MARIUS GRITL
JENS WILLGEROTH

Ferienkurs Analysis 2 für Physik (MA9203)

Zentralübungsaufgaben

Z5. Rechenregeln für Differenzierbarkeit im Mehrdimensionalen

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f, g : U \to \mathbb{R}^m$ zwei Funktionen, die in $x \in U$ differenzierbar sind, sowie $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(a) $J_{\lambda f}(x) = \lambda J_f(x)$,

(b) $J_{f+g}(x) = J_f(x) + J_g(x)$.

(c) Sei nun $f(x) = Ax$ mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Wie lautet $J_f(x)$?

Z6. Ableitung von Matrixfunktionen - peu à peu

Im Folgenden seien stets A, B differenzierbare Funktionen aus dem Vektorraum der reellen $n \times n$-Matrizen.

(a) Erklären Sie, wie der Ausdruck $f'(A)(B)$ zu verstehen ist.

(b) Berechnen Sie die Ableitung der Funktionen $f(A) = \mathbb{1}$, $g(A) = A$, $h(A) = A^T$ und $k(A) = A^2$.

(c) Gegeben sei die Funktion $f(A) = (A^T A)^{-1}$, wobei A invertierbar ist. Zeigen Sie, dass

$$f'(A)(B) = -A^{-1}((BA^{-1})^T + BA^{-1})(A^T)^{-1}.$$

Z7. Ableitung parameterabhängiger Integrale

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,t) := \begin{cases} \frac{tx^3}{(t^2+x^2)^2}, & (x,t) \neq (0,0), \\ 0, & (x,t) = (0,0). \end{cases}$

(a) Zeigen Sie, dass durch $F(x) := \int\limits_0^1 f(x,t)\mathrm{d}t$ eine differenzierbare Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert wird, aber $F'(0) \neq \int\limits_0^1 \partial_1 f(0,t)\mathrm{d}t$.

(b) Weshalb steht dieses Ergebnis nicht im Widerspruch zu dem in der Vorlesung vorgestellten Satz zur Differentiation parameterabhängiger Integrale?

Diskussionsaufgaben

D8. Differenzierbarkeitsbegriffe im Mehrdimensionalen

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung. Wir betrachten die Aussagen

A1: f ist stetig in U

A2: f ist partiell differenzierbar in U

A3: f ist differenzierbar in U

A4: f ist stetig differenzierbar in U

In der Vorlesung wurden die Implikationen A4⇒A3, A3⇒A2 und A3⇒A1 besprochen; daraus ergeben sich durch Transitivität einige weitere Implikationen.
Zeigen Sie mit Gegenbeispielen, dass alle übrigen Implikationen falsch sind.
Hinweis: Manche Implikationen können bereits durch Gegenbeispiele mit $n = m = 1$ widerlegt werden.

D9. Partielle Ableitungen von partiellen Ableitungen

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x_1^3 x_2 - x_1 x_2^3}{x_1^2 + x_2^2}, & \text{für } x \neq 0, \\ 0, & \text{für } x = 0. \end{cases}$

(a) Berechnen Sie die Funktionen $\partial_1 f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $\partial_2 f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und zeigen Sie, dass beide Funktionen stetig sind.

(b) Berechnen Sie $\partial_1^2 f := \partial_1(\partial_1 f)$ und $\partial_2^2 f := \partial_2(\partial_2 f)$.

(c) Berechnen Sie $\partial_1(\partial_2 f)$ und $\partial_2(\partial_1 f)$ und zeigen Sie, dass diese Funktionen nur auf $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ übereinstimmen.

D10. Partielle und totale Differenzierbarkeit

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq 0, \\ 0 & \text{für } (x,y) = 0. \end{cases}$

(a) Ist f stetig?

(b) Ist f partiell differenzierbar?

(c) Ist f (total) differenzierbar?

D11. Kettenregel und Matrixmultiplikation

Gegeben sind die Funktionen $f : \mathbb{R} \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}^2$ und $g : (0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} e^x \cos(y) \\ e^x \sin(y) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) \\ \arctan(\frac{y}{x}) \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Jacobimatrizen $J_f(x,y)$ und $J_g(x,y)$.

(b) Bestimmen Sie die Jacobimatrix $J_{g \circ f}(x,y)$ einmal mittels Kettenregel und dann indem Sie $g \circ f$ explizit bestimmen und ableiten.

D12. Ableitung von Matrixfunktionen

Sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Wir definieren die Funktion $f(A) = \det(A)$. Zeigen Sie, dass

$$f'(\mathbb{1})(A) = \operatorname{tr}(A).$$

Hierbei ist det bzw. tr die aus der linearen Algebra bekannte Determinante bzw. Spur. Außerdem kennen Sie aus der linearen Algebra einen Ausdruck für das charakteristische Polynom einer 2×2-Matrix, nämlich $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - \operatorname{tr}(A) \cdot \lambda + \det(A)$, zudem ist die Determinante multilinear, d.h. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

D13. Kurvendiskussion im Mehrdimensionalen

Gegeben sei die Funktion $f(x,y) = 3x^2 - x^2 y + y^2 - 2y$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe der Schnitte längs $y = 0$ bzw. $y = 4$, dass der Wertebereich von f gleich $\mathbb{R}$ ist.

(b) Bestimmen Sie alle stationären Stellen von f auf $\mathbb{R}^2$.

(c) Bestimmen Sie das Taylorpolynom 2. Ordnung an der Stelle $(0,1)$. Welche Eigenschaft besitzt demnach der Graph von f an der Stelle $(0,1)$?

(d) Zeigen Sie, dass f auf der Menge $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2+y^2 \leq 1\}$ ein Minimum sowie ein Maximum annimmt, ohne diese konkret zu berechnen.

D14. Taylorentwicklung

Bestimmen Sie das Taylorpolynom der folgenden Funktionen.

(a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x,y,z) = xe^z - y^2$ bis zur zweiten Ordnung im Punkt $(1,-1,0)$.

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = e^{x^2+y^2}\cos(x)$ bis zur vierten Ordnung im Punkt $(0,0)$.

(c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \sin(x^3 y^2)$ bis zur 25-ten Ordnung im Punkt $(0,0)$.