Technische Universität München
Wintersemester 2020/2021

Ferienkurs zur Vorlesung
Mathematik für Physiker 1
(Lineare Algebra)
15.03.2021 - 19.03.2021

Felix Schwarzfischer	schwarzfischer.felix@web.de
Korbinian Eschbaum	korbinian.eschbaum@tum.de

Eigenwerte und Eigenvektoren

Eigenwerte und Eigenvektoren

Definition

Sei V ein K-Vektorraum und $f \in \mathrm{End}(V)$.
$v \in V \setminus \{0\}$ heißt **Eigenvektor** zum **Eigenwert** $\lambda \in K$ von f, falls gilt

$$f(v) = \lambda v.$$

$$(f - \lambda \mathrm{id})(v) = 0, \qquad v = (f - \lambda \mathrm{id})^{-1}(0) = 0$$

Definition

Sei $f \in \mathrm{End}(V)$.
$\chi_f(\lambda) := \det(f - \lambda \mathrm{id})$ heißt **das charakteristische Polynom** von f.

Eigenwerte und Eigenvektoren

Definition

- Die Menge der Eigenwerte eines Endomorphismus f heißt **das Spektrum** von f.
- Für jeden Eigenwert λ von f heißt $E_\lambda := \mathrm{Kern}(f - \lambda \mathrm{id})$ der **Eigenraum zum Eigenwert** λ.
- $\dim E_\lambda$ heißt **die geometrische Vielfachheit** von λ.
- Die Vielfachheit eines des Eigenwertes λ als Nullstelle des charakteristischen Polynoms heißt **algebraische Vielfachheit** von λ.

Eigenwerte und Eigenvektoren

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad a \in \mathbb{R}$

Eigenwerte:

$$0 = \chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_2) = \det\left(\begin{pmatrix} a-\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}\right) = \lambda(\lambda - a) \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = a$$

Eigenräume:

$$E_0 = \operatorname{Kern}\left(\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ a \end{pmatrix}\right)$$

$$E_a = \operatorname{Kern}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}\right) = \operatorname{Kern}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

Eigenwerte und Eigenvektoren

Definition

$f \in \mathrm{End}(V)$ heißt **diagonalisierbar**, falls V eine Basis aus Eigenvektoren von f besitzt. Entsprechend heißt $A \in \mathrm{Mat}(n, n, K)$ **diagonalisierbar**, falls es $B \in \mathrm{GL}(n, K)$ gibt, sodass $B^{-1}AB$ Diagonalgestalt hat.

$\{v_1, \ldots, v_n\}$ Basis von V, $Av_k = \lambda_k v_k$

$$A(v_1, \ldots, v_n) = (Av_1, \ldots, Av_n) = (\lambda_1 v_1, \ldots, \lambda_n v_n) = (v_1, \ldots, v_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$AB = BD \qquad \Leftrightarrow \qquad D = B^{-1}AB$$

Eigenwerte und Eigenvektoren

Satz

Sei $A \in \mathrm{Mat}(n, n, K)$ *diagonalisierbar.*
Dann existiert eine Diagonalmatrix D *mit den Eigenwerten von* A *auf der Diagonalen und ein* $B \in \mathrm{GL}(n, K)$*, dessen Spalten aus Eigenvektoren von* A *bestehen, sodass* $D = B^{-1}AB$*.*

Eigenwerte und Eigenvektoren

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Eigenwerte:

$$0 = \det\left(\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}\right) = (\lambda - 2)^2 - 1 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3 \qquad \Rightarrow \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Eigenräume:

$$E_1 = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad E_3 = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \qquad \Rightarrow \qquad B = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1}AB = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = D$$

Euklidische Vektorräume

Euklidische Vektorräume

Definition

Eine Bilinearform $b : V \times V \to \mathbb{R}$ heißt **positiv definit**, falls für alle $v \in V \setminus \{0\}$ $b(v, v) > 0$ gilt.
Eine positiv definite symmetrische Bilinearform heißt **Skalarprodukt**.
Ein Paar aus einem $\mathbb{R}$-Vektorraum und einem Skalarprodukt $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ heißt **euklidischer Raum**.

Definition

Eine Abbildung $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V heißt **Norm**, falls gilt:

1. $\|v\| \geq 0$ für alle $v \in V$ und $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$.
2. Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $v \in V$ gilt: $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$.
3. Für alle $v, w \in V$ gilt die Dreiecksungleichung:

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$$

Euklidische Vektorräume

Beispiele:

- $\langle v, w\rangle = v^T w = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$
- $\langle v, w\rangle = v^T A w = \sum_{i,j=1}^{n} v_i A_{ij} w_j$
- $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$

Euklidische Vektorräume

Satz

Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *ein euklidischer Vektorraum. Dann definiert*

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

eine Norm auf V.

Satz (Cauchy-Schwarz-Ungleichung)

Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *ein euklidischer Vektorraum. Dann gilt für* $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ *und alle* $v, w \in V$

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|.$$

Definition

Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum.
Der **Winkel** zwischen zwei nicht verschwindenden Vektoren $v, w \in V$ ist die (eindeutige) Zahl $\phi \in [0, \pi]$, für welche

$$\cos(\phi) = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|}$$

ist.

Satz

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *ein euklidischer Vektorraum.*
Dann gilt für alle $v, w \in V$

1. $\langle v, w\rangle = \frac{1}{4}(\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2)$ *(Polarisation)*
2. $2(\|v\|^2 + \|w\|^2) = \|v+w\|^2 + \|v-w\|^2$ *(Parallelogrammgleichung)*

Definition

Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum.

- $v_1, \ldots, v_k \in V$ heißen **orthogonal**, falls $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ für alle $i \neq j$ gilt.
- $v_1, \ldots, v_k \in V$ heißen **orthonormal**, falls sie zusätzlich normiert sind, also $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$.

Satz (Gram-Schmidt-Orthonormalisierung)

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *ein euklidischer Vektorraum und seien* $w_1, \dots, w_k \in V$ *linear unabhängig. Dann definiert*

$$\begin{aligned}\tilde{v}_{j+1} =& w_{j+1} - \sum_{i=1}^{j} \langle w_{j+1}, v_i\rangle v_i \\ v_{j+1} =& \frac{1}{\|\tilde{v}_{j+1}\|}\tilde{v}_{j+1}\end{aligned}$$

k *orthonormale Vektoren* $v_1, \dots, v_k$ *mit* $\operatorname{span}(v_1, \dots, v_k) = \operatorname{span}(w_1, \dots, w_k)$.

Definition

Ist $U \subset V$ Untervektorraum eines euklidischen Vektorraumes V und ist $u_1, \ldots, u_k \in U$ eine Orthonormalbasis von U, so heißt die Abbildung

$$\pi_U : V \to U, \qquad v \mapsto \sum_{i=1}^{k} \langle v, u_i \rangle u_i$$

orthogonale Projektion auf U. $U^\perp := \mathrm{Kern}(\pi_U)$ heißt das **orthogonale Komplement** von U.

Beispiel: $w_1 = (1,1,0)^T$, $w_2 = (2,0,0)^T$, $w_3 = (1,2,3)^T$

$$v_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{v}_2 = w_2 - \langle w_2, v_1 \rangle v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \frac{\tilde{v}_2}{\|\tilde{v}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{v}_3 = w_3 - \langle w_3, v_1 \rangle v_1 - \langle w_3, v_2 \rangle v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \frac{\tilde{v}_3}{\|\tilde{v}_3\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Euklidische Vektorräume

Definition

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer Vektorraum und sei $f \in \mathrm{End}(V)$.
Dann existiert genau ein $f^* \in \mathrm{End}(V)$ mit

$$\langle f(v), w\rangle = \langle v, f^*(w)\rangle$$

für alle $v, w \in V$. f^* heißt die **Adjungierte** von f und für eine Orthonormalbasis B von V ist $D_{B,B}(f^*) = D_{B,B}(f)^T$.

Definition

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer Vektorraum.
$f \in \mathrm{End}(V)$ heißt **orthogonal**, falls für alle $v, w \in V$

$$\langle f(v), f(w)\rangle = \langle v, w\rangle$$

gilt.

Satz

Ist $f \in \mathrm{End}(V)$ längentreu, ist also $\|f(v)\| = \|v\|$ für alle $v \in V$, so ist f orthogonal.

Definition

- $O(V)$ bezeichnet die Menge der orthogonalen Endomorphismen auf einem euklidischen Vektorraum V. Es ist eine Untergruppe von $\mathrm{Aut}(V)$ und für $f \in O(V)$ ist $f^* = f^{-1}$.
- $O(n) = \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \mid A^T = A^{-1}\}$ heißt die **orthogonale Gruppe** (der Ordnung n).
- $SO(n) = \{A \in O(n) \mid \det(A) = 1\}$ heißt die **spezielle orthogonale Gruppe**. Es ist eine Untergruppe von $O(n)$.

Unitäre Vektorräume

Unitäre Vektorräume

Definition

- $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ heißt **Sesquilinearform**, falls $\forall v_{1,2}, w_{1,2} \in V$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt

$$\langle v_1 + \lambda v_2, w_1 \rangle = \langle v_1, w_1 \rangle + \lambda \langle v_2, w_1 \rangle$$
$$\langle v_1, w_1 + \lambda w_2 \rangle = \langle v_1, w_1 \rangle + \overline{\lambda} \langle v_1, w_2 \rangle$$

- Eine Sesquilinearform heißt **hermitesche Form**, falls $\forall v, w \in V$

$$\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$$

gilt.
- Eine hermitesche Form heißt **hermitesches** oder **komplexes Skalarprodukt**, falls sie positiv definit ist (d.h. $\forall v \in V \setminus \{0\} : \langle v, v \rangle > 0$).
- Ein $\mathbb{C}$-Vektorraum mit einem hermiteschen Skalarprodukt heißt **unitärer Vektorraum**.

Unitäre Vektorräume

Beispiel: $v = (1, 2\mathrm{i})^T \in \mathbb{C}^2$
Euklidische Definition:

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2\mathrm{i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2\mathrm{i} \end{pmatrix} \right\rangle = 1 \cdot 1 + (2\mathrm{i}) \cdot (2\mathrm{i}) = 1 - 4 = -3 < 0$$

Unitäre Definition:

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2\mathrm{i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2\mathrm{i} \end{pmatrix} \right\rangle = 1 \cdot 1 + (-2\mathrm{i}) \cdot (2\mathrm{i}) = 1 + 4 = 5 > 0$$

Hier spielt also die Reihenfolge der Argumente des Skalarproduktes eine Rolle, daher gilt in endlich-dimensionalen Vektorräumen V mit Orthonormalbasis $\{v_1, \dots, v_n\}$

$$u = \sum_{i=1}^{n} \langle u, v_i \rangle v_i, \qquad \text{aber im Allgemeinen} \qquad u \neq \sum_{i=1}^{n} \langle v_i, u \rangle v_i.$$

Unitäre Vektorräume

Definition

$f \in \mathrm{End}(V)$ heißt **unitärer Endomorphismus**, falls $\langle f(v), f(w)\rangle = \langle v, w\rangle$ für alle $v, w \in V$.

Satz

Sei $f \in \mathrm{End}(V)$ *mit Darstellungsmatrix* A*. Dann sind äquivalent*

- f *ist unitär.*
- f *ist längentreu.*
- $f^* \circ f = f \circ f^* = \mathrm{id}$.
- $A^*A = AA^* = E$.
- *Die Zeilen und Spalten von* A *bilden jeweils eine Orthonormalbasis von* $\mathbb{C}^n$.

Unitäre Vektorräume

Definition

- $U(n) = \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \mid A^{-1} = A^*\}$ heißt die **unitäre Gruppe**.
- $SU(n) = \{A \in U(n) \mid \det(A) = 1\}$ heißt die **spezielle unitäre Gruppe**.

Definition

Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein unitärer oder euklidischer Vektorraum. $f \in \mathrm{End}(V)$ heißt **selbstadjungiert**, falls $f = f^*$.

Satz

Ist $f \in \mathrm{End}(V)$ selbstadjungiert und V endlich-dimensional, so ist f diagonalisierbar mit einer Orthonormalbasis aus Eigenvektoren.