Technische Universität München
Wintersemester 2020/2021

Ferienkurs zur Vorlesung Mathematik für Physiker 1 (Lineare Algebra)

15.03.2021 - 19.03.2021

Felix Schwarzfischer schwarzfischer.felix@web.de
Korbinian Eschbaum korbinian.eschbaum@tum.de

Lineare Gleichungssysteme (LGS)

Lineare Gleichungssysteme (LGS)

Definition

Seien V, W Vektorräume über einem Körper K.

- Eine Gleichung der Form
$$f(x) = b$$
mit einer linearen Abbildung $f : V \to W$ und $b \in W$ heißt **lineare Gleichung**.
- Ein **lineares Gleichungssystem** in n Variablen $x_1, \dots, x_n$ sind $m \geq 1$ Gleichungen der Form
$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i = b_j, \qquad a_{ji}, b_j \in K, \quad j \in \{1, \dots, m\}.$$
- Eine lineare Gleichung $f(x) = b$ heißt **homogen**, falls $b = 0$ ist, sonst **inhomogen**.

Lineare Gleichungssysteme (LGS)

Anmerkung

Ein lineares Gleichungssystem kann man auch in Matrixform schreiben.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \qquad Ax = b, \qquad f_A : K^n \to K^m$$

Lineare Gleichungssysteme (LGS)

Satz

Sei $f : V \to W$ *linear.*

1. *Die Lösungsmenge* L *der homogenen linearen Gleichung* $f(x) = 0$ *ist der Vektorraum* $L = \mathrm{Kern}(f) = f^{-1}(\{0\})$.
   Ist V *endlichdimensional, so auch* L *und* $\dim(L) = \dim(V) - \mathrm{Rang}(f)$. *Insbesondere ist 0 immer eine Lösung.*
2. *Für die Lösungsmenge* L *einer inhomogenen linearen Gleichung gilt:*
   Ist $v \in L$*, so ist* L *die Nebenklasse* $L = v + \mathrm{Kern}(f) = \{v + u \mid u \in \mathrm{Kern}(f)\}$. *Man beachte aber, dass* $L = \emptyset$ *möglich ist.*

Lineare Gleichungssysteme (LGS)

Satz (Gaußalgorithmus)

Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem

$$(Ax)_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i = b_j$$

Beginne mit $k = 1$.

1. *Suche kleinstes* i_k, *sodass* $a_{ji_k} \neq 0$ *für ein* $j \geq k$.
2. *Ist* $a_{ki_k} = 0$ *vertausche die Gleichungen mit Index* $\geq k$, *sodass* $a_{ki_k} \neq 0$ *ist.*
3. *Ziehe das* a_{li_k}/a_{ki_k}*-fache der* k*-ten Gleichung von der* l*-ten Gleichung ab.*
4. *Fahre fort mit dem nächsten* k, *bis* $k = m$ *ist.*

Das System befindet sich nun in Zeilenstufenform.

Lineare Gleichungssysteme (LGS)

Definition

Ein lineares Gleichungssystem ist in **Zeilenstufenform**, falls gilt:
Die Variable mit kleinstem Index in einer Zeile kommt in den folgenden Zeilen nicht vor.

$$
\begin{aligned}
a_{1i_1}x_{i_1} + \cdots + a_{1i_2}x_2 + \cdots + a_{1i_r}x_{i_r} + \cdots &= b_1 \\
a_{2i_2}x_2 + \cdots + a_{2i_r}x_{i_r} + \cdots &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{ri_r}x_{i_r} + \cdots &= b_r \\
0 \qquad &= b_{r+1} \\
&\vdots \\
0 \qquad &= b_m
\end{aligned}
$$

Lineare Gleichungssysteme (LGS)

Satz (Lösbarkeit von LGS)

1. $r < m$ *und* $b_{i>m} \neq 0$*: Das System ist nicht lösbar.*
2. $b_{i>m} = 0$ *oder* $r = m$, $r = n$*: Es gibt genau eine Lösung* x.
3. $b_{i>m} = 0$ *oder* $r = m$, $r < n$*: Es gibt unendlich viele Lösungen.*

Anmerkung

Im Fall 3 finden sich alle Lösungen über:

1. Setze alle freien Parameter $x_{i>i_r} = 0$. Dies liefert eine **Partikularlösung**.
2. Wähle alle freien Parameter 0 bis auf einen und löse das zugehörige homogene System $Ax = 0$. Dies liefert den Kern von A.
3. Schreibe die Lösung als Summe der Partikularlösung und dem Kern.

Lineare Gleichungssysteme (LGS)

Definition

r bezeichnet den **Rang** der zu dem LGS gehörigen linearen Abbildung/Matrix.

Anmerkung

- Der Gaußalgorithmus entspricht direkten Basiswechseloperationen.
- Es gilt Spaltenrang = Zeilenrang.
- Eine quadratische Matrix ist genau dann invertierbar, wenn sie vollen Rang hat.
- Der Rang gibt die Dimension des Untervektorraumes an, den die Spalten/Zeilen der Matrix aufspannen.

Lineare Gleichungssysteme (LGS)

Beispiel: $Ax = b$ mit $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 4 & 11 & -27 \\ -2 & -1 & -12 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 20 \\ 1 \\ -50 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -6 & 20 \\ 4 & 11 & -27 & 1 \\ -2 & -1 & -12 & -50 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -6 & 20 \\ 0 & 3 & -15 & -39 \\ 0 & 3 & -18 & -30 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -6 & 20 \\ 0 & 3 & -15 & -39 \\ 0 & 0 & -3 & 9 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 10 \\ 0 & 1 & -5 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -28 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 57 \\ 0 & 1 & 0 & -28 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad L = \{(57, -28, -3)^T\}$$

Multilineare Abbildungen und Determinanten

Multilineare Abbildungen und Determinanten

Definition

- Eine Abbildung $f : V_1 \times \cdots \times V_k \to W$ heißt **multilinear**, falls sie linear in allen Argumenten ist.
- Ist $V_1 = \ldots = V_k = V$ und $W = K$, so heißt f auch **k-Linearform** oder **Multilinearform** (**Bilinearform** für $k = 2$).
- Eine k-Linearform heißt **symmetrisch**, falls

$$f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_k) = f(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_k) \qquad \forall i, j$$

- Eine k-Linearform heißt **alternierend**, falls sie 0 ist, wenn immer zwei Argumente gleich sind. In diesem Fall gilt

$$f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_k) = -f(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_k) \qquad \forall i \neq j$$

Multilineare Abbildungen und Determinanten

Satz

Sei f eine alternierende k-Linearform auf V.

1. *Sind $v_1, \dots, v_k$ linear abhängig, so ist $f(v_1, \dots, v_k) = 0$.*
2. *Sind $v_1, \dots, v_k$ linear unabhängig und ist $\dim(V) = k$, so ist f durch $f(v_1, \dots, v_k)$ eindeutig bestimmt.*

Satz

Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum.
Dann existiert auf V eine nicht-triviale alternierende n-Linearform.

Multilineare Abbildungen und Determinanten

Definition

Eine nicht-triviale alternierende n-Linearform auf einem n-dimensionalen Vektorraum heißt **Determinantenform**. Zwei solche unterscheiden sich nur um einen nicht verschwindenden Faktor. Auf K^n ist mit der kanonischen Basis $e_1, \ldots, e_n$ eine kanonische Determinantenform gegeben:

$$\delta : (K^n)^n \to K, \qquad \delta(e_1, \ldots, e_n) = 1$$

Definition

- Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum, $f \in \mathrm{End}(V)$ und ω eine Determinantenform auf V. Die Determinante $\det(f)$ ist gegeben durch

$$(\det(f))\omega(v_1, \ldots, v_n) = \omega(f(v_1), \ldots, f(v_n))$$

- Sei $A \in \mathrm{Mat}(n, n, K)$. Die Determinante $\det(A)$ ist definiert als die Determinante des durch A induzierten Endomorphismus

$$f_A : K^n \to K^n, \qquad v \mapsto Av.$$

Multilineare Abbildungen und Determinanten

Satz (Determinantenmultiplikationssatz)

- *Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und seien $f, g \in \mathrm{End}(V)$. Dann ist*

$$\det(f \circ g) = \det(f) \cdot \det(g).$$

- *Für $A, B \in \mathrm{Mat}(n, n, K)$ ist $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.*

$$1 = \det(E_n) = \det\left(A^{-1}A\right) = \det\left(A^{-1}\right)\det(A) \qquad \Rightarrow \qquad \det\left(A^{-1}\right) = \det(A)^{-1}$$

Anmerkung

Falls $f \in \mathrm{End}(V)$ invertierbar ist, muss $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ eine Basis von V sein. Nur dann ist f bijektiv. Dann ist $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ linear unabhängig und somit $\det(f) \neq 0$.

Definition

Die **spezielle lineare Gruppe** $SL(n,K)$ ist die Untergruppe von $GL(n,K)$ der Matrizen mit Determinante 1:

$$SL(n,K) = \{A \in GL(n,K) \mid \det(A) = 1\}$$

Multilineare Abbildungen und Determinanten

Satz (Leibniz-Formel)

Sei $A \in \mathrm{Mat}(n,n,K)$*,* $A = (a_{ij})$*,* S_n *die Gruppe der Permutationen von* n *Elementen. Dann ist*

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)i} = \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n} \mathrm{sign}(\sigma).$$

Satz (Laplace-Entwicklung)

Sei $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(n,n,K)$*. Sei* $j \in \{1, \dots, n\}$ *fest gewählt und bezeichne* A_{ij} *die Matrix, die aus* A *durch Streichen der* i*-ten Zeile und* j*-ten Spalte entsteht. Dann gilt*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) \qquad \textit{bzw.} \qquad \det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ji} \det(A_{ji})$$

Multilineare Abbildungen und Determinanten

Korollar

Ist eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(n, n, K)$ *in Zeilenstufenform, so ist*

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Satz

Für $A \in \mathrm{Mat}(2, 2, K)$ *ist*

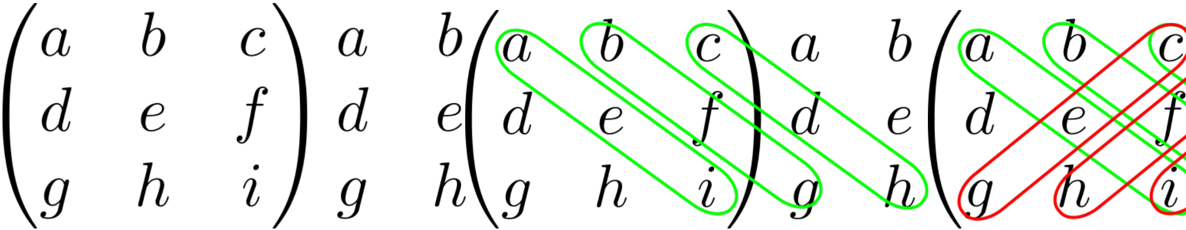
$$\det(A) = \det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = ad - bc$$

Multilineare Abbildungen und Determinanten

Satz (Sarrus-Regel)

Für $A \in \mathrm{Mat}(3,3,K)$ *ist*

$$\det(A) = \det\left(\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\right) = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$$



Zusammenfassung Determinantenberechnung

- $\det(E) = 1$.
- Die Determinante ist linear in jeder Zeile/Spalte.
- Durch Vertauschen zweier Zeilen/Spalten ändert die Determinante ihr Vorzeichen.
- $\det(A) = 0$, falls Zeilen/Spalten von A linear abhängig sind.
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ und $\det\left(A^{-1}\right) = \det(A)^{-1}$.
- $\det\left(A^T\right) = \det(A)$.
- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.
- Die Determinante ist invariant unter Addition Vielfacher von Zeilen/Spalten zueinander.
- Die Determinante einer Matrix in Zeilenstufenform ist das Produkt der Diagonalelemente.

Multilineare Abbildungen und Determinanten

Satz

Sei $A \in \mathrm{Mat}(n, n, K)$ *und* $x \in K^n$ *unbekannt.*
Das lineare Gleichungssystem $Ax = 0$ *kann genau dann nicht-triviale Lösungen* $x \neq 0$ *besitzen, falls* $\det(A) = 0$.

Wäre nämlich $\det(A) \neq 0$, dann wäre A invertierbar und wir bekommen

$$Ax = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad A^{-1}Ax = A^{-1}0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 0$$

Anmerkung

Seien $x_1, \ldots, x_n \in K^n$.
Die Determinante der Matrix $A = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{Mat}(n, n, K)$, deren Spalten aus den Vektoren x_i bestehen, entspricht dem orientierten Volumen des durch $x_1, \ldots, x_n$ aufgespannten Parallelepipeds.

Multilineare Abbildungen und Determinanten

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 4 & 11 & -27 \\ -2 & -1 & -12 \end{pmatrix}$

$$\det(A) = \det\left(\begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 4 & 11 & -27 \\ -2 & -1 & -12 \end{pmatrix}\right) = \det\left(\begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 0 & 3 & -15 \\ 0 & 3 & -18 \end{pmatrix}\right) = \det\left(\begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 0 & 3 & -15 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}\right)$$

$$= 2 \cdot 3 \cdot (-3) = -18$$