ein $x^* \in [a, b]$ mit $f(x^*) = x^*$ gibt.
   Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $x \mapsto f(x) - x$ und wenden Sie auf diese den Zwischenwertsatz an.

5. (11 Punkte) **Ableitung der Umkehrfunktion und partielle Integration**

   (a) (4 Punkte) Zeigen Sie unter Zuhilfenahme des Satzes zur Ableitung der Umkehrfunktion, dass für $\arcsin : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ gilt: $(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

   (b) (3 Punkte) Zeigen Sie unter Verwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung, also ohne Einsatz von Integrationstechniken, dass $g : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, $g(x) = -\sqrt{1 - x^4}$ eine Stammfunktion von $f(x) = \frac{2x^3}{\sqrt{1-x^4}}$ ist.

(c) (4 Punkte) Berechnen Sie nun nachvollziehbar den Wert des Integrals $\int\limits_0^1 x \arcsin(x^2) \mathrm{d}x$

6. (7 Punkte) **Konvergenz von Funktionenfolgen**

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei die Funktion $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = e^{x-n}$ gegeben.

(a) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise konvergiert.

(b) (4 Punkte) Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[0, 1]$ sogar gleichmäßig konvergiert.

7. (12 Punkte) **Kurze Fragen**

Im Folgenden sind einige Aussagen gegeben, deren Wahrheitsgehalt Sie überprüfen müssen. Kreuzen Sie jeweils an, ob die Aussage wahr oder falsch ist und geben Sie auch eine Begründung für Ihre Entscheidung an.

Antworten ohne Begründung werden nicht bewertet!

(a) (3 Punkte) Jede in einem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist automatisch auch differenzierbar in diesem Punkt x_0.

□ Wahr □Falsch

Begründung:

(b) (3 Punkte) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolge mit $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sei konvergent, dann konvergiert auch die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{|a_n|}$.

□ Wahr □Falsch

Begründung:

(c) (3 Punkte) Folgendes uneigentliches Integral ist existent:

$$\int_0^1 \frac{e^{-x}}{x} \mathrm{d}x.$$

□ Wahr □Falsch
Begründung:

(d) (3 Punkte) Die allgemeine Lösung $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung $\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + x(t) = 0$ ist gegeben durch $x(t) = \alpha e^{-t}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$.

□ Wahr □Falsch
Begründung:

Platz für Notizen: