Zentrum Mathematik	Technische Universität München
Marius Gritl	SS 2020
Jens Willgeroth	Blatt 1

Ferienkurs Analysis 2 für Physik (MA9203)

Zentralübungsaufgaben

Z1. Normierte Räume

(a) Wiederholen Sie aus der linearen Algebra den Begriff der Norm.

(b) Wir betrachten nun den Vektorraum der stetigen Funktionen, $C([0,1])$, mit der 1-Norm und mit der Supremumsnorm. Finden Sie eine Folge stetiger Funktionen mit der Eigenschaft, dass $\|f_n\|_\infty = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\|f_n\|_1 \to 0$ für $n \to \infty$ gilt, und folgern Sie, dass die beiden Normen nicht äquivalent sind. Warum steht das nicht im Widerspruch zur in der Vorlesung vorgestellten Äquivalenz von Normen?

(c) Betrachten Sie die Vektorräume $C^1([0,1])$ und $C([0,1])$, jeweils mit der Supremumsnorm und die lineare Abbildung $D : C^1([0,1]) \to C([0,1])$, $f \mapsto f'$. Erklären Sie kurz, warum D linear ist, und zeigen Sie anhand der Folge $f_n(x) = x^n$, dass D nicht stetig ist.

Z2. Metrische Räume

(a) Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Zeigen Sie, dass $d(x,y) := \|x-y\|$ tatsächlich eine Metrik auf V definiert.

(b) Sei (M,d) ein metrischer Raum. Wir definieren die *diskrete Metrik* $d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = y, \\ 1 & \text{für } x \neq y. \end{cases}$

Zeigen Sie, dass diese Metrik nicht von einer Norm induziert wird.

Z3. Eine Unstetigkeit

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^6} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Untersuchen Sie f auf Stetigkeit.

Z4. Eigenschaften von Bild- und Urbildmengen unter stetigen Abbildungen

Seien (M,d), $(N,\tilde{d})$ metrische Räume, $f : M \to N$ stetig. Untersuchen Sie, wie sich die Teilmengenattribute *offen*, *abgeschlossen*, *beschränkt*, *kompakt*, *zusammenhängend*

(a) von $B \subseteq N$ auf $f^{-1}(B) \subseteq M$,

(b) von $A \subseteq M$ auf $f(A) \subseteq N$

übertragen.

Diskussionsaufgaben

D1. Inneres, Rand und Abschluss

Wir betrachten den Raum $\mathbb{R}^2$ mit der Euklidischen Norm $\|\cdot\|_2$. Untersuchen Sie jeweils, welche der Eigenschaften

(i) $\overline{M} = \overline{\operatorname{Int}(M)}$ (ii) $\partial M \subseteq M$ (iii) $\partial M \cap M = \emptyset$ (iv) $\partial M = \emptyset$

auf die folgenden Mengen zutreffen.

(a) $M = B_1(0)$
(b) $M = \overline{B_1(0)}$
(c) $M = \emptyset$
(d) $M = \mathbb{R}^2$
(e) $M = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$
(f) $M = \{(x,0) : x \in (0,1)\}$

Es genügt ein einfaches Ja oder Nein ohne Beweis.

D2. Konvergenz im $\mathbb{R}^n$
Konvergiert die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = \left(\frac{1}{n}, 1+e^{-n}, \frac{1}{\sin(n)}\right)$ im $\mathbb{R}^3$?

D3. Kompakte Mengen sind beschränkt
Zeigen Sie, wie in der Vorlesung behauptet, dass jede kompakte Teilmenge $A \subseteq M$ eines metrischen Raumes (M, d) beschränkt ist.
Hinweis: Kontraposition.

D4. Eigenschaften diverser Mengen
Bestimmen Sie mit kurzer Begründung, welche der folgenden Mengen offen, abgeschlossen, zusammenhängend, kompakt sind.

(a) $\mathbb{R}^2$
(b) $[0,1)$
(c) $[0,1) \cup [2,5]$
(d) $\{x \in \mathbb{R} \big| |x| > 0\}$
(e) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \big| x+y=0\}$
(f) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \big| x^4+y^4=1\}$

D5. Stetigkeit und Kompaktheit

(a) Finden Sie jeweils ein Beispiel für eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derart, dass die Bildmenge folgende Eigenschaften hat:

(i) offen und beschränkt,
(ii) kompakt,
(iii) abgeschlossen, unbeschränkt und $\neq \mathbb{R}$,
(iv) weder offen noch abgeschlossen.

(b) Finden Sie jeweils ein Beispiel für eine stetige Funktion $f : (0,1) \to \mathbb{R}$, welches den obigen Kriterien genügt.

D6. Beispiele für (Un-)Stetigkeit
Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \frac{y}{x^2} e^{-\left|\frac{y}{x^2}\right|}$ für $x \neq 0$ und $f(0,y) = 0$ sonst.
Zeigen Sie:

(a) f ist eine beschränkte Funktion und stetig auf $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$.
(b) f ist unstetig im Ursprung.
(c) $g(x,y) := xf(x,y)$ ist stetig auf $\mathbb{R}^2$.

D7. Stetigkeit im Mehrdimensionalen
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Warum ist f stetig auf $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$?
(b) Zeigen Sie, dass f im Nullpunkt nicht stetig ist.
(c) Zeigen Sie, dass nicht nur $f(\cdot, y)$ und $f(x, \cdot)$, sondern auch $t \mapsto f(t, \alpha t + \beta)$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ stetig ist.