Ferienkurs Analysis 2 für Physik (MA9203)

Zentralübungsaufgaben

Z12. Implizit definierte Funktionen

Seien $f_1(t,x,y) = \ln(x) + y^2 t - 4$, $f_2(t,x,y) = x^2 + yt^2 + t^2$ für $t,x,y \in \mathbb{R}, x > 0$, und $P = (1,1,-2)$. Es gilt $f_1(P) = f_2(P) = 0$.

(a) Die Gleichung $f_1(t,x,y) = 0$ kann offenbar in einer Umgebung des Punktes P lokal nach y aufgelöst werden. Man erhält die Funktion $(t,x) \mapsto \tilde{y}(t,x)$. Berechnen Sie $\nabla\tilde{y}(1,1)$.

(b) Der Punkt P ist eine Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems $f_1(t,x,y) = 0$, $f_2(t,x,y) = 0$, bzw. der Gleichung $f(t,x,y) = 0$ mit $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$. Diese soll in einer Umgebung von P lokal nach x und y aufgelöst werden. Die Invertierbarkeit welcher Matrix muss dazu überprüft werden?

(c) Die lokale Auflösung von $f(t,x,y) = 0 \in \mathbb{R}^2$ nach x und y im Punkt P ergibt die beiden Funktionen $\overline{x}(t)$ und $\overline{y}(t)$, definiert in einer Umgebung von $t = 1$. Berechnen Sie $\dot{\overline{x}}(1)$ und $\dot{\overline{y}}(1)$.

Z13. Die Kugelsphäre als Untermannigfaltigkeit

Gegeben ist die Menge $M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

(a) Zeigen Sie, dass M eine zweidimensionale C^∞-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Geben Sie zu $p \in M$ den Tangentialraum T_pM an.

Z14. Extrema unter Nebenbedingungen

Minimieren Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = 4x + y^2$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 \leq 1$.

Diskussionsaufgaben

D24. Inverse Funktionen

Bestimmen Sie alle Punkte, in denen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy)$ ein lokaler C^1-Diffeomorphismus ist.

D25. Implizite Funktionen

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y,z) = x^2 + yz + z^2 - e^z$.

(a) Zeigen Sie, dass in einer Umgebung des Punktes $(1,0,0)$ eine Funktion $g(x,y)$ existiert, welche die Gleichung $f(x,y,z) = 0$ nach $z = g(x,y)$ auflöst.

(b) Wie lautet der Gradient von g im Punkt $(1,0)$?

$$\square \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \square \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \square \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \square \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \square \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

D26. Nochmals inverse Funktionen

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist gegeben durch $f(x,y) = \begin{pmatrix} \cosh(x)\cos(y) \\ \sinh(x)\sin(y) \end{pmatrix}$.

Zeigen Sie: Es gibt eine Umgebung U von $\left(\ln(2), \frac{\pi}{2}\right)$ und eine Umgebung V von $\left(0, \frac{3}{4}\right)$ so, dass U durch die Funktion f bijektiv auf V abgebildet wird. Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion in $\left(0, \frac{3}{4}\right)$.

D27. Kurvendiskussion einer implizit definierten Funktion
Es sei $F(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ mit der Nullstellenmenge $N := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \big| F(x, y) = 0\}$.

(a) Wo haben die durch $F(x, y) = 0$ implizit definierten Funktionen horizontale und vertikale Tangenten?

(b) Wieso lässt sich in jeder Umgebung eines Punktes $(x_0, y_0) \in N$ mit $x_0 < 0$ die Kurve als Graph einer C^1-Funktion $y = f(x)$ darstellen? Man berechne dort $f'(x)$.

D28. Der Torus im $\mathbb{R}^4$
Sei $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2, F(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 1 \\ x_3^2 + x_4^2 - 1 \end{pmatrix}$ und $T := F^{-1}(\{(0, 0)\}) \subseteq \mathbb{R}^4$.

(a) Zeigen Sie, dass T eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^4$ ist.

(b) Geben Sie für $p \in T$ explizit T_pT an.

D29. Graphen als Untermannigfaltigkeiten
Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $(x, y) \in U$ und $f : U \to \mathbb{R}, f(x, y) = xy$.

(a) Zeigen Sie durch Angabe äußerer und innerer Karten, dass der Graph von f, G_f, eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Beschreiben Sie G_f als Urbild eines regulären Wertes.

D30. Untermannigfaltigkeit oder nicht?
Ist die Menge $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \big| xy = 0 = yz\} \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$?

D31. Lokale und globale Extrema
Gegeben sei $f(x, y) = (x - 1)^2 + y^2$ für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sowie $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 4\}$.

(a) Bestimmen Sie den stationären Punkt von $f(x, y)$ und dessen Art im Inneren von B.

(b) Bestimmen Sie das Minimum und das Maximum von f in ganz B unter Verwendung des Lagrange-Formalismus.

D32. Extrema mit mehreren Nebenbedingungen
Wie lauten die Minima und Maxima der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x, y, z) = 5x + y - 3z$, auf dem Schnitt der Ebene $x + y + z = 0$ mit der Kugeloberfläche $x^2 + y^2 + z^2 = 1$?

D33. Ein wenig Informationstheorie
Wir definieren die *Shannon-Entropie*[1] als

$$H = -\sum_{i=1}^{m} p_i \ln(p_i).$$

Dabei sind die $p_i, i = 1, \ldots, m$ Wahrscheinlichkeiten, für die $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$ gelten muss. Zeigen Sie mit der Methode der Lagrange-Multiplikatoren, dass unter allen Wahrscheinlichkeitsverteilungen die Gleichverteilung den maximalen Wert der Shannon-Entropie besitzt; d.h. $\forall i : p_i = \frac{1}{m}$.

Hinweise:

- Die zu extremalisierende Funktion ist die Shannon-Entropie, die Nebenbedingung, dass die Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten 1 ergibt.
- Sie erhalten am Ende einen Ausdruck der Form $p_i = e^{\lambda - 1}$. Setzen Sie diesen in die Nebenbedingung ein, so erhalten Sie das Ergebnis einer Gleichverteilung.

[1] `https://de.wikipedia.org/wiki/Entropie_(Informationstheorie)`