Übungsblatt 4 — 26.09.2019

Aufgabe 1 Beispiel

Klassifiziere die folgenden Differentialgleichungen in Bezug auf Linearität, Homogenität, ihre Ordnung und ihren Grad:

(a) $(x+y)^2 \frac{dy}{dx} = 3$,

(b) $\frac{d^2y}{dx^2} + y = x^3$,

(c) $2\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{ds}{dt} = 2s + s\cos t$

(d) $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 = y^2$

Lösung:

(a) Nicht-lineare, inhomogene DGL erster Ordnung und ersten Grades.

(b) Lineare, inhomogene DGL zweiter Ordnung und ersten Grades.

(c) Lineare, homogene DGL zweiter Ordnung und ersten Grades.

(d) Nicht-lineare, homogene (und autonome) DGL dritter Ordnung und zweiten Grades.

Aufgabe 2

Nutze die Methode der Separation der Variablen, um eine Funktion y zu finden, die $\frac{dy}{dx} = \frac{4x^3}{y^2}$ löst.

Lösung:

Zuerst arrangieren wir die Gleichung, sodass alle x auf der einen Seite und alle y auf der anderen Seite zu finden sind. Dazu multiplizieren wir beide Seiten mit y^2:

$$y^2 dy = 4x^3 dx$$

Jetzt können wir beide Seiten integrieren; die linke Seite nach y und die rechte nach x:

$$\begin{aligned}
\int y^2 dy &= \int 4x^3 dx \\
\frac{1}{3}y^3 &= \frac{4x^4}{4} + C \\
y^3 &= 3x^4 + C' \\
y &= \sqrt[3]{3x^4 + C'}
\end{aligned}$$

mit der Konstante $C' = 3C$.

Aufgabe 3

Nutze die Methode der Separation der Variablen, um eine Funktion y zu finden, die $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin(-x) + e^{4x}}{y^2}$ löst.

Lösung:

Zuerst arrangieren wir die Gleichung so um, dass alle x auf der einen Seite und alle y auf der anderen Seite zu finden sind. Dazu multiplizieren wir beide Seiten mit y^2:

$$y^2 dy = (\sin(-x) + e^{4x})dx$$

Jetzt können wir beide Seiten integrieren; die linke Seite nach y und die rechte nach x:

$$\begin{aligned}
\int y^2 dy &= \int (\sin(-x) + e^{4x}) dx \\
\int y^2 dy &= \int \sin(-x) dx + \int e^{4x} dx \\
\frac{1}{3} y^3 &= \cos(-x) + \frac{e^{4x}}{4} + C \\
y &= \left(\frac{3}{4} e^{4x} + 3\cos(x) + C' \right)^{\frac{1}{3}}
\end{aligned}$$

mit der Konstante $C' = 3C$.

Aufgabe 4 Lennard-Jones Potential

Die Kraft zwischen zwei Teilchen kann abgebildet werden durch die Funktion

$$F = \frac{12\varepsilon}{a_0} \left[\left(\frac{a_0}{r} \right)^{13} - \left(\frac{a_0}{r} \right)^{7} \right]$$

Für das Potential U einer Kraft F gilt $F = -\frac{d}{dr}U$. Berechne das Potential zwischen zwei Teilchen für den Fall, dass bei $r = a_0$ für das Potential $U = -\varepsilon$ gilt.

Lösung:

Wir lösen das Problem wieder durch Separation der Variablen. Also:

$$\begin{aligned}
-\frac{d}{dr} U &= \frac{12\varepsilon}{a_0} \left[\left(\frac{a_0}{r} \right)^{13} - \left(\frac{a_0}{r} \right)^{7} \right] \\
-\frac{d}{dr} U &= \frac{12\varepsilon}{a_0} \left[a_0^{13} r^{-13} - a_0^7 r^{-7} \right] \\
-\int dU &= \int \frac{12\varepsilon}{a_0} \left[a_0^{13} r^{-13} - a_0^7 r^{-7} \right] \\
-U &= \frac{12\varepsilon}{a_0} \left(-\frac{a_0^1 3}{12} r^{-12} + \frac{a_0^7}{6} r^{-6} \right) + C \\
U &= \varepsilon (a_0^{12} r^{-12} - 2a_0^6 r^{-6}) + C
\end{aligned}$$

Um C zu finden, substituieren wir $r = a_0$ und $U = -\varepsilon$

$$\begin{aligned}
-\varepsilon &= \varepsilon (a_0^{12} a_0^{-12} - 2a_0^6 a_0^{-6}) + C \\
-\varepsilon &= \varepsilon (1 - 2) + C \\
0 &= C
\end{aligned}$$

Einsetzen in unsere Gleichung liefert also $U = \varepsilon(a_0^1 2 r^{-12} - 2a_0^6 r^{-6})$.
Das obige Potential ist das sogenannte Lennard-Jones 6-12 Potential. a_0 ist der Gleichgewichtsabstand und ε die Energie, die benötigt wird, um ein Teilchen ins Unendliche zu bewegen.

Aufgabe 5

Löse die DGL zweiter Ordnung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 4y = 7e^{-2x}.$$

Lösung:

Wir lösen die zugehörige homogene Gleichung: Die Hilfsgleichung ist

$$m^2 + 4m + 4 = 0.$$

Das kann man faktorisieren zu $(m+2)^2 = 0$. Deshalb ist die zugehörige homogene Lösung

$$y_{CF} = e^{-2x}(A + Bx).$$

Für die partikuläre Lösung würden wir normalerweise die Versuchsfunktion Ce^{-2x} verwenden. Aber da $f(x)$ proportional zum ersten Term der homogenen Lösung ist, müssen wir mit x multiplizieren:

$$Cxe^{-2x}.$$

Das ist aber proportional zum zweiten Term der homogenen Funktion, also müssen wir ein weiteres Mal mit x multiplizieren:

$$Cx^2e^{-2x}$$

$$\begin{aligned}
y_{PI} &= Cx^2e^{-2x} \\
\frac{d(y_{PI})}{dx} &= 2Cxe^{-2x} - 2Cx^2e^{-2x} \\
\frac{d^2(y_{PI})}{dx^2} &= 2Cxe^{-2x} - 4Cxe^{-2x} - 4Cxe^{-2x} + 4Cx^2e^{-2x}
\end{aligned}$$

Einsetzen in die Originalgleichung ergibt:

$$\begin{aligned}
2Cxe^{-2x} - 8Cxe^{-2x} + 4Cx^2e^{-2x} + 4(2Cxe^{-2x} - 2Cx^2e^{-2x}) + 4Cx^2e^{-2x} &= 7e^{-2x} \\
2Ce^{-2x} &= 7e^{-2x} \\
\rightarrow 2C &= 7 \\
C &= \frac{7}{2} \\
y_{PI} &= \frac{7}{2}x^2e^{-2x}.
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Lösung:

$$y = e^{-2x}(A + Bx) + \frac{7}{2}x^2e^{-2x}.$$

Aufgabe 6 Oszillator

Die Bewegung eines gedämpften, getriebenen Oszillators kann beschrieben werden durch

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + b\frac{d\theta}{dt} = \lambda\cos(\omega t),$$

wobei θ der Auslenkungswinkel des Pendels aus der Gleichgewichtslage, t die Zeit, ω die Kreisfrequenz und λ und b Konstanten sind. Finde die allgemeine Lösung dieser DGL.

Lösung:

Wir lösen die zugehörige homogene Gleichung:

$$m^2 + bm = 0.$$

Ausklammern ergibt $m(m+b) = 0$. Also ist $m = 0$ oder $m = -b$. Daher ist die homogene Lösung:

$$\theta_{CF} = Ae^{0t} + Be^{-bt} = A + Be^{-bt}.$$

Für die partikuläre Lösung nutzen wir die Versuchsfunktion $C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t)$.

$$\begin{aligned}
\theta_{PI} &= C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t) \\
\frac{d(\theta_{PI})}{dt} &= -C\omega\sin(\omega t) + D\omega\cos(\omega t) \\
\frac{d^2(\theta_{PI})}{dt^2} &= -C\omega^2\cos(\omega t) - D\omega^2\sin(\omega t).
\end{aligned}$$

Einsetzen in die Originalgleichung liefert:

$$-C\omega^2 \cos(\omega t) - D\omega^2 \sin(\omega t) + b(-C\omega \sin(\omega t) + D\omega \cos(\omega t)) = \lambda \cos(\omega t).$$

Wir müssen die Koeffizienten von Sinus und Kosinus gleichsetzen:

$$\begin{aligned}
-C\omega^2 + bD\omega &= \lambda \\
-D\omega^2 - Cb\omega &= 0 \\
C &= \frac{\lambda}{b^2 - \omega^2} \\
D &= \frac{\lambda b}{\omega(b^2 - \omega^2)}
\end{aligned}$$

Damit ist die Lösung:

$$\theta = A + Be^{-bt} \frac{\lambda}{b^2 - \omega^2} \cos(\omega t) + \frac{\lambda b}{\omega(b^2 - \omega^2)} \sin(\omega t).$$

Aufgabe 7

(a) Verwende die Substitution $v = u/t$ zur Bestimmung der maximalen Lösung des Anfangwertproblems

$$\begin{cases} t^2 u'(t) - tu(t) - u^2(t) &= t^2, \\ u(1) &= 1. \end{cases}$$

(b) Bestimme durch Separation der Variablen die maximale Lösung des Anfangwertproblems

$$\begin{cases} u'(t) + e^{u(t)} &= 1, \\ u(0) &= log(2). \end{cases}$$

Lösung:

(a) Wir leiten die Substitutionsgleichung $v = u/t$ mit der Quotientenregel nach t ab. So erhalten wir unter Verwendung der Differentialgleichung für u und der Identität $u = tv$ die Differentialgleichung

$$\dot{v} = \frac{t\dot{u} - u}{t^2} = \frac{t^2\dot{u} - tu}{t^3} = \frac{t^2 + u^2}{t^3} = \frac{t^2 + t^2v^2}{t^3} = \frac{1 + v^2}{t}$$

für v. Durch Separation der Variablen erhalten wir unter Beachtung der Anfangsbedingungen $v(1) = u(1)/1 = 1$

$$\begin{aligned}
\int_{v(1)}^{v(t)} \frac{1}{1+v^2} dv &= \int_1^t \frac{1}{t} dt \\
\iff \arctan(v(t)) - \arctan(1) &= \log|t| \\
\iff v(t) &= \tan(\log|t| + \pi/4),
\end{aligned}$$

also nach Rücksubstitution

$$u(t) = \tan(\log|t| + \pi/4).$$

Diese Lösung strebt für $t \nearrow e^{\pi/4}$ gegen ∞ und für $t \searrow e^{-3\pi/4}$ gegen $-\infty$. Die maximale Lösung des Anfangswertproblems ist daher gegeben durch

$$u: \ (e^{-3\pi/4}, e^{\pi/4}) \to \mathbb{R}, \ t \mapsto t\tan(\log(t) + \pi/4).$$

(b) Durch Separation der Variablen und die Substitution $v = e^u$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\int_{u(0)}^{u(t)} \frac{1}{1-e^u} du = \int_0^t 1 dt \\
\iff &\int_2^{v(t)} \underbrace{\frac{1}{v(1-v)}}_{=1/v+1/(1-v)} dv = t \\
\iff &\log \left| \frac{v(t)}{1-v(t)} \right| - \log(2) = t \\
\iff &\left| \frac{v(t)}{1-v(t)} \right| = 2e^t.
\end{aligned}$$

Aufgrund des Startwerts $v(0) = 2$ ist die linke Seite gleich $v(t)/(v(t)-1)$. Auflösen nach $v(t)$ und Rücksubstitution ergibt dann

$$\begin{aligned}
&v(t) = \frac{2e^t}{2e^t - 1} \\
\iff &u(t) = \log\left(\frac{2e^t}{2e^t-1}\right) = t - \log(2e^t - 1) + \log(2).
\end{aligned}$$

Diese Lösung strebt für $t \searrow \log(1/2) = -\log(2)$ gegen ∞. Die maximale Lösung des Anfangswertproblems ist daher gegeben durch

$$u : \ (-\log(2), \infty) \to \mathbb{R}, \ t \mapsto t - \log\left(2e^t - 1\right) + \log(2).$$

Aufgabe 8

Zeige, dass

$$\exp(A+B) = \exp(A) + \exp(B)$$

für alle kommutierenden Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, d. h. $A \cdot B = B \cdot A$, gilt. Folgere, dass das Bild des Matrixexponentials exp in der Teilmenge $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ der invertierbaren Matrizen liegt.

Lösung:

Wir bemerken, dass die Exponentialreihe absolut konvergiert, und wir deshalb die Glieder umordnen dürfen. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\exp(A) \cdot \exp(B) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!k!} A^k \cdot B^{n-k} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k \cdot B^{n-k} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (A+B)^n = \exp(A+B),
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt verwendet haben, dass A und B kommutieren.
Da A mit $-A$ kommutiert, erhalten wir insbesondere

$$\mathbb{1}_n = \exp(0) = \exp(A + (-A)) = \exp(A) \cdot \exp(-A).$$

Das zeigt, dass das Bild vom Matrixexponentials exp aus invertierbaren Matrizen besteht.

Aufgabe 9

Sei $A \in \mathrm{Mat}_d(\mathbb{R})$. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$u'(t) = A \cdot u(t).$$

Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

a) Die Matrix A ist nilpotent.
b) Jede Lösung u der DGL ist ein Polynom.
c) Es gibt d linear unabhängige polynomiale Lösungen der DGL.

Lösung:
Wir zeigen c) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ a) $\Rightarrow$ c).
c) $\Rightarrow$ b): Offensichtlich.
b) $\Rightarrow$ a): Wie wir wissen, ist jede Lösung der DGL von der Form

$$u(t) = \exp(At) \cdot u_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k A^k u_0$$

mit $u_0 \in \mathbb{R}^d$. Diese ist nur dann ein Polynom, wenn es ein $l \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $A^k u_0 = 0$ für alle $k \geq l$. Sei nun $l_i \in \mathbb{N}$, sodass $A^k e_i = 0$ für alle $k \geq l_i$, $i = 1, ...d$. Für $l = \max\{\mathrm{l_1, ..., l_d}\}$ gilt dann, $A^k = 0$ für alle $k \geq l$. Somit ist A nilpotent.
a) $\Rightarrow$ c): Da A nilpotent ist, gibt es ein $l \in \mathbb{N}$, sodass $A^k = 0$ für alle $k \geq l$. Die Abbildungen $u_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$

$$u_i(t) = \exp(At)e_i = \sum_{k=0}^{l} \frac{1}{k!} A^k e_i, \qquad i = 1, ..., d,$$

sind dann polynomiale Lösungen der DGL gemäß Vorlesung. Diese sind linear unabhängig, da auch $e_i, ..., e_d$ linear unabhängig sind.

Aufgabe 10

Sei $A \in \mathrm{Mat}_d(\mathbb{R})$. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$x'(t) = A \cdot x(t).$$

Finde das Matrixexponential e^{At}, das die DGL löst für die folgenden Matrizen A.

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$,

(b) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Lösung:

(a) Wenn wir die d (hier zwei) linear unabhängigen Eigenvektoren $v_1, ..., d$ einer d-dimensionalen Matrix kennen, können wir die Koordinatentransformation

$$y \to x = Px = \sum_{j=1}^{d} y_j v_j \qquad \text{mit } P = [v_1|...|v_d]$$

definieren. A verhält sich unter dieser Transformation so:

$$AP = [Av_1|...|Av_d] = [\lambda_1 v_1|...|\lambda_d v_d] = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_d \end{pmatrix} = A\Lambda \Rightarrow P^{-1}AP = \Lambda.$$

Damit können wir die DGL schreiben als

$$\frac{dx}{dt} = Ax \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{d(P^{-1}x)}{dt} = P^{-1}\frac{dx}{dt} = P^{-1}Ax = P^{-1}APy = \Lambda y,$$

woraus folgt, dass

$$\frac{dy}{dt} = \Lambda \Rightarrow y(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_d t} \end{pmatrix} y_0.$$

Nach der Rücktransformation ergibt sich

$$x(t) = Py(t) = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_d t} \end{pmatrix} P^{-1} x_0 = e^{At} x_0.$$

Wir berechnen zuerst das charakteristische Polynom $\det(A - \mathbb{1}\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda + 2) = 0$. Also sind die Eigenwerte $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = -2$ und wir berechnen die Eigenvektoren:

$$(A - 3\mathbb{1})v_1 = 0 \iff \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1,1} \\ v_{1,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(A + 2\mathbb{1})v_2 = 0 \iff \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{2,1} \\ v_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Da v_1 und v_2 linear unabhängig sind, definiert

$$P = [v_1 | v_2] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

eine Koordinatentransformation und es gilt

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Also

$$\begin{aligned} e^{At} = P e^{\Lambda t} P^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{4}{5}e^{3t} + \frac{1}{5}e^{-2t} & \frac{1}{5}e^{3t} - \frac{1}{5}e^{-2} \\ \frac{4}{5}e^{3t} - \frac{4}{5}e^{-2t} & \frac{1}{5}e^{3t} + \frac{4}{5}e^{-2t}. \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(b) Wir bestimmen die Eigenwerte und -vektoren: $\det(A - \lambda\mathbb{1}) = \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = i,\ \lambda = -i$,

$$(A - i\mathbb{1})v_1 = 0 \iff \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1,1} \\ v_{1,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(A + i\mathbb{1})v_2 = 0 \iff \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{2,1} \\ v_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Daher

$$P = [v_1 | v_2] = \begin{pmatrix} i & i \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -i & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

und somit

$$\begin{aligned} e^{At} = P e^{\Lambda t} P^{-1} &= \begin{pmatrix} i & i \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{it} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}e^{-it} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -i & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

wobei wir die Eulersche Formel $e^{\pm it} = \cos t \pm i \sin t$, also $2\cos t = e^{it} + e^{-it}$ und $2 \sin t = -ie^{it} + ie^{-it}$ verwendet haben.

Aufgabe 11

Löse das Anfangswertproblem

$$y' = 2y + \sin x, \qquad y(0) = \frac{1}{2}.$$

Lösung:

Die allgemeine Lösung ist $y_a = e^{2x}$. Für die partikuläre Lösung kann man entweder nach Variation der Konstanten das Integral $\int \sin x e^{-2x} dx$ berechnen oder den Ansatz $y_p = A_1 \sin x + A_2 \cos x$ wählen. Mit dem Ansatz ergibt sich

$$y_p' = A_1 \cos x - A_2 \sin x = 2A_1 \sin x + 2A_2 \cos x + \sin x$$

und damit die Gleichungen $A_1 = 2A_2$ und $-A_2 = 2A_1 + 1$. Es ist somit $A_1 = -\frac{2}{5}$ und $A_2 = -\frac{1}{5}$. Die Lösung der DGL ist also von der Form

$$y(x) = Ce^{-2x} - \frac{2}{5} \sin x - \frac{1}{5} \cos x$$

für $C \in \mathbb{R}$. Mit dem Anfangswert ergibt sich $C = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{7}{10}$.