

Probeklausur

Sommersemester 2019

– Lösung –

Korbinian ESCHBAUM, Jakob UNFRIED

Gesamtpunktzahl 73

Bearbeitungszeit 90 Minuten

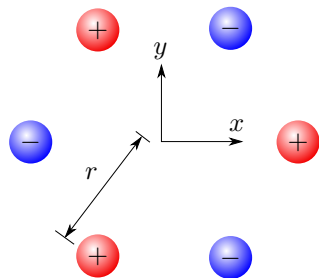
Beispielhafter Notenschlüssel:

Dieser Schlüssel wird in den meisten echten Klausuren als Ausgangspunkt genommen, aber letztendlich entscheidet der Professor, ob und wie er/sie ihn anpassen möchte. (Die meisten Experimentalphysik-Klausuren haben 90 Punkte. Dann sieht der Schlüssel natürlich anders aus, er ist aber prozentual gesehen gleich)

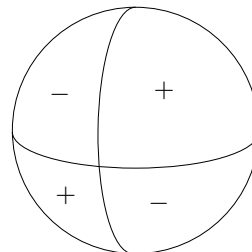
Punkte	55	52	49	46	43	40	37	34	31	28
Note	1.0	1.3	1.7	2.0	2.3	2.7	3.0	3.3	3.7	4.0

1 Elektrisches Feld (10 Punkte)

- (a) Übertragen Sie folgende Ladungsverteilungen auf Ihr Blatt und skizzieren Sie jeweils das Feldlinienbild des elektrischen Feldes \mathbf{E} :

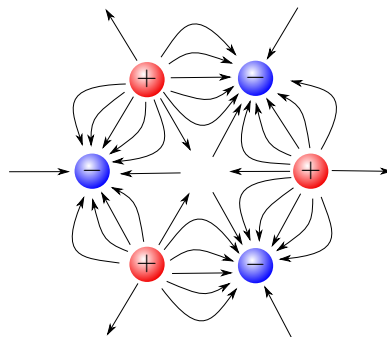


(i)

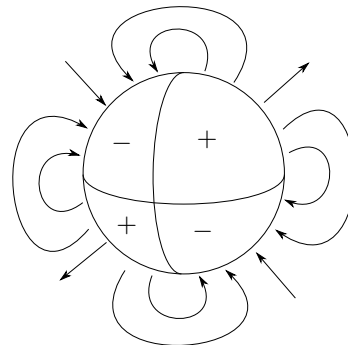


(ii)

Lösung: Das Feld kommt aus den positiven Ladungen heraus und endet in den negativen Ladungen.



(i)



(ii)

[2]

Betrachten Sie nun für die nachfolgenden Aufgaben die Abbildung (i). Für alle Ladungen gilt $|q| = 3e$. Der Ursprung zum Mittelpunkt beträgt jeweils $r = 1,5\text{ m}$.

- (b) Berechnen Sie das elektrische Feld (Betrag und Richtung) im Ursprung für den Fall, dass die rechte positive Ladung entfernt wird.

Lösung: Man kann sich überlegen, dass aus Symmetriegründen die negativen Ladungen am Ursprung nicht beitragen. Dementsprechend erhalten wir Beiträge ausschließlich durch die übrig gebliebenen positiven Ladungen. Die vertikalen Komponenten heben sich jeweils auf, sodass das resultierende Feld ausschließlich in x -Richtung zeigt. Der Beitrag der beiden Ladungen ist gleich groß.

$$\mathbf{E}(\mathbf{0}) = 2 \cdot \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r \cos(\pi/3)}{r^3} \mathbf{e}_x = \frac{3e}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_x =: E_0 \mathbf{e}_x \quad [1]$$

mit Betrag

$$E_0 = 1,92 \cdot 10^{-9} \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad [1]$$

- (c) Berechnen Sie die notwendige Arbeit, um die entfernte positive Ladung von $(\infty, 0, 0)$ wieder zum Ursprung zurück bewegen.

Hinweis: Für diese Aufgabe müssen Sie keine Integrale lösen.

Lösung: Das Potential am Ursprung ist eine Summe von Beiträgen von den 5 verbleibenden Ladungen

$$\phi(\mathbf{0}) = -3 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3e}{r} + 2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3e}{r} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3e}{r} = -2,88 \text{ nV} \quad [1]$$

Das Potential verschwindet im unendlichen („ $\frac{1}{\infty} = 0$ “). Wir berechnen die Arbeit als Potentialdifferenz

$$W = q\Delta\phi = \frac{9e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -1,38 \cdot 10^{-27} \text{ J} = -8,64 \cdot 10^{-9} \text{ eV} \quad [1]$$

- (d) Nun seien wieder alle 6 Ladungen vorhanden. Bestimmen Sie einen Ausdruck für das elektrische Feld $\mathbf{E}(x, 0, 0)$ auf der x -Achse.

Lösung: Auf der x -Achse befindet man sich direkt auf der Mittellinie zwischen den Einzelladungen. Daher heben sich die y -Anteile weg und es bleibt ein elektrisches Feld $\mathbf{E}(x, 0, 0) = E(x)\mathbf{e}_x$.

[1]

Wir summieren jeweils die folgenden Beiträge der Ladung i am Ort $(x_i, y_i, 0)$:

$$E_i(x) = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)_x}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \Big|_{\mathbf{r}=x\mathbf{e}_x} = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{x - x_i}{\sqrt{(x - x_i)^2 + y_i^2}^3} \quad [1]$$

Dabei tragen die beiden linken positiven gleich bei und die beiden rechten negativen auch:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x) &= \frac{3e}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-2(x - r \cos(\pi/3))}{\sqrt{(x - r \cos(\pi/3))^2 + (r \sin(\pi/3))^2}^3} + \frac{2(x + r \cos(\pi/3))}{\sqrt{(x + r \cos(\pi/3))^2 + (r \sin(\pi/3))^2}^3} - \frac{1}{(x + r)^2} + \frac{1}{(x - r)^2} \right] \mathbf{e}_x \\ &= \frac{3e}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{r - 2x}{\sqrt{x^2 + r^2 - xr}^3} + \frac{r + 2x}{\sqrt{x^2 + r^2 + xr}^3} + \frac{4xr}{(x^2 - r^2)^2} \right] \mathbf{e}_x \end{aligned} \quad [2]$$

Für die x_i war dabei die halbe Seitenlänge eines der gleichseitigen Dreiecke $r \cos(\pi/3) = r/2$ relevant, in den Nennern taucht in y_i die Höhe $r \sin(\pi/3)$ der Dreiecke auf.

2 Inhomogen geladener Stab (10 Punkte)

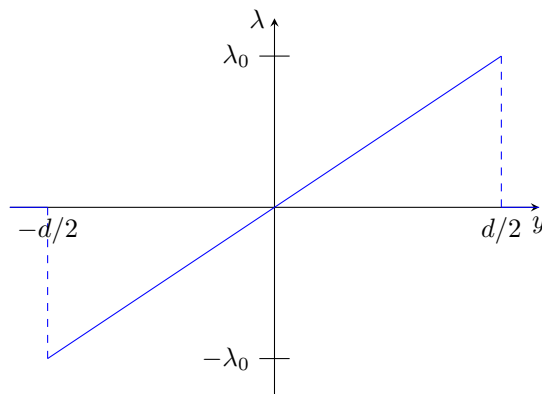
Betrachten Sie einen dünnen Stab der Länge $d = 20 \text{ cm}$ und vernachlässigbarer Dicke, dessen Mittelpunkt sich im Ursprung eines Koordinatensystems befindet und in y -Richtung orientiert ist. Die Längenladungsdichte dieses Stabes sei gegeben durch

$$\lambda(y) = \begin{cases} 2\lambda_0 y/d & |y| \leq d/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (1)$$

Der Stab befinde sich in einem homogenen elektrischen Feld $\mathbf{E} = E\mathbf{e}_x$ mit $E = 4 \text{ V/m}$.

(a) Skizzieren Sie die Ladungsverteilung $\lambda(y)$.

Lösung:



[2]

(b) Berechnen Sie λ_0 , sodass die obere Hälfte des Stabes die Gesamtladung $Q = 2 \text{ As}$ trägt. Berechnen Sie den Ladungsschwerpunkt y_S der oberen Hälfte.

Lösung:

Die Gesamtladung der oberen Hälfte ist gegeben durch

$$Q \stackrel{!}{=} \int_0^{d/2} \lambda(y) \, dy = \frac{2\lambda_0}{d} \int_0^{d/2} y \, dy = \frac{2\lambda_0}{d} \frac{1}{2} \frac{d^2}{4} = \frac{1}{4} \lambda_0 d \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_0 = \frac{4Q}{d} = 40 \text{ As/m}$$

[2]

Wir erhalten den Ladungsschwerpunkt mit

$$y_S = \frac{1}{Q} \int_0^{d/2} y \lambda(y) \, dy = \frac{1}{Q} \frac{2\lambda_0}{d} \int_0^{d/2} y^2 \, dy = \frac{1}{Q} \frac{2\lambda_0}{d} \frac{d^3}{24} = \frac{4}{\lambda_0 d} \frac{\lambda_0 d^2}{12} = \frac{d}{3} = 6,67 \text{ cm}$$

[2]

(c) Berechnen Sie nun das Dipolmoment des ganzen Stabes. Vergleichen Sie es mit dem Dipolmoment zweier Ladungen $\pm Q$ im Abstand $2y_S$ voneinander. Berechnen Sie dann das Drehmoment, das auf den Stab wirkt. In welche Richtung wird sich der Stab drehen?

Lösung:

Wir erhalten das Dipolmoment über

$$\mathbf{p} = \int \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) d^3r = \mathbf{e}_y \int_{-d/2}^{d/2} y \lambda(y) dy = \mathbf{e}_y \frac{2\lambda_0}{d} \int_{-d/2}^{d/2} y^2 dy = \mathbf{e}_y \frac{2\lambda_0}{d} \frac{2}{3} \frac{d^3}{8} = \frac{\lambda_0 d^2}{6} \mathbf{e}_y = \frac{4Q}{d} \frac{d^2}{6} \mathbf{e}_y = \frac{2}{3} Q d \mathbf{e}_y$$

[1]

$$|\mathbf{p}| = 0,267 \text{ A m s}$$

[1]

Dies entspricht genau dem Dipolmoment $2y_S Q \mathbf{e}_y$, welches wir von der Verteilung der Schwerpunktladungen erwarten.

$$\mathbf{D} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} = -\frac{2}{3} Q d E \mathbf{e}_z \quad ; \quad D = \frac{2}{3} Q d E = 1,067 \text{ N m}$$

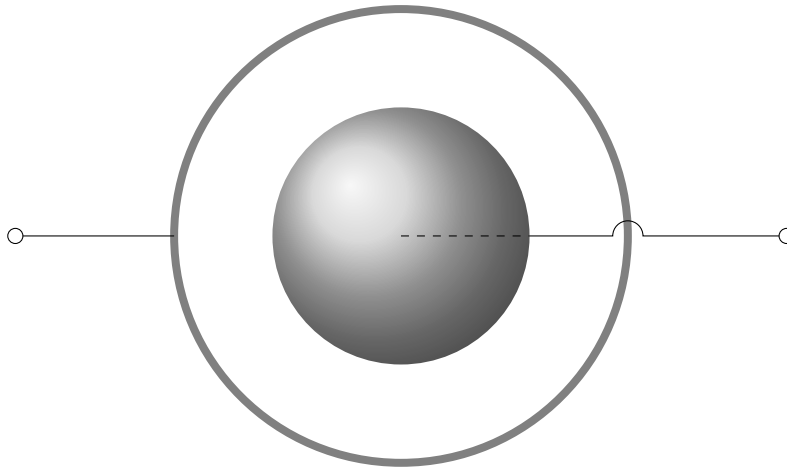
[1]

Der Stab wird sich also (bei Betrachtung von oben) im Uhrzeigersinn drehen.

[1]

3 Kondensator (10 Punkte)

Wir betrachten einen Kondensator der aus einer inneren Vollkugel mit Radius R_1 und einer äußeren Kugelschale mit Radius R_2 besteht. Der Anschluss der inneren Kugel befindet sich in ihrem Zentrum.



Nach Anlegen einer Spannung verhält sich die Kugel so, dass die äußere Schale mit einer konstanten Flächenladungsdichte $\sigma_0 = \frac{Q}{4\pi R_2^2}$ geladen ist und die innere Kugel mit einer konstanten Ladungsdichte $\rho_0 = -\frac{3Q}{4\pi R_1^3}$.

(a) In welche Richtung zeigt das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$? Von welchen Koordinaten hängt es ab?

Lösung: Wir benutzen Kugelkoordinaten (r, θ, φ) . Aus Symmetriegründen ist die Richtung \mathbf{e}_r und das Feld hängt nur von r ab. Es ist also

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(r) \mathbf{e}_r$$

[1]

(b) Bestimmen sie das elektrische Feld der Anordnung an allen Orten im Raum. Skizzieren sie die Abhängigkeit der Feldstärke $|\mathbf{E}|$ von r (der Kugelkoordinate).

Lösung: Wir benutzen den Satz von Gauss. Als Integrationsvolumen V wählen wir eine Kugel mit Radius R . Deren Rand ∂V ist die Kugeloberfläche mit Oberflächenelement $d\mathbf{A} = dA\mathbf{e}_r$.

[1]

Die Gesamtladung, die diese Kugel einschließt ist

$$Q_V = \begin{cases} \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_0 = -\frac{R^3}{R_1^3} Q & R < R_1 \\ -Q & R_1 < R < R_2 \\ 0 & R > R_2 \end{cases}$$

[1]

Nun Satz von Gauss:

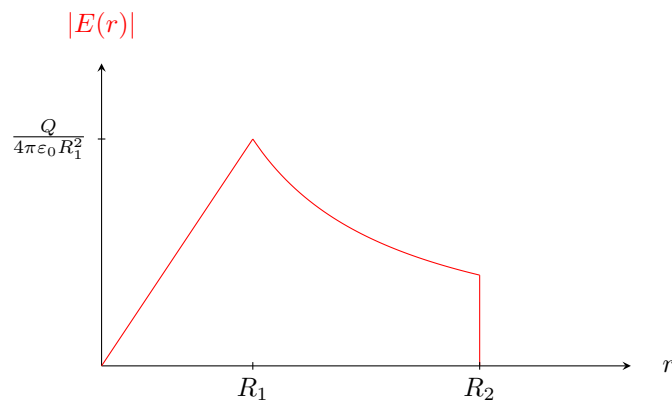
$$\frac{Q_V}{\varepsilon_0} = \int_V dV \frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} = \int_{\partial V} d\mathbf{A} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_{\partial V} dA E(r) = E(R) \int_{\partial V} dA = E(R) 4\pi R^2$$

[1]

Diese Gleichung können wir nun in jedem der 3 Bereiche auflösen

$$E(R) = \frac{Q_V}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \begin{cases} -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{R}{R_1^3} & R < R_1 \\ -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{R^2} & R_1 < R < R_2 \\ 0 & R > R_2 \end{cases}$$

[1]



[1]

- (c) Bestimmen sie die elektrische Spannung zwischen den Anschlüssen (also zwischen dem Zentrum der inneren Kugel und einem Punkt auf der äußeren).

Lösung: Wir integrieren auf einem radialen Pfad sodass $d\mathbf{r} \parallel \mathbf{E}$

$$\begin{aligned} U = \phi(0) - \phi(R_2) &= - \int_0^{R_2} dr E(r) = - \int_0^{R_1} dr \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{r}{R_1^3} + \int_{R_1}^{R_2} dr \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\left[\frac{r^2}{2R_1^3} \right]_0^{R_1} + \left[-\frac{2}{r} \right]_{R_1}^{R_2} \right) = \\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{2R_1} - \frac{2}{R_2} + \frac{2}{R_1} \right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{5R_2 - 2R_1}{2R_1R_2} \end{aligned}$$

[2]

- (d) Berechnen sie die Kapazität dieses Kondensators, wenn $R_1 = 6$ cm und $R_2 = 10$ cm.

Lösung:

$$C = \frac{Q}{U} = 8\pi\varepsilon_0 \frac{R_1R_2}{5R_2 - 2R_1} = 3,51 \text{ pF}$$

[2]

4 Induktion und Wechselstrom (12 Punkte)

- (a) Betrachten Sie eine kreisförmige Leiterschleife mit Radius R in einem homogenen Magnetfeld $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$ mit $B = 2,3 \text{ mT}$. Die Schleife liegt zu Anfang in der xy -Ebene. Die Schleife wird nun um eine Symmetrieachse gedreht und dadurch wird eine Spannung $U(t) = U_0 \sin(\omega t)$ induziert. Wenn $\omega = 40\pi \text{ s}^{-1}$ ist, berechnen Sie dann den Radius R , sodass die Spannung eine Amplitude von $U_0 = 0,5 \text{ V}$ hat. Wenn nun aber der Radius fest ist, wie muss man die Kreisfrequenz ω anpassen, um die Amplitude U_0 zu verdoppeln?

Lösung: Die Induktionsspannung ist gegeben über

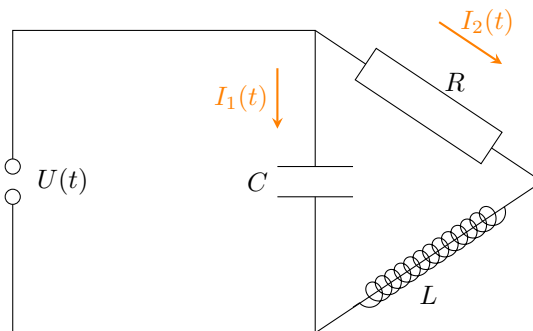
$$U_{\text{ind}}(t) = -\frac{d}{dt} \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}(t) = -\frac{d}{dt} B\pi R^2 \cos(\omega t) = B\pi R^2 \omega \sin(\omega t) \stackrel{!}{=} U_0 \sin(\omega t) \quad [2]$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{\frac{U_0}{B\omega\pi}} = 74,2 \text{ cm} \quad [1]$$

Es ist $U_0 \propto \omega$. Will man also bei festem Spulenradius die Amplitude verdoppeln, so muss man ω verdoppeln.

[1]

- (b) Den damit gewonnenen Wechselstrom $U(t) = U_0 \sin(\omega t)$ mit $U_0 = 0,5 \text{ V}$ und $\omega = 40\pi \text{ s}^{-1}$ nutzen wir nun, um den folgenden Schaltkreis zu betreiben (siehe Skizze):



Er besteht aus einem Kondensator mit Kapazität $C = 20 \text{ pF}$, einer Spule mit Induktivität $L = 100 \text{ mH}$ und einem Ohm'schen Widerstand $R = 15 \Omega$.

Bestimmen Sie daraus die Spannung $U_R(t)$ am Widerstand. Wie groß ist ihre Amplitude? Was ist ihre Phasenverschiebung gegenüber $U(t)$?

Für welche Frequenzen ω wird die Amplitude $U_R(t)$ maximal? Was ist dann die Phasenverschiebung?

Lösung: Hier genügt es nicht, einen Ersatzwiderstand zu konstruieren. Stattdessen müssen wir die Kirchhoff'schen Regeln zur Berechnung der Ströme benutzen.

$$U_{\text{ind}}(t) = \frac{I_1(t)}{i\omega C} = I_2(t)(R + i\omega L) \quad [1]$$

$$\Rightarrow I_2(t) = \frac{U_{\text{ind}}(t)}{R + i\omega L} = U_{\text{ind}}(t) \frac{R - i\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} = \frac{U_{\text{ind}}(t)}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \exp(-i\varphi) \quad [2]$$

Dabei ist die Phasenverschiebung φ bestimmt durch die folgende Gleichung

$$\tan \varphi = \frac{\omega L}{R} = 0,838 \quad \Rightarrow \quad \varphi = 0,698 \hat{=} 39,96^\circ$$

[2]

Daraus erhalten wir schließlich die Spannung

$$U_R(t) = \frac{RU_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \sin(\omega t - \varphi)$$

[1]

Mit einer Amplitude von

$$\frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} U_0 = 19,6 \text{ mV}$$

[1]

Diese wird maximal für sehr kleine Frequenzen $\omega \rightarrow 0$.

[1]

Dann ist die Phasenverschiebung

$$\tan \varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = 0$$

[1]

Nimmt man die Spannung am Widerstand ab, so hat man hiermit einen Tiefpassfilter gebaut.

5 Magnetfeld (10 Punkte)

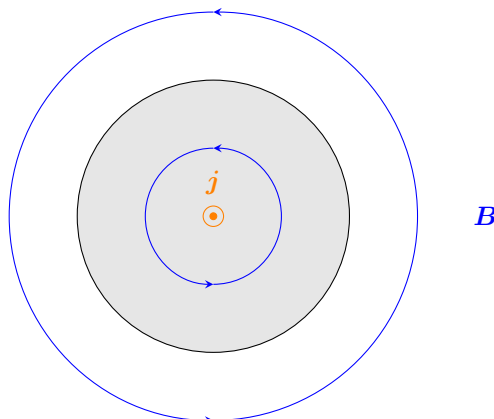
Betrachten Sie ein unendlich langes Kabel mit kreisförmigem Querschnitt und Radius $a = 2 \text{ mm}$. Seine Mittelachse liege auf der z -Achse. Der Leiter sei aus irgendeinem Grund in der Mitte besser leitfähig, so dass in ihm eine inhomogene Stromdichte herrscht. In Zylinderkoordinaten (r, φ, z) gilt innerhalb des Kabels:

$$\mathbf{j} = \frac{\alpha}{r} \mathbf{e}_z \quad (2)$$

mit $\alpha = 5 \cdot 10^{-3} \text{ A/m}$.

(a) Skizzieren Sie den Leiter im Querschnitt, sowie einige Feldlinien des magnetischen Felds.

Lösung: Die Richtung der Feldlinien erhält man mit der rechten-Hand-Regel.



[1]

(b) In welche Richtung zeigt das magnetische Feld $\mathbf{B}(\mathbf{r})$? Von welchen Koordinaten hängt es ab?

Lösung: Wir verwenden Zylinderkoordinaten (r, φ, z) . Aus Symmetriegründen ist $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = B(r)\mathbf{e}_\varphi$.

[1]

(c) Berechnen sie das magnetische Feld $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ innerhalb *und* außerhalb des Kabels.

Lösung: Wir verwenden das Ampere'sche Durchflutungsgesetz.

$$\int_A \mathbf{dA} \cdot \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}) = \int_{\partial A} \mathbf{dr} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r})$$

[1]

Als Integrationsfläche A wählen wir einen Kreis mit Radius R in der Querschnittsebene. Das Oberflächenelement ist $\mathbf{dA} = dA\mathbf{e}_z$. Der Rand ist der Kreisbogen. Seine Orientierung erhalten wir mit der rechten-Hand-Regel aus \mathbf{dA} , also $\mathbf{ds} = +ds\mathbf{e}_\varphi$.

[1]

Die linke Seite ist der Strom, der durch A fließt ($dA = r dr d\varphi$):

$$\int_A \mathbf{dA} \cdot \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}) = \mu_0 \int_A dA j(r) = \begin{cases} \mu_0 \alpha \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R dr r \frac{1}{r} = 2\pi\mu_0\alpha R & R < a \\ \mu_0 \alpha \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a dr r \frac{1}{r} = 2\pi\mu_0\alpha a & R > a \end{cases}$$

[2]

Die rechte Seite ist

$$\int_{\partial A} \mathbf{ds} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \int_{\partial A} ds B(r) = B(R) \int_{\partial A} ds = B(R)2\pi R$$

[1]

Gleichsetzen liefert

$$B(R) = \begin{cases} \mu_0 \alpha = 6,28 \text{ nT} & R < a \\ \mu_0 \alpha \frac{a}{R} = R^{-1} \cdot 12,6 \text{ pT m} & R > a \end{cases}$$

[1]

(d) In einem Abstand $d = 5 \text{ cm}$ von der Mittelachse befinde sich nun ein dünner Draht der Länge $L = 50 \text{ cm}$, durch den ein Strom von $I = 2 \text{ A}$ in die negative z -Richtung fließt. Welche Kraft wirkt auf diesen Draht? In welche Richtung zeigt sie?

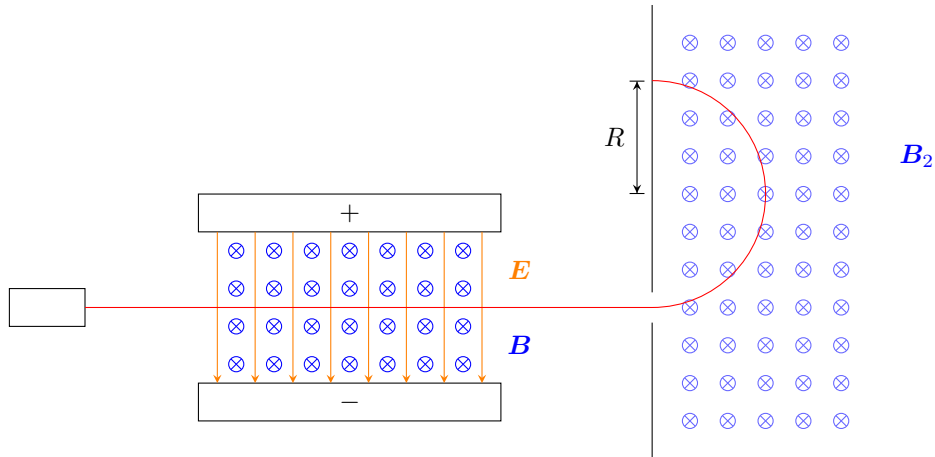
Lösung: Die Kraft zeigt weg vom Kabel (rechte-Hand-Regel), die beiden stoßen sich also ab.

$$F = ILB(d) = \mu_0 I \alpha \frac{aL}{d} = 25,13 \text{ nN}$$

[2]

6 Massenspektrometer (8 Punkte)

Ein Massenspektrometer kann benutzt werden, um die Massen von Ionen mit gleicher Ladung q zu separieren. Der prinzipielle Aufbau ist in folgender Skizze beschrieben:



- (a) Nehmen Sie an, Silberionen der Masse $M = 177 \cdot 10^{-27}$ kg und Ladung $q = e$ treten aus dem Emitter mit Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 10$ m/s aus. Mit Hilfe einer Beschleunigungsspannung U_B sollen diese auf die Endgeschwindigkeit $v = 2 \cdot 10^5$ m/s gebracht werden. Wie groß muss diese Spannung dafür gewählt werden?

Lösung:

Die dazugewonnene Energie im Feldbereich beträgt $E_{\text{el}} = qU$. Daraus resultiert eine Gesamtenergie von

$$E_{\text{ges}} = E_0 + E_{\text{el}} = \frac{1}{2} M v_0^2 + qU_B \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} M v^2 \quad \Leftrightarrow \quad U_B = \frac{M}{2q} (v^2 - v_0^2) = 22 \text{ kV}$$

[2]

Alternative: 2. Newton'sches Axiom

Sei d der Abstand der geladenen Platten voneinander. Auf die Silberionen wirkt die Kraft

$$\begin{aligned} F = M\dot{v} = qE = \frac{qU_B}{d} &\Rightarrow v(t) = \frac{qU_B}{Md}t + v_0 \\ x(t) = \frac{qU}{2Md}t^2 + v_0t &\stackrel{!}{=} d \\ \Leftrightarrow t = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2qU_B/M}}{qU_B/Md} &= \frac{md}{qU_B} \left(\sqrt{v_0^2 + \frac{2qU_B}{M}} - v_0 \right) \\ \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 + \frac{2qU_B}{M}} &\Leftrightarrow U_B = \frac{M}{2q} (v^2 - v_0^2) = 22 \text{ kV} \end{aligned}$$

- (b) Unmittelbar nach dem Ionenemitter befindet sich eine Kammer in der sowohl ein elektrisches als auch ein magnetisches Feld sind. Sie stehen senkrecht aufeinander und sind beide homogen. Wie muss das Verhältnis der Feldstärken E und B gewählt werden, damit ausschließlich Ionen mit einer Geschwindigkeit von $v = 2 \cdot 10^5$ m/s ungehindert passieren können?

Lösung:

Es ist notwendig, dass sich die Kräfte gegenseitig aufheben. Für positive Ionen sind die Richtungen der Kräfte entgegengesetzt. Außerdem müssen die Beträge gleich groß sein

$$qvB = |q\mathbf{v} \times \mathbf{B}| = F_L \stackrel{!}{=} F_C = |q\mathbf{E}| = qE \quad \Rightarrow \quad \frac{E}{B} = v = 2 \cdot 10^5 \text{ m/s}$$

[2]

- (c) Im darauf folgenden Kasten befindet sich ein weiteres homogenes Magnetfeld der Stärke $B_2 = 2 \text{ T}$. Die Ionen werden von ihm auf eine Kreisbahn mit Radius R abgelenkt. Auf der selben Seite, in die die Ladungsträger eindringen befindet sich ein Schirm, auf dem ein Licht aufblitzt, sobald ein Ion registriert wird. Der Abstand $y = 2R$ kann verwendet werden, um die Ionenmasse zu bestimmen. Wie hängt die Ionenmasse m von y ab? Bei welchem y treffen Silberionen mit Masse $M = 177 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ und Ladung $+e$ auf?

Lösung: Die Ionen werden von der Lorentzkraft auf einer Kreisbahn gehalten, diese wirkt also als Zentripetalkraft

$$\frac{mv^2}{R} = F_Z \stackrel{!}{=} F_L = qvB_2 \quad \Rightarrow \quad R = \frac{mv}{qB_2}$$

[2]

Daraus erhalten wir y und können nach m auflösen.

$$y = 2R = \frac{2mv}{qB_2} \quad \Leftrightarrow \quad m(y) = \frac{qB_2}{2v}y$$

[1]

Für die Silberionen bekommen wir

$$y_{\text{Ag}} = \frac{2Mv}{eB_2} = 221 \text{ mm}$$

[1]

7 Längenmessung mit Minkowski-Diagrammen (13 Punkte)

Betrachten Sie ein Lineal mit Länge L , das sich im System S nicht bewegt. Betrachten Sie außerdem ein System S' , das sich relativ zu S mit Geschwindigkeit v bewegt. Die Enden des Lineals liegen im System S zu einem Zeitpunkt $t = 0$ bei $x = 0$ und $x = L$ und im System S' zum Zeitpunkt $t' = 0$ bei $x' = 0$ und $x' = L'$.

- (a) Zeigen sie, dass das Raumzeitintervall $s^2 = (ct)^2 - x^2$ unabhängig vom Bezugssystem ist.

Lösung:

$$\begin{aligned} s'^2 &= (ct')^2 - x'^2 = \gamma^2(ct - \beta x)^2 - \gamma^2(x - \beta ct)^2 = \gamma^2((ct)^2 + (\beta x)^2 - 2ct\beta x - x^2 - (\beta ct)^2 + 2x\beta ct) \\ &= \gamma^2((ct)^2 - x^2 - \beta^2((ct)^2 - x^2)) = \frac{1 - \beta^2}{1 - \beta^2}((ct)^2 - x^2) = ct^2 - x^2 = s^2 \end{aligned}$$

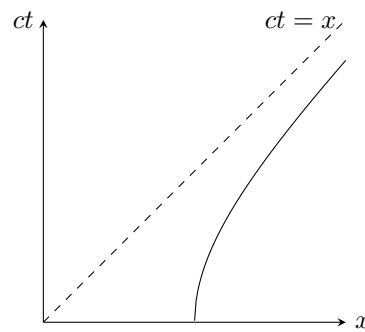
[2]

- (b) Zeichnen Sie in einem Minkowski-Diagramm die Kurve ein, auf der das Raumzeitintervall konstant $s^2 = -L^2$ ist.

Lösung:

$$(ct)^2 - x^2 = (ct')^2 - x'^2 = -L^2 \quad \Rightarrow \quad ct = \sqrt{x^2 - L^2}$$

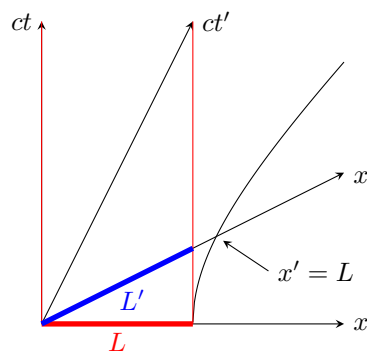
[1]



[2]

- (c) Zeichnen Sie in einem Minkowski-Diagramm (mit Achsen zu S und S') ein, wo sich das Lineal zu allen Zeitpunkten befindet. Zeichnen sie die Länge L im System S ein. Zeichnen Sie die Länge L' des Lineals im gestrichelten Bezugssystem ein. Verwenden Sie die Kurve aus (b), um die Markierung für die Distanz $x' = L$ auf der x' -Achse einzuzeichnen.

Lösung:



[4]

- (d) Gilt $L < L'$, $L > L'$ oder $L = L'$?

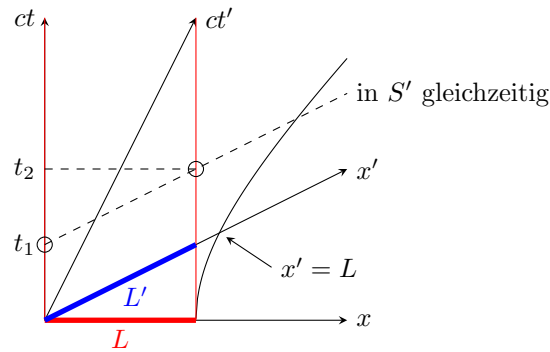
Lösung: Es ist $L' < L$.

[1]

Obwohl die Strecke L' im Minkowski Diagramm länger erscheint, ist sie eigentlich kürzer. Die x' -Achse hat eine andere Skalierung als die x -Achse. Man kann die Skalen mit den Kurven aus (b) ineinander übersetzen.

- (e) Im Beobachter-Bezugssystem S' findet eine Längenmessung zu einem beliebigen Zeitpunkt t' statt, indem jeweils die Position des vorderen und hinteren Endes des Lineals bestimmt werden. Zeichnen Sie in einem geeigneten Minkowski-Diagramm alle relevanten Ereignisse und Weltlinien ein. In welcher Reihenfolge findet diese Messung aus Sicht des Linealsystems S statt?

Lösung:



[2]

Betrachtet man die Verlängerung der Zeitkomponente der Ereignisse (Messungen) zur ct -Achse, so wird ersichtlich: Aus Sicht des Lineals wird zuerst das vordere und später das hintere Ende gemessen.

[1]

Konstanten

Elektrische Feldkonstante	$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ A s V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
Magnetische Feldkonstante	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N A}^{-2}$
Lichtgeschwindigkeit	$c = 2,99 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$
Elementarladung	$e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$