Technische Universität München
Wintersemester 2020/2021

Ferienkurs zur Vorlesung Mathematik für Physiker 1 (Lineare Algebra)

15.03.2021 - 19.03.2021

Felix Schwarzfischer	schwarzfischer.felix@web.de
Korbinian Eschbaum	korbinian.eschbaum@tum.de

1 Matrizen und Vektoren

2 Lineare Abbildungen

3 Dualräume

Matrizen und Vektoren

Matrizen und Vektoren

In diesem Kapitel steht K stets für einen Körper, also z.B. $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

Definition (Matrix)

Eine $m \times n$ Matrix ist eine rechteckige Anordnung von Elementen aus K auf m Zeilen und n Spalten der Form

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} = (a_{i,j}).$$

Matrizen und Vektoren

Definition (Besondere Matrizen)

Eine Matrix $A \in K^{m \times n}$ heißt...

- Zeilenvektor, falls $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_m \end{pmatrix} \in K^{1 \times n}$.
- Spaltenvektor, falls $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \in K^{m \times 1}$.
- Zahl (Skalar), falls $A = (a) = a \in K^{1 \times 1}$.
- quadratisch, falls $n = m$.

Diese Definitionen sind lediglich **Namensgebungen** für spezielle Werte von m und n.

Definition (Besondere Matrizen)

- Nullmatrix, falls $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} =: \mathbf{0}$.
- Einheitsmatrix, falls $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} =: I_n \in K^{n \times n}$.

Auch hier werden lediglich Namen vergeben. Diesmal jedoch für Werte bestimmer Einträge in A.

Matrizen und Vektoren

Definition (Transponierte Matrix)

Für $A = (a_{i,j}) \in K^{m \times n}$ ist $A^T := (a_{j,i}) \in K^{n \times m}$ die transponierte Matrix zu A. Es werden Zeilen und Spalten der Matrix vertauscht.

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 12 & 11 & 10 \\ 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 12 & 9 & 6 & 3 \\ 11 & 8 & 5 & 2 \\ 10 & 7 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Definition (Symmetrische Matrix)

Eine quadratische Matrix heißt symmetrisch, falls $A^T = A$ gilt.

Wir definieren folgende Matrixoperationen:

Definition (Addition)

Seien $A = (a_{i,j}) \in K^{m \times n}$ und $B = (b_{i,j}) \in K^{m \times n}$, also zwei Matrizen mit **derselben Anzahl an Zeilen** m **und Spalten** n. Dann ist:

$$A + B = (c_{i,j}) \quad \text{mit} \quad c_{i,j} := a_{i,j} + b_{i,j}.$$

Matrizen werden demnach komponentenweise addiert.

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 7 \\ 7 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+9 & 2-2 \\ 4-2 & 5+7 \\ 7+7 & 8-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 2 & 12 \\ 14 & 5 \end{pmatrix}$$

Hingegen ist z.B. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & -2 & 2 \\ -2 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ nicht definiert.

Definition (Skalare Multiplikation)

Sei $\lambda \in K$ und $A = (a_{i,j}) \in K^{m \times n}$. Dann gilt:

$$\lambda \cdot (a_{i,j}) = (\lambda a_{i,j})$$

Jede einzelne Komponente von A wird mit dem Skalar multipliziert.

Beispiel

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 4 & 2 \cdot 5 \\ 2 \cdot 7 & 2 \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 10 \\ 14 & 16 \end{pmatrix}$$

Definition (Matrixmultiplikation)

Seien $A = (a_{i,j}) \in K^{m \times n}$ und $B = (b_{i,j}) \in K^{n \times l}$, also zwei Matrizen, wobei **die Spaltenzahl der ersten Matrix gleich der Zeilenzahl der zweiten Matrix ist**. Dann ist: $A \cdot B = (c_{i,j})$ mit

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$$

Merkregel: „Zeile mal Spalte“.

Anmerkung

Für quadratische Matrizen definiert man zusätzlich: $A^2 := A \cdot A$.

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -2 & 2 \\ -2 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 9 + 2 \cdot (-2) & 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 7 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \\ 4 \cdot 9 + 5 \cdot (-2) & 4 \cdot (-2) + 5 \cdot 7 & 4 \cdot 2 + 5 \cdot 1 \\ 7 \cdot 9 + 8 \cdot (-2) & 7 \cdot (-2) + 8 \cdot 7 & 7 \cdot 2 + 8 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 4 \\ 26 & 27 & 13 \\ 47 & 42 & 22 \end{pmatrix}$$

Hingegen ist z.B. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 7 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$ nicht definiert.

Matrizen und Vektoren

Satz (Addition von Matrizen)

Für $A, B, C \in K^{m \times n}$ *gilt:*

1. $(A + B) + C = A + (B + C)$
2. $A + B = B + A$
3. $A + \boldsymbol{0} = A$
4. $-A + A = \boldsymbol{0}$

Satz (Multiplikation von Matrizen mit einem Skalar)

Für $A, B \in K^{m \times n}$ *und* $s, s' \in K$ *gilt:*

1. $s \cdot (A + B) = s \cdot A + s \cdot B$
2. $(s + s') \cdot A = s \cdot A + s' \cdot A$
3. $s \cdot (s' \cdot A) = (ss') \cdot A$
4. $1 \cdot A = A$

Satz (Multiplikation von Matrizen)

Seien A, B, C Matrizen, so dass folgende Summen und Produkte gebildet werden können. Dann gilt:

1. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
2. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
3. $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
4. $I_n \cdot A = A \cdot I_n = A$

Definition (Kommutativität)

Gilt für zwei Matrizen A und B die Gleichheit $A \cdot B = B \cdot A$, so kommutieren A und B.

Anmerkung

Im Allgemeinen gilt die Formel $A \cdot B = B \cdot A$ **nicht**!

Definition

Sei V Vektorraum mit $B = \{v_1, ...v_n\}$ Basis. Für einen Vektor $w \in V$ ist der Koordinatenvektor bzgl. B definiert als

$$w_B := \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ ... \\ a_n \end{pmatrix} \in K^n \text{ if } w = \sum_i a_i v_i$$

Das Koordinatensystem ist dann die isomorphe Abbildung, die jedem Vektor aus V seinen Koordinatenvektor zuweist. Wichtig, da rechnerisch wir nur mit Koordinatenvektoren arbeiten können.

Matrizen und Vektoren

Definition

Sei $\phi : V \to W$ lin. Abb. mit endlich dimensionalen Vektorraum V, mit einer Basis $B = \{v_1, \dots v_n\}$. Sei C Basis für endl. dim. Vektorraum W. Dann ist die Darstellungsmatrix für ϕ (von B nach C) definiert als

$$D_{C,B}(\phi) = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \phi(v_1)_C & \phi(v_2)_C & \dots & \phi(v_n)_C \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

wobei $\phi(v_i)_C$ den Koordinatenvektor von $\phi(v_i)$ in der Basis C darstellt.

Definition

Wenn $\phi =$id handelt es sich bei den Darstellungsmatrizen um Basiswechselmatrizen.

Matrizen und Vektoren

Satz

Für Darstellungsmatrizen gilt vor allem mit $\phi : V \to W$, $\psi : W \to Z$, mit jeweils Basen B, C, F:

$$D_{F,C}(\psi) \cdot D_{C,B}(\phi) = D_{F,B}(\psi \circ \phi)$$

Anmerkung

Für Basiswechselmatrizen gilt damit

$$S_{B,C} \cdot S_{C,B} = S_{B,B} = I_n$$

$$S_{B,C} = S_{C,B}^{-1}$$

Sehr praktisch, wenn einer der Basen die Standardbasis ist, da $S_{E,B}$ (meistens) durch Ablesen bestimmbar ist.

Matrizen und Vektoren

Anmerkung

Hat man also eine lin. Abb. die in einer Basis unhantlich ist, und man weiß, dass nach einem Perspektivenwechsel (Basiswechsel) das Problem leichter zu lösen ist, dann transformiert die Darstellungsmatrix von ϕ als

$$D_{C,C}(\phi) = S_{E,C}^{-1} \cdot D_{E,E}(\phi) \cdot S_{E,C}$$

wenn von der Standardbasis E zur (geeigneteren) Basis C transformiert wird.

Zusammenfassung

- Definition Matrix
- Definition von besonderen Matrizen
- Addition, Multiplikation von Matrizen
- Rechenregeln, Kommutativität

Gibt es noch Fragen zu diesem Kapitel?

Lineare Abbildungen

Lineare Abbildungen

Definition (Homomorphismus / Lineare Abbildung)

Eine Abbildung $\phi : V \to W$ heißt Vektorraumhomomorphismus bzw. lineare Abbildung, falls gelten:

1. Für alle $v, v' \in V$: $\phi(v + v') = \phi(v) + \phi(v')$.
2. Für alle $v \in V$ und $a \in K$: $\phi(a \cdot v) = a \cdot \phi(v)$.

Man beachte, dass die Operationen stets im passenden Vektorraum zu lesen sind.

Lineare Abbildungen

Anmerkung

Wir sammeln hier eine wichtige Auflistungen an Beobachtungen.

1. Eine lineare Abbildung bildet den Nullvektor von V stets auf den Nullvektor von W ab.
2. Die Verknüpfung von linearen Abbildungen ist wieder eine lineare Abbildung.
3. Achtung: Ausgangs- und Zielvektorraum müssen den gleichen Grundkörper K haben.
4. Sei $A \in K^{m \times n}$. Dann ist
$$\phi_A : K^n \to K^m, v \mapsto A \cdot v$$
eine lineare Abbildung. Dies ist einer der wichtigsten Typen von linearen Abbildungen. **Notation:** Die Bezeichnung ϕ_A werden wir in Zukunft weiter benutzen. Sie stellt die Abbildung dar, die von der Matrix A induziert, d.h. hervorgerufen wird. Weiterhin gilt: $\phi_{A \cdot B} = \phi_A \circ \phi_B$.

Lineare Abbildungen

Definition (Kern und Bild)

Sei $\phi : V \to W$ linear.

1. Der Kern von ϕ ist die Menge: $\ker(\phi) := \{v \in V \mid \phi(v) = 0\} \subseteq V$.
   In Worten: Der Kern ist die Menge aller Elemente in V, die von ϕ auf die 0 in W abgebildet werden.
2. Das Bild von ϕ ist die Menge: $\operatorname{im}(\phi) := \phi(V) = \{\phi(v) \mid v \in V\} \subseteq W$.
   In Worten: Das Bild ist die Menge, die man erhält, wenn man alle Elemente in V mit ϕ nach W abbildet.

Satz (Eigenschaften von Kern und Bild)

Es sei $\phi : V \to W$ eine lineare Abbildung.

1. $\ker(\phi) \subseteq V$ *ist ein Unterraum von V, also des Ausgangsvektorraumes, und enthält insbesondere 0_V.*
2. $\operatorname{im}(\phi) \subseteq W$ *ist ein Unterraum von W, also des Zielvektorraumes, und enthält insbesondere 0_W.*
3. ϕ *ist injektiv* $\quad \Leftrightarrow \quad \ker(\phi) = \{0\}$ *(man sagt ,der Kern ist trivial').*

Beispiel

1. Sei $A \in K^{m \times n}$. Dann ist $\ker(\phi_A)$ die Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems $Ax = 0$. Also sind äquivalent:
$$\phi_A \text{ ist injektiv} \quad \Leftrightarrow \quad \ker(\phi_A) = \{0\} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{rang}(A) = n.$$
Das Bild von ϕ_A: $\operatorname{im}(\phi_A) = \{\phi_A(v) \mid v \in K^n\} = \{Av \mid v \in K^n\} = \langle a_1, ..., a_n \rangle$, wobei $a_1, ..., a_n$ die Spalten von A sind.
2. Sei $V = \mathbb{R}[x]$ und betrachte die Ableitung $\phi : V \to V, f \mapsto f'$. $\ker(\phi)$ ist die Menge aller konstanten Polynome, somit ist ϕ nicht injektiv. Weiterhin gilt $\operatorname{im}(\phi) = V$.

Lineare Abbildungen

Definition

Eine lineare Abbildung $\phi : V \to W$ heißt Isomorphismus, falls ϕ bijektiv ist. Dann ist auch die Umkehrabbildung $\phi^{-1} : W \to V$ ein Isomorphismus.
V und W heißen isomorphe Vektorräume, falls es einen Isomorphismus von V nach W gibt.
Notation: $V \cong W$.

Satz

Sei $n = \dim(V) < \infty$. *Dann ist* $V \cong K^n$.

Lineare Abbildungen

Satz (Dimensionssatz)

Sei $\phi : V \to W$ *linear. Dann gilt der Dimensionssatz:*

$$\dim(V) = \dim\left(\ker(\phi)\right) + \dim\left(\operatorname{im}(\phi)\right).$$

In Worten: Die Dimension des Ausgangsraumes ist die Summe aus der Dimension des Kerns (der im Ausgangsraum lebt) und der Dimension des Bildes (das im Zielraum lebt).

Korollar (Zeilenrang gleich Spaltenrang)

Der Rang einer Matrix $A \in K^{m \times n}$ *ist die Dimension des von den Spalten aufgespannten Unterraums von* K^m*.*
Weiterhin gilt: Spaltenraum und Zeilenraum haben beide Dimension $\operatorname{rang}(A)$*.*

$$\boxed{\text{„Zeilenrang“} = \text{„Spaltenrang“}}$$

Korollar

Es sei $\dim(V) = \dim(W) < \infty$*, und* $\phi : V \to W$ *sei eine lineare Abbildung. Dann sind äquivalent:*

1. ϕ *ist ein Isomorphismus.*
2. ϕ *ist injektiv.*
3. ϕ *ist surjektiv.*

Insbesondere für $A \in K^{n\times n}$*:* ϕ_A *Isomorphismus* $\quad\Leftrightarrow\quad \operatorname{rang}(A) = n$

Lineare Abbildungen

Definition (Invertierbarkeit)

Eine quadratische Matrix $A \in K^{n \times n}$ heißt invertierbar, falls es $B \in K^{n \times n}$ gibt mit $A \cdot B = I_n$.
B ist dann eindeutig bestimmt, und es gilt auch $B \cdot A = I_n$. B heißt die Inverse von A und wird als $B = A^{-1}$ geschrieben.
Es gilt: $A \in K^{n \times n}$ ist invertierbar $\quad \Leftrightarrow \quad$ A ist regulär.

Anmerkung

Um die Inverse einer Matrix $A \in K^{n \times n}$ explizit zu berechnen, lösen wir folgenden linearen Gleichungssysteme: $Ax_i = e_i$, wobei e_i der i-te Einheitsvektor ist. Dadurch erhalten wir die i-te Spalte von A^{-1} mit x_i.
Analog können wir die rechten Seiten zusammensetzen und erhalten das matrixwertige LGS $AX = I$, welches wie gewohnt mit dem Gauß-Algorithmus gelöst wird.

Satz (Lineare Fortsetzung)

Es sei $B = \{v_1, ..., v_n\}$ *eine Basis von* V. *Eine lineare Abbildung* $\phi : V \to W$ *ist durch die Bilder der Basisvektoren* v_i *eindeutig bestimmt.*
Mit anderen Worten: Ist $\psi : V \to W$ *eine weitere lineare Abbildung mit* $\phi(v_i) = \psi(v_i)$ *für alle* i, *so folgt* $\phi = \psi$.
Man kann lineare Abbildungen also eindeutig durch die Bilder der Basisvektoren definieren. Dies wird das Prinzip der linearen Fortsetzung genannt.

Zusammenfassung

- Definition Lineare Abbildung
- Kern und Bild
- Isomorphismus
- Dimensionssatz
- Invertierbarkeit
- Lineare Fortsetzung

Gibt es noch Fragen zu diesem Kapitel?

Dualräume

Dualräume

Definition (Linearform, Dualraum)

Es sei V ein K-VR. Eine Linearform (auf V) ist eine lineare Abbildung $V \to K$. Der Raum

$$V^* := \mathrm{Hom}(V, K) = \{\varphi : V \to K \text{ linear}\}$$

aller Linearformen heißt Dualraum von V.

Beispiel (Standardbeispiele)

1. Sei $V = K^n$ mit der Standardbasis. Eine Linearform ist eine Abbildung $\phi : K^n \to K$ und besitzt eine Darstellungsmatrix aus $K^{1\times n}$. Demnach liefert jeder Zeilenvektor eine Linearform! In diesem Fall gilt also

$$V^* = K^{1\times n} = \{\text{Menge aller Zeilenvektoren.}\}$$

2. Sei $V = C([0,1],\mathbb{R})$, $f \in V$ beliebig und $w \in V$ fest. Dann ist

$$\varphi : V \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \int_0^1 f(x)w(x)\,\mathrm{d}x\,, \qquad V^* = \{w \in V\} = V.$$

Dualräume

Definition

Sei V ein K-Vektorraum und $B = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis. Sei ferner $x = \sum_i \lambda_i v_i \in V$. Wir nennen λ den Koordinatenvektor von x bezüglich B. Die Abbildung

$$v_i^* : V \to K, \qquad v \mapsto \lambda_i$$

ist eine Linearform mit $v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$.

Satz

$B^* = (v_1^*, \dots, v_n^*)$ ist eine Basis von V^* und heißt die zu B duale Basis.

Korollar

Ist $\dim(V) < \infty$, dann ist $\dim(V^*) = \dim(V)$.

Dualräume

Anmerkung

Sei $M^{n\times n}$ die Matrix, deren Spalten aus der Basis $B = (v_1, \dots, v_n)$ bestehen. Dann ist die duale Basis gegeben über die Zeilen von M^{-1}.

Beispiel

1. Sei $V = \mathbb{R}^n$ und $B = (e_i)_i$ die Standardbasis. Dann ist die duale Basis gegeben über $e_i^* = e_i^T$.
2. Sei $V = \mathbb{R}^2$ mit $v_1 = (1,1)^T$ und $v_2 = (1,2)^T$. Dann ist die duale Basis gegeben über $v_1^* = (2,-1)$ und $v_2^* = (-1,1)$.

Dualräume

Definition

Sei V ein K-VR und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Dann heißt

$$U^0 = \{\varphi \in V^* \mid \varphi(u) = 0 \quad \forall u \in U\} \subseteq V$$

der Annulator von U.

Satz

Sei $(u_1, \ldots, u_d)$ eine Basis von U. Sei $(u_1, \ldots, u_d, v_1, \ldots, v_r)$ eine Basis von V und $(u_1^*, \ldots, v_r^*)$ die duale Basis von V^*. Dann ist $(v_1^*, \ldots, v_r^*)$ eine Basis von U^0 und

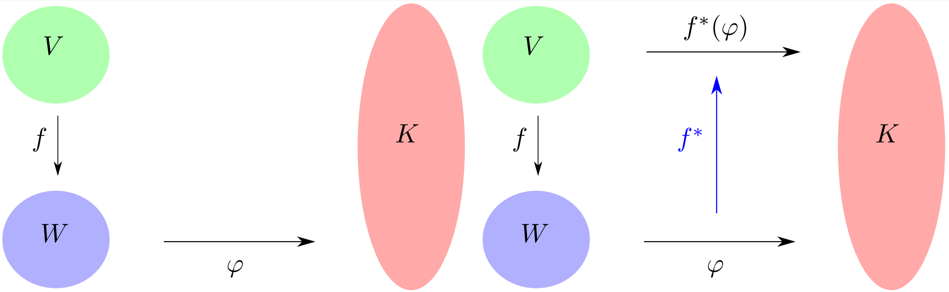
$$\dim(U^0) + \dim(U) = \dim(V)$$

Dualräume

Definition

Seien V, W zwei K-Vektorräume und $f : V \to W$ linear. Dann ist die duale Abbildung definiert über

$$f^* : W^* \to V^*, \quad \varphi \mapsto f^*(\varphi) = \varphi \circ f$$



Dualräume

Satz

Seien U, V, W K-Vektorräume, A, B Basen von V, C eine Basis von W und $g : U \to V$ und $f : V \to W$ linear. Dann gilt

1. $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$
2. $M_{A^*C^*}(f^*) = M_{CA}(f)^T$
3. $S_{B^*A^*} = (S_{AB})^T$
4. $\varphi_{B^*} = (S_{AB})^T \varphi_{A^*} = (S_{BA}^{-1})^T \varphi_{A^*}$ *für* $\varphi \in V$

Satz

Sei V ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Skalarprodukt. Dann ist die Abbildung

$$\Psi : V \to V^*, \quad v \mapsto \langle v, \cdot \rangle$$

ein Isomorphismus von $\mathbb{R}$-Vektorräumen.

Dualräume

Zusammenfassung

- Dualraum und duale Vektoren
- Duale Basis
- Duale Abbildung
- Basiswechsel im Dualraum

Gibt es noch Fragen zu diesem Kapitel?