# Ferienkurs Analysis 2 für Physik (MA9203)

### Zentralübungsaufgaben

**Z8. Logarithmische Spirale**

Die Kurve $\gamma(t) := \begin{pmatrix} e^{ct}\cos(t) \\ e^{ct}\sin(t) \end{pmatrix}$, $c > 0$ wird als *logarithmische Spirale* bezeichnet.

(a) Berechnen Sie $L(\gamma(t))$ auf dem Intervall $[0, 4\pi]$.

(b) Parametrisieren Sie nun $\gamma(t)\big|_{[0,4\pi]}$ nach der Bogenlänge.

**Z9. Nabla-Kalkül**

Für das Kronecker-Delta gilt $\delta_{ij} = \langle e_i, e_j\rangle$, für das Levi-Civita-Symbol $\epsilon_{ijk} = \langle e_i, e_j \times e_k\rangle$, jeweils für $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$, mit der Standard-Orthonormalbasis $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{R}^3$. Es gilt $\delta_{ij} = \delta_{ji}$, $\epsilon_{ijk} = \epsilon_{jki}$ und $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik}$. Zwei nützliche Identitäten sind $\sum_{j=1}^{3} \delta_{ij}\delta_{jk} = \delta_{ik}$ und $\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$. Zeigen Sie nun für $v, w \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, dass

(a) $(\nabla \times v)_i = \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\partial_j v_k$,

(b) $\langle \nabla, v \times w\rangle = \langle w, \nabla \times v\rangle - \langle v, \nabla \times w\rangle$.

**Z10. Gradientenfelder**

Sei $U$ eine nichtleere offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Ein Vektorfeld $F : U \to \mathbb{R}^n$ heißt *Gradientenfeld* auf $U$, falls eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ existiert, so dass $F = \nabla f$. Eine solche Funktion heißt *Potential* von $F$.

(a) Sei $F \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ ein Gradientenfeld.
Zeigen Sie, dass dann die folgende *Integrabilitätsbedingung* auf $U$ gelten muss:

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Diese Aussage kennen Sie bereits aus der Vorlesung; welche Interpretation hat sie im Fall $n = 2$ und $n = 3$?

(b) Ist eines der beiden Vektorfelder $F, G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$F(x, y) = (y, y - x), \quad G(x, y) = (y, x - y),$$

ein Gradientenfeld? Wenn ja, wie lautet das zugehörige Potential?

(c) Zeigen Sie, dass das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^3\backslash\{0\} \to \mathbb{R}^3$,

$$F(x) = \frac{x}{\|x\|^k}, \quad k \in \{1, 2\},$$

ein Gradientenfeld ist, indem Sie ein Potential bestimmen.

**Z11. Ein einfaches Kurvenintegral**

Sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $F(x_1, x_2) := (2x_1x_2, x_1^2)$ und sei $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $\gamma(t) := \left(t^2, e^{\sin(2\pi t^2)}\right)$. Berechnen Sie $\int_\gamma F(x) \cdot \mathrm{d}x$.

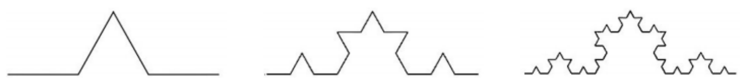
## Diskussionsaufgaben

**D15. Bogenlänge und Funktionsgraphen**
Berechnen Sie den Umfang eines Kreises, in dem Sie

(a) die Länge mit einer geeigneten Parametrisierung des Kreises berechnen.

(b) einen Halbkreis als Graphen einer stetig differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auffassen und zunächst diesen Funktionsgraphen parametrisieren.

**D16. Koch-Kurve**
Gegeben sei als $\gamma_0$ eine Strecke der Länge 1. Daraus werde $\gamma_1$ als Streckenzug konstruiert, indem das mittlere Drittel durch zwei neue Streckenstücke der Länge $\frac{1}{3}$ ersetzt wird, die mit dem ersetzten Streckenstück ein gleichseitiges Dreieck bilden. Für $n \geq 2$ enstehe $\gamma_n$ aus $\gamma_{n-1}$ rekursiv dadruch, dass in jedem Streckenstück derselbe Ersetzungsschritt vorgenommen wird wie beim Übergang von $\gamma_0$ zu $\gamma_1$. Die folgenden Skizzen zeigen die ersten drei Iterationsschritte $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$:



(a) Welche Länge hat der Streckenzug $\gamma_n$?

(b) Überlegen Sie, wie man $\gamma_n$ parametrisieren könnte. Parametrisieren Sie dabei $\gamma_1$ konkret und erklären Sie, wie man davon ausgehend, weiter vorgehen würde.

(c) Was passiert für $n \to \infty$?

**D17. Relevante Kurven in der Biologie**
Wir betrachten den Kegel, der durch die Gleichung $x^2 + y^2 = (z-2)^2$ mit $0 \leq z < 2$ gegeben ist. Eine Ameise erklimme diesen Kegel auf einem Weg, der im Punkt $(2, 0, 0)$ beginnt, in der Kegelspitze endet, den Kegel mit konstanter Winkelgeschwindigkeit dreimal umrundet und linear in der Zeit an Höhe zunimmt.

(a) Bestimmen Sie die Kurve $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$, die die Ameise bereist.

(b) Berechnen Sie den Geschwindigkeitsvektor und die Geschwindigkeit zur Zeit $t \in [0, 1]$.

(c) Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve $\gamma$.

**D18. Kurvenintegrale**
Gegeben sei das Vektorfeld $v(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 - y \\ y^2 + x \end{pmatrix}$ für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(a) Gibt es zu $v$ ein zugehöriges Potential $f$?

(b) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\displaystyle\int_\gamma v \cdot \mathrm{d}s$

  (i) entlang einer Geraden von $(0, 1)$ nach $(1, 2)$.

  (ii) entlang der Parabel $y = x^2 + 1$ von $(0, 1)$ nach $(1, 2)$.

**D19. Vektorfelder**
Gegeben ist das Vektorfeld $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, v(x, y, z) = (xy, \alpha x^2, z)$ wobei $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Berechnen Sie den Wert des Kurvenintegrals entlang $\gamma(t) = (t, t^2, t^3), t \in [0, 1]$.

$$\int_\gamma v \cdot \mathrm{d}x =$$

(b) Geben Sie die Rotation von $v$ an.

$$\operatorname{rot}\, v(x,y,z) =$$

(c) Für welchen Wert von $\alpha$ ist $v$ ein Gradientenfeld?

$$\alpha =$$

(d) Geben Sie für den Fall, dass $v$ ein Gradientenfeld ist, ein Potential $f$ von $v$ an.

$$f(x,y,z) =$$

**D20. Gradientenfelder**

Sei $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$.

Welche Aussagen sind richtig?

(a) $f$ erfüllt die Integrabilitätsbedingung. ☐ ja ☐ nein

(b) Das Definitionsgebiet von $f$ ist sternförmig. ☐ ja ☐ nein

(c) Das Kurvenintegral von $f$ über den Einheitskreis verschwindet. ☐ ja ☐ nein

(d) $f$ ist ein Gradientenfeld. ☐ ja ☐ nein

**D21. Nabla-Kalkül**

(a) Zeigen Sie für $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, jeweils stetig partiell differenzierbar, dass

$$\nabla \times (fv) = \nabla f \times v + f \nabla \times v.$$

(b) Berechnen Sie $\nabla \times w(x)$ für $x \neq 0$ mit $w(x_1, x_2, x_3) = \|x\| \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

**D22. Differentialoperatoren**

Berechnen Sie, sofern definiert, div, rot und grad der folgenden Skalar- und Vektorfelder, definiert für $a, x \in \mathbb{R}^3$:

(a) $f(x) = \|x\|^2$, (b) $f(x) = \|x\|$, (c) $v(x) = x$, (d) $v(x) = a \times x$.

**D23. Quantenmechanischer harmonischer Oszillator**

Zeigen Sie, dass die Funktion $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\psi(x) = e^{-\frac{1}{2}\|x\|^2}$, eine Eigenfunktion der Schrödinger-Gleichung des harmonischen Oszillators ist, d.h. es gibt ein $E \in \mathbb{R}$ mit

$$\left(-\Delta + \|x\|^2\right) \psi(x) = E \psi(x).$$

Bestimmen Sie den Eigenwert $E$.