Technische Universität München
Wintersemester 2020/2021

Ferienkurs zur Vorlesung Mathematik für Physiker 1 (Lineare Algebra)

15.03.2021 - 19.03.2021

Felix Schwarzfischer schwarzfischer.felix@web.de
Korbinian Eschbaum korbinian.eschbaum@tum.de

1. Gruppen
2. Vektorräume
3. Linearkombinationen
4. Basen

Gruppen

Gruppen

Definition (Gruppe)

Eine Gruppe ist eine Menge G zusammen mit einer Abbildung $\cdot : G \times G \to G, (a, b) \mapsto a \cdot b = ab$, sodass die folgende Gruppenaxiome erfüllt sind:

(G1) $\forall a, b, c \in G : (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (Assoziativität)

(G2) $\exists e \in G : \forall a \in G a \cdot e = e \cdot a = a$ (Neutrales Element)

(G3) $\forall a \in G : \exists a' \in G : a' \cdot a = a \cdot a' = e$ (Inverses Element)

Eine Gruppe G heißt abelsch oder kommutativ, falls außerdem gilt:

(G4) $\forall a, b \in G : a \cdot b = b \cdot a$

Anmerkung

Das neutrale sowie inverse Elemente einer Gruppe sind eindeutig.

Gruppen

Beispiel

Standardbeispiele

1. $(\mathbb{N}, +)$ ist keine Gruppe, da (G2) verletzt ist. Es gibt kein neutrales Element.
2. $(\mathbb{N}_0, +)$ ist keine Gruppe, da (G3) verletzt ist. Kein Element außer der 0 hat ein Inverses.
3. $(\mathbb{Z}, +)$ ist eine abelsche Gruppe, ebenso $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ und $(\mathbb{C}, +)$.
4. $(\mathbb{Z}, \cdot)$ ist keine Gruppe, da (G3) verletzt ist. Kein Element außer 1 und -1 hat ein Inverses. Ebenso sind $(\mathbb{Q}, \cdot)$, $(\mathbb{R}, \cdot)$ und $(\mathbb{C}, \cdot)$ keine Gruppen, da die 0 nicht invertierbar ist.
5. $(\mathbb{Q}\backslash\{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{R}\backslash\{0\}, \cdot)$ und $(\mathbb{C}\backslash\{0\}, \cdot)$ sind abelsche Gruppen.
6. $(\{-1, 1\}, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe. $(\{-1, 1\}, +)$ hingegen nicht. Es scheitert schon daran, dass $1 + 1 = 2$ und 2 liegt nicht mehr in unserer Menge.

Gruppen

Satz (Rechenregeln)

In einer Gruppe G gelten folgende Rechenregeln:

- $\forall a \in G : (a^{-1})^{-1} = a$
- $\forall a, b \in G : (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$

Definition (Untergruppe)

Eine Teilmenge $U \subset G$ gemeinsam mit der Verknüpfung $\cdot$ heißt Untergruppe von G, wenn $(U, \cdot)$ selber wieder eine Gruppe darstellt. Übliche Vorgehensweise:

1. Zeige Abgeschlossenheit, $\forall a, b \in U : ab \in U$.
2. Zeige Existenz eines Inversen, $\forall a \in U : \exists a^{-1} \in U : a^{-1}a = 1$
3. Zeige $e \in U$ oder $U \neq \emptyset$

Definition (Symmetrische Gruppe)

Für eine Menge A ist

$$S_A := \{f : A \to A \,|\, f \text{ ist bijektiv}\}$$

mit der Komposition, d.h. $f \cdot g := f \circ g$ eine Gruppe.
S_A heißt symmetrische Gruppe auf A. Die Elemente von S_A heißen **Permutationen**. Für $A = \{1, 2, ..., n\}, n \in \mathbb{N}$ heißt $S_n = S_A$ symmetrische Gruppe auf n Ziffern.

Anmerkung

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, Elemente der S_n darzustellen. Betrachten wir z.B. die S_3, also die Gruppe, die die Zahlen 1, 2, 3 permutiert (=vertauscht), so können wir die Vertauschung von 1 und 2 folgendermaßen schreiben:

- (12). Dies ist die sogenannte **Zykelschreibweise**, die man so liest: '1 wird abgebildet auf 2, 2 auf 1, 3 bleibt sitzen' oder in Zeichen: $1 \mapsto 2, 2 \mapsto 1, 3 \mapsto 3$
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. In dieser Schreibweise kommen alle Ziffern 1 bis n in die erste Zeile und in der zweiten Zeile stehen die jeweiligen Bilder.

Anmerkung

- $|S_n| = n!$
- Für $n \geq 3$ ist S_n nicht abelsch.

Gruppen

Definition (Quotientengruppe)

Falls N ein Normalteiler, (Untergruppe, sodass $\forall a \in G : aN = Na$), so ist $G/N = \{gN \mid g \in G\}$ die Quotientengruppe nach N. Stellt also die Menge aller Nebenklassen gN dar. Wenn Äquivalenzrelation $\sim$ gewählt wird mit $a \sim b \iff a - b \in N$, dann ist $G/N = \{[g]_\sim \mid g \in G\}$

Definition (Körper)

Eine Menge K mit Verknüpfungen $+,\cdot$ heißt Körper, falls

1. $(K,+)$ abelsche Gruppe
2. $(K\setminus\{0\},\cdot)$ abelsche Gruppe
3. Distributivgesetze gelten. $\forall a,b,c\in K$:

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$$

$$(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$$

Zusammenfassung

- Definition einer Gruppe
- Rechenregeln
- Symmetrische Gruppe

Gibt es noch Fragen zu diesem Kapitel?

Vektorräume

Definition (Vektorraum)

Ein K-Vektorraum (auch: Vektorraum über K genannt) ist eine Menge V zusammen mit zwei Abbildungen:

$$+ : V \times V \to V, (\vec{v}, \vec{w}) \mapsto \vec{v} + \vec{w}$$

und

$$\cdot : K \times V \to V, (a, \vec{v}) \mapsto a \cdot \vec{v}$$

so dass folgende Axiome gelten:

(VR1) V ist mit + als Verknüpfung eine kommutative Gruppe.

(VR2) Für alle $a \in K$ und $\vec{v}, \vec{w} \in V$ gilt $a \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = a \cdot \vec{v} + a \cdot \vec{w}$ (Punkt vor Strich!).

(VR3) Für alle $a, b \in K$ und $\vec{v} \in V$ gilt $(a + b)\vec{v} = a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{v}$.

(VR4) Für alle $a, b \in K$ und $\vec{v} \in V$ gilt $(a \cdot b)\vec{v} = a \cdot (b \cdot \vec{v})$.

(VR5) Für alle $\vec{v} \in V$ gilt $1_K \cdot \vec{v} = \vec{v}$ (wobei 1_K das n. E. der Körpermultiplikation ist.)

Anmerkung

- Die Elemente eines Vektorraums heißen Vektoren.
- Offensichtlich kann mit '+' sowohl die Addition von Skalaren aus dem Körper gemeint sein $(a + b)$ als auch die Addition von Elementen aus der abelschen Gruppe V $(\vec{v} + \vec{w})$. Es muss im jeweiligen **Kontext** erschlossen werden, welche Addition gemeint ist. Es können nur Elemente aus gleichen Strukturen addiert werden, also ist z.B. $a + \vec{v}$ nicht sinnvoll.
- Mit '$\cdot$' kann nur die Multiplikation von Skalaren gemeint sein. Die Multiplikation von Vektoren ist im Allgemeinen nicht definiert. Ab jetzt werden wir nur noch v anstelle von $\vec{v}$ für ein Element von V schreiben.

Beispiel

Standardbeispiele

1. Das klassische Beispiel für einen Vektorraum ist der $\mathbb{R}^n$, der n-dimensionale $\mathbb{R}$-Vektorraum. Genauso kann man aus jedem Körper einen K^n, den n-dimensionalen K-Vektorraum konstruieren.
2. $V = \{0\}$ (kommutative Gruppe mit nur einem Element, der 0) wird mit $a \cdot 0 := 0$ für $a \in K$ ein K-Vektorraum. Dieser Vektorraum heißt der **Nullraum**.
3. Polynomring $K[x] := \{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0 \,|\, n \in \mathbb{N}_0, a_i \in K\ \}$ (mit Polynomaddition und Produkt von Skalar und Polynom)

Satz (Rechenregeln)

Es seien V ein K-Vektorraum und $a \in K, v \in V$. Dann gelten:

1. $a \cdot 0 = 0$ *und* $0 \cdot v = 0$ *(in der ersten Gleichung bezeichnet die linke 0 den Nullvektor, in der zweiten das Nullelement von K)*
2. $(-a) \cdot v = a \cdot (-v) = -(a \cdot v)$
3. *Aus* $a \cdot v = 0$ *folgt* $a = 0$ *oder* $v = 0$.

Definition (Untervektorraum)

Sei V ein K-Vektorraum. Eine Teilmenge $U \subseteq V$ heißt ein Untervektorraum (auch: Unterraum, Teilraum), falls gilt:

- $U \neq \emptyset$
- Für $v, w \in U$ ist auch $v + w \in U$.
- Für $a \in K$ und $v \in U$ ist auch $a \cdot v \in U$

Insbesondere enthält jeder Unterraum den **Nullvektor** und jeder Unterraum ist selbst ein **K-Vektorraum**.

Vektorräume

Beispiel

Standardbeispiele

1. $V = \mathbb{R}^3$. Alle Ebenen und Geraden durch den Nullpunkt sind Unterräume. Gehen sie nicht durch den Nullpunkt, sind es keine Unterraum.
2. $U = 0$ und V sind selbst Unterraum eines Vektorraums V (und müssen insbesondere immer mit angegeben werden, wenn gefordert ist, alle Untervektorräume eines gegebenen Vektorraums anzugeben, außer es ist gefordert alle *echten* Unterräume anzugeben. Dann lässt man V selbst weg.)
3. Lösungsmenge eines homogenen LGS $A \cdot x = 0$ mit $A \in K^{m \times n}$ ist ein Unterraum von K^n.
4. Polynomring $V = K[x]$ hat für jedes $d \in \mathbb{N}_0$ einen Unterraum $U = \{f \in V \mid deg(f) \leq d\}$.

Satz (Schnitt und Summe von Untervektorräumen)

Sei V ein K-Vektorraum und $U_1, U_2 \subseteq V$ Unterräume. Dann gilt:

1. *Der Schnitt zweier Unterräume $U_1 \cap U_2 \subseteq V$ ist ein Unterraum.*
2. *$U_1 + U_2 := \{v + w | v \in U_1, w \in U_2\} \subseteq V$ ist ein Unterraum.*
3. *Ist $M \neq \emptyset$ eine Menge, deren Elemente Unterräume von V sind, so ist auch $\bigcap\limits_{U \in M} U \subseteq V$ ein Unterraum.*

Anmerkung

Die Vereinigung von Unterräumen $U_1 \cup U_2$ ist im Allgemeinen kein Unterraum. So ist z.B. die Vereinigungsmenge zweier Geraden $U_1, U_2 \in \mathbb{R}^2$, die beide durch den Nullpunkt gehen, kein Unterraum (es sei denn $U_1 = U_2$). An dieser Stelle sollte man sich den Unterschied zwischen $U_1 + U_2$ und $U_1 \cup U_2$ klar machen.

Vektorräume

Definition (Erzeugter Unterraum)

Es seien V ein K-Vektorraum und $S \subseteq V$ eine Teilmenge. Wir betrachten die Menge $M := \{U \subseteq V | U$ ist eine Unterraum und $S \subseteq U\}$ und bilden

$$\operatorname{span}(S) := \bigcap_{U \in M} U.$$

$\operatorname{span}(S)$ heißt der von S erzeugte Unterraum (auch: aufgespanter Unterraum, Erzeugnis) von V. $\operatorname{span}(S)$ ist der kleinste Unterraum von V, der S (als Teilmenge) enthält. Jeder Unterraum von V, der S enthält, enthält auch $\operatorname{span}(S)$.

Satz

Es sei V ein K-Vektorraum, $U_1 und U_2$ Unterräume und $S := U_1 \cup U_2$. Dann gilt

$$span(S) = U_1 + U_2.$$

Vektorräume

Zusammenfassung

- Definition eines Vektorraums
- Rechenregeln
- Definition eines Unterraums
- Erzeugter Unterraum

Gibt es noch Fragen zu diesem Kapitel?

Linearkombinationen

Linearkombinationen

Definition

Es seien $v_1, \ldots, v_n \in V$ Vektoren und $S \subseteq V$ eine Teilmenge.

1. Ein Vektor $v \in V$ heißt **Linearkombination** von $v_1, \ldots, v_n$, falls es Skalare $a_1, \ldots, a_n \in K$ gibt mit
$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n.$$
2. Ein Vektor $v \in V$ heißt **Linearkombination** von S, falls es $n \in \mathbb{N}$ und $v_1, \ldots, v_n \in S$ gibt, sodass v eine Linearkombination von $v_1, \ldots, v_n$ ist. Falls $S = \emptyset$, so sagen wir, dass der Nullvektor 0 (die einzige) Linearkombination von S ist.

Linearkombinationen

Beispiel

Sei $V = \mathbb{R}^2$.

- Der Vektor $v = (3,5)^T$ ist eine Linearkombination der Vektoren $v_1 = (1,-1)^T$ und $v_2 = (1,1)^T$, da $v = 4v_2 - v_1$. Dabei können die Koeffizienten durch Lösen folgenden Gleichungssystems bestimmt werden:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ bzw. } a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

- Der Vektor $v = (3,5)^T$ ist keine Linearkombination von den Vektoren $v_1 = (1,0)^T$ und $v_2 = (2,0)^T$, da hier keine Koeffizienten existieren, sodass der untere Eintrag erzeugt wird.
- Für den Vektorraum $W = K[x]$ ist das Polynom $13 + 37x^2 \in W$ eine Linearkombination der Elemente $1, x^2 \in W$.

Linearkombinationen

Definition (Erzeugter Unterraum)

Sei $S \subseteq V$. Der erzeugte Unterraum $\operatorname{span}(S)$ ist die Menge aller Linearkombinationen von S:

$$\operatorname{span}(S) = \{v \in V \mid v \text{ ist Linearkombination von } S\}.$$

Insbesondere gilt für $v_1, \cdots v_n \in V$:

$$\operatorname{span}(v_1, ..., v_n) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k v_k \ \mid a_1, ..., a_n \in K \right\}$$

Linearkombinationen

Beispiel

Sei $V = \mathbb{R}^2$.

- $S = \{1, x, x^2, ...\}$ erzeugt den K-Vektorraum der Polynome $K[x]$.
- Die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ spannen den gesamten $\mathbb{R}^2$ auf, da man alle Vektoren des $\mathbb{R}^2$ als Linearkombination von v_1 und v_2 schreiben kann. Also: $\operatorname{span}(v_1, v_2) = \mathbb{R}^2$.
- Die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ spannen dagegen nur die x-Achse des $\mathbb{R}^2$ auf, da bei beiden der zweite Eintrag 0 ist. Also: $\operatorname{span}(v_1, v_2) = \operatorname{span}(v_1) = \operatorname{span}(v_2) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} | \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

Linearkombinationen

Definition (Lineare Un-/Abhängigkeit)

Die Vektoren $v_1, ..., v_n \in V$ sind linear unabhängig, falls für Skalare $a_1, ..., a_n \in K$ folgende Bedingung gilt:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n = 0 \qquad \Rightarrow \qquad a_1, a_2, ..., a_n = 0.$$

Ist dies nicht der Fall, so spricht man von linearer Abhängigkeit der Vektoren $v_1, ..., v_n$.
Eine Teilmenge $S \subseteq V$ ist linear unabhängig, falls alle ihre Elemente $v_1, ..., v_n \in S$ zueinander linear unabhängig sind. Andernfalls ist S linear abhängig.
In anderen Worten: Eine Menge von Elementen aus dem Vektorraum ist genau dann linear unabhängig, wenn sich kein Element als Linearkombiantion der anderen darstellen lässt. Findet man nicht verschwindende Skalare, sodass die obere Gleichung gilt, so sind die Vektoren linear abhängig.

Linearkombinationen

Beispiel

Sei $V = \mathbb{R}^2$.

1. Die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind linear unabhängig, da

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ a_1 - a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad a_1 = -a_2 \quad \wedge \quad a_1 = a_2 \quad \Rightarrow \quad a_1 = -a_1 \quad \Rightarrow \quad a_1 = a_2 = 0.$$

2. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ sind linear abhängig. Hier finden wir direkt durch scharfes Hinsehen: $a_1 = -2$ und $a_2 = 1$, sodass $a_1 v_1 + a_2 v_2 = 0$.

Linearkombinationen

Satz

Für Vektoren $v_1, ..., v_n \in K^m$ definieren wir das folgende LGS:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}}_{=:A \in K^{m \times n}} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sind die Vektoren linear unabhängig, so ist der Nullvektor die einzige (eindeutige) Lösung dieses LGS.
Dies ist äquivalent zur Aussage, dass der Rang von A gleich der Spaltenzahl n ist (siehe Kapitel 2).
Somit:

$$v_1, ..., v_n \quad \textit{sind linear unabhängig} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{rang}(A) = n.$$

Linearkombinationen

Zusammenfassung

- Definition Linearkombination
- Erzeugter Untervektorraum
- Lineare (Un-)Abhängigkeit

Gibt es noch Fragen zu diesem Kapitel?

Basen

Basen

Definition (Erzeugendensystem und Basis)

Sei $S \subseteq V$.

1. S ist Erzeugendensystem von $V \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{span}(S) = V$.
2. S ist Basis von $V \quad \Leftrightarrow \quad S$ ist Erzeugendensystem von V und S ist linear unabhängig.

Satz (Basissatz)

Jeder Vektorraum hat eine Basis.

Basen

Beispiel

- Für den Vektorraum $\mathbb{R}^3$ kann man unterschiedliche Basen angeben, z.B.

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{oder} \quad B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

  Letztere nennt man auch *kanonische Standardbasis*.

- Für $\mathbb{R}^{2\times 2}$ können wir ebenfalls eine kanonische Standardbasis angeben, nämlich

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

- Der Vektorraum der Polynome $K[x]$ besitzt die Basis der Monome $B = \{1, x, x^2, x^3, ...\}$.

Basen

Satz (Eigenschaften von Basen)

Für eine Teilmenge $S \subseteq V$ sind äquivalent:

1. *S ist eine Basis von V.*
2. *S ist ein minimales Erzeugendensystem.*
   Dies bedeutet: S erzeugt V und falls wir aus S einen beliebigen Vektor v wegnehmen, so wird V durch $S \setminus \{v\}$ nicht mehr erzeugt.
3. *S ist maximal linear unabhängig.*
   Dies bedeutet: S ist linear unabhängig und wenn wir zu S einen zusätzlichen Vektor $v \in V$ hinzufügen, so ist $S \cup \{v\}$ nicht mehr linear unabhängig.

Basen

Definition (Dimension)

Die *Dimension* eines Vektorraums V, $\dim(V)$, ist gleich der Elementanzahl einer Basis von V, falls V endlich erzeugt ist. (Eine Basis endlich viele Elemente besitzt) Ansonsten ist $\dim(V) = \infty$.

Korollar

Sei $S = \{v_1, ..., v_n\} \subset V$.

1. *Wenn* $n < \dim(V)$, *dann ist* $V \neq span(S)$.
2. *Wenn* $n > \dim(V)$, *dann ist* S *linear abhängig.*

Des weiteren sind äquivalent:

1. S *ist eine Basis von* V.
2. $\dim(V) = n$ *und* S *ist linear unabhängig.*
3. $\dim(V) = n$ *und* $V = span(S)$.

Satz

Für ein homogenes LGS, also ein Gleichungssystem der Form $A \cdot x = 0$ *mit* $A \in K^{m \times n}$*, kann man die Dimension der Lösungsmenge* L *angeben als:*

$$\dim(L) = n - \operatorname{rang}(A).$$

Basen

Satz (Basis aus Erzeugendensystem im K^n)

Sei $U = span(v_1, ..., v_m) \subseteq K^n$*. Wir bilden die Matrix* $A \in K^{m \times n}$*, welche die Vektoren* v_i *als Zeilen besitzt:*

$$A = \begin{pmatrix} - & v_1 & - \\ - & v_2 & - \\ & \vdots & \\ - & v_m & - \end{pmatrix}.$$

Nun bringen wir diese Matrix auf Zeilenstufenform. Die Zeilen $\neq 0$ *der resultierenden Matrix bilden eine Basis von* U *mit* $\dim(U) = \operatorname{rang}(A)$.

Basen

Satz (Basisergänzung)

Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $S \subseteq V$ linear unabhängig. Dann kann S durch Hinzufügen von weiteren Vektoren zu einer Basis von V gemacht werden. Die neue Basis $B \subseteq S$ bezeichnen wir als Basisergänzung von S.

Korollar

Sei $U \subseteq V$ ein Unterraum. Dann gelten:

1. $\dim(U) \leq \dim(V)$.
2. *Falls* $\dim(U) = \dim(V) < \infty \quad \Rightarrow \quad U = V$.

Zusammenfassung

- Definition Erzeugendensystem und Basis
- Dimension
- Basisergänzung

Gibt es noch Fragen zu diesem Kapitel?