Ferienkurs Analysis 2 für Physik (MA9203)

Zentralübungsaufgaben

Z15. Satz von Picard-Lindelöf

Bestimmen Sie die Lösungen folgender Anfangswertprobleme und diskutieren Sie deren Eindeutigkeit. Veranschaulichen Sie Ihre Ergebnisse mit einer Skizze.

(a) $\dot{x}(t) = (x(t))^2$, $x(0) = 1$,

(b) $\dot{x}(t) = \sqrt{x(t)}$, $x(0) = 0$ wobei $x(t) > 0$.

Z16. Erste Integrale und exakte Differentialgleichungen

Die Differentialgleichung

$$f(t,x) + g(t,x) \cdot \dot{x}(t) = 0 \quad \text{mit} \quad (t,x) \in U \subseteq \mathbb{R}^2, U \text{ offen}$$

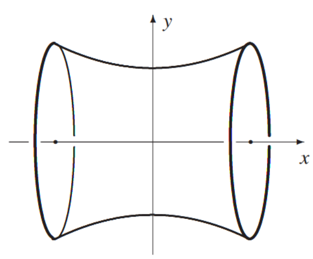
heißt *exakt*, wenn es eine stetig differenzierbare Funktion $E : U \to \mathbb{R}$ gibt, derart dass $\partial_1 E(t,x) = f(t,x)$ und $\partial_2 E(t,x) = g(t,x)$ für $(t,x) \in U$.

(a) Zeigen Sie: Ist die Differentialgleichung exakt, so sind die Lösungen dieser genau die differenzierbaren Funktionen $x = x(t)$, deren Graph in U liegt und für welche die Funktion $E(t, x(t))$ konstant ist. E ist also ein erstes Integral.

(b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$2t\cos(x) - \dot{x}t^2\sin(x) = 0, \quad x(1) = \frac{\pi}{4}.$$

Z17. Ein einfaches Variationsproblem



Zwischen zwei parallelen Kreisringen mit festem Abstand spannt sich eine Seifenhaut. Diese wird durch eine Funktion $y = y(x)$ beschrieben. Lässt man die Funktion $y(x)$ um die x-Achse rotieren, so beschreibt dies die physikalische Tatsache, dass sich die Seifenhaut kreisförmig um die x-Achse ausbildet.

(a) Machen Sie sich plausibel, warum das Funktional

$$F := 2\pi \int_{-1}^{1} y(x)\sqrt{1 + (y'(x))^2}\,\mathrm{d}x$$

die zu minimierende Rotationsfläche beschreibt.

(b) Welche Form nimmt die Funktion $y(x)$ an?

Diskussionsaufgaben

D34. Banach'scher Fixpunktsatz

Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $f : X \to X$ eine Selbstabbildung[1], für welche es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $f^n := \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ mal}}$ eine Kontraktion ist.

(a) Zeigen Sie, dass f einen eindeutigen Fixpunkt besitzt.

(b) Finden Sie ein geeignetes Beispiel welches zeigt, dass f selbst keine Kontraktion sein muss.

(c) Betrachten Sie nun die Funktion $g : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $g(x) = \frac{1}{3}\left(x + \sin(x) + \frac{1}{x+1}\right)$ und zeigen Sie, dass g einen eindeutigen Fixpunkt besitzt.

D35. Mehrdimensionales Newton-Verfahren

Für eine Funktion $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ mit einer Nullstelle x^*, für die $J_f(x^*)$ invertierbar ist setzt man $F(x) := x - (J_f(x))^{-1} f(x)$ und definiert zu einem Startwert $x_0 \in \mathbb{R}^n$ rekursiv die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ durch $x_{k+1} := F(x_k)$; das ist das *mehrdimensionale Newton-Verfahren*. Wenden Sie dieses auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x - 2y &= 1 \\ 2x - y &= 0 \end{aligned}$$

an, indem Sie die Iterationsvorschrift F aufstellen und anwenden. Was fällt ihnen hierbei in Bezug auf die Konvergenzgeschwindigkeit auf?

D36. Separierbare Differentialgleichung

Gegeben ist das Anfangswertproblem $\dot{x} = 1 + |x|$, $x(0) = 0$ mit $x = x(t) \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie eine Lösung des Anfangswertproblems auf ganz $\mathbb{R}$.

(b) Ist diese Lösung eindeutig? Begründen Sie Ihre Antwort.

D37. Kreisgleichung

Wir betrachten die Differentialgleichung $\dot{x} = \sqrt{1 - x^2}$ mit $x(t) \in \mathbb{R}$.

(a) Für welche Anfangswerte zur Zeit $t = 0$ gibt es auf ganz $\mathbb{R}$ konstante Lösungen?

(b) Bestimmen Sie eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung zum Anfangswert $x(0) = 0$.

(c) Ist die Lösung der Differentialgleichung mit dem Anfangswert $x(0) = -1$ eindeutig bestimmt?

D38. Exakte Differentialgleichung

Gegeben ist die Differentialgleichung $(2t - x\sin(t)) + (2x + \cos(t))\dot{x} = 0$.

(a) Warum ist das eine exakte Differentialgleichung?

(b) Lösen Sie sie allgemein.

(c) Was ist die Lösung zum Anfangswert $x(0) = 0$?

D39. Integrierender Faktor

(a) Sei $f(x, t) + g(x, t)\dot{x} = 0$ eine nicht-exakte Differentialgleichung und $m(x, t)$ ein integrierender Faktor. Warum ist m eine Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$f\partial_x m + m\partial_x f = g\partial_t m + m\partial_t g\ ?$$

(b) Warum ist im Fall $\partial_t m = 0$ die Funktion $m(x, t) = \exp\left(\int \frac{\partial_t g - \partial_x f}{f} \mathrm{d}x\right)$ ein integrierender Faktor?

[1] Also eine Abbildung vom Raum X in sich selbst.

(c) Finden Sie eine implizite Lösung der Differentialgleichung $x^2 + (1+tx)\dot{x} = 0$.

D40. Variationsrechnung

Gegeben ist das Funktional $F(x) := \int\limits_1^2 t^2 \dot{x}(t)^2 \mathrm{d}t$ für $x \in C^2([1,2])$ mit den Randbedingungen $x(1) = 7$ und $x(2) = 5$.

(a) Wie lautet die Lagrangefunktion $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ zu diesem Problem?

$L(t, x, v) =$

(b) Wie lautet explizit die Euler-Lagrange-Gleichung von F für $x \in C^2([1,2])$?

(c) Geben Sie ein erstes Integral $E : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ für die Euler-Lagrange-Gleichung des Funktionals F an.

$E(t, x, v) =$

(d) Finden Sie mit Hilfe der allgemeinen Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung, $x(t) = \frac{c_1}{t} + c_2$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, den stationären Punkt $x^*(t)$ von F.

$x^*(t) =$

D41. Kepler-Problem

Für ein Teilchen mit Geschwindigkeit $\dot{x} \in \mathbb{R}^3$ im Gravitationspotential $U(x) = -\frac{1}{\|x\|}$ gilt die Lagrangefunktion $L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}\|\dot{x}\|^2 + \frac{1}{\|x\|}$.

(a) Geben Sie die zugehörige Zentralkraft $F(x) = -\nabla U(x)$ an.

(b) Zeigen Sie, dass für die Geschwindigkeit in Polarkoordinaten gilt: $\dot{x}(r, \varphi) = \dot{r}e_r + r\dot{\varphi}e_\varphi$. Hierbei sind e_r und e_φ die lokalen Einheitsvektoren der Polarkoordinatentransformation.

(c) Berechnen Sie die Euler-Lagrange-Gleichung für r in Polarkoordinaten.

D42. Energieerhaltung und Variationsrechnung

Sei $L \in C^2([t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ die Lagrange-Funktion $L(t, x, v)$ wobei $t \in [t_0, t_1]$ und $x, v \in \mathbb{R}^n$, zum zu minimierenden Funktional $F(x) = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t)) \mathrm{d}t$. Dann erfüllt jedes zweimal stetig differenzierbare Extremum von F mit den Endpunkten $x(t_0) = x_0$ und $x(t_1) = x_1$ die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial v}(t, x(t), \dot{x}(t)) - \frac{\partial L}{\partial x}(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0.$$

(a) Zeigen Sie, dass bei zeitlicher Translationsinvarianz von F (also $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$) die Energie

$$E(x, v) = \frac{\partial L}{\partial v}(t, x, v)v - L(t, x, v)$$

erhalten ist: Ist $\tilde{x}(t)$ eine Lösung der Euler-Lagrange-Gleichungen, so ist $t \mapsto E(\tilde{x}(t), \dot{\tilde{x}}(t))$ eine konstante Funktion. Was passiert, wenn $L(t, x, v)$ nur von t und x, bzw. nur von t und v abhängt?

(b) Wie lautet die Energiefunktion $E(x, v)$ für eine zeitunabhängige Lagrange-Funktion der klassischen Mechanik $L(t, x, v) = \frac{1}{2}m\|v\|^2 - V(x)$?