Technische Universität München
Fakultät für Physik

Ferienkurs Analysis 1
Donnerstag, 4.4.19

Tutoren:[1] Samuel Scalet, Eduard Koller

Letzte Änderung: 4. April 2019

[1]Skriptvorlage mit freundlicher Genehmigung von Jonas Habel, Florian Kollmannsberger

Inhaltsverzeichnis

1. Integration

Gestern haben wir uns ausgiebig mit Ableitungen beschäftigt. Heute drehen wir den Spieß um und werden Funktionen integrieren. Integrieren ist gerade das Gegenstück zum Ableiten. Man kann daher auch etwas flapsig von „aufleiten" statt von integrieren sprechen. Das Pendant zu einer Ableitung ist eine Stammfunktion (also eine „aufgeleitete" Funktion).

1.1. Definition und Rechenregeln

Wie definieren wir den Begriff „Stammfunktion" jetzt vernünftig? Nun, wenn wir eine Funktion f auf- und danach wieder ableiten, sollte ja genau wieder die ursprüngliche Funktion f herauskommen. Leiten wir eine Stammfunktion von f ab, wollen wir also f selbst bekommen. Diese Erkenntnis können wir zur Definition des Begriffs „Stammfunktion" verwenden:

Definition: Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ gegeben. Eine differenzierbare Funktion $F : (a, b) \to \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion von f, falls $F' = f$ gilt.

- Im Allgemeinen gibt es zu einer Funktion f nicht nur eine Stammfunktion. Wir können zu einer beliebigen Stammfunktion von f eine reelle Konstante dazuaddieren und erhalten eine andere Stammfunktion von f. Das liegt daran, dass die Konstante bei der Ableitung herausfliegt.
  Dies ist anders als bei der Ableitung, denn die Ableitung einer Funktion ist eindeutig.
- Um solche Stammfunktionen zu berechnen, verwenden wir Integrale. Das Integral einer Funktion auf einem Intervall kann man interpretieren als die Fläche zwischen dem Graphen der Funktion und der x-Achse. Was Integrale und Stammfunktionen miteinander zu tun haben, werden wir nachher sehen. Doch zuerst müssen wir den Begriff des Integrals definieren:

Definition: Betrachten wir eine Funktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Wir teilen den Definitionsbereich $[a, b]$ jetzt folgendermaßen in $n \in \mathbb{N}$ Teile auf:

$$[a, b] = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \ldots \cup [x_{n-2}, x_{n-1}] \cup [x_{n-1}, x_n] \tag{1}$$

Dabei ist $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-2} < x_{n-1} < x_n < b$. Wir können nun die Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse annähern, indem wir diese Fläche in n Rechtecke zerlegen. Die Breite des k-ten Rechtecks wählen wir dabei zu $x_k - x_{k-1}$. Für die Höhe des k-ten Rechtecks haben wir zwei Möglichkeiten: Wir können den *größten*, oder aber den *kleinsten* Funktionswert von f im Intervall $[x_k, x_{k-1}]$ wählen. Mathematisch drücken wir diesen kleinsten bzw. größten Funktionswert durch $\sup\limits_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x)$ bzw. $\inf\limits_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x)$ aus. Danach summieren wir die Flächen alle n Rechecke auf. Die beiden so erhaltenen Näherungen für die Fläche unter dem Graphen von f bezeichnen wir als

Obersumme O bzw. **Untersumme** U:

$$O = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x) \tag{2}$$

$$U = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \inf_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x) \tag{3}$$

Definition: Jetzt machen wir die Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ immer feiner, was bedeutet, dass wir $n \longrightarrow \infty$ schicken. Dabei werden die Approximationen der Fläche unter dem Graphen von f durch Ober- und Untersumme immer besser. Wenn die Ober- und die Untersumme für immer feinere Zerlegungen gegen denselben Wert $A \in \mathcal{R}$ konvergiert, dann nennt man die Funktion f **Riemann-integrabel** und den Wert A nennt man das **Riemann-Integral** von f. Wir schreiben:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := A \tag{4}$$

A ist dann gleichzeitig auch die Fläche unter dem Graphen der Funktion f.

Bemerkung:

(a) Die Notation $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ist relativ logisch. Vergleichen wir ihn mit dem Ausdruck für die Ober- bzw. die Untersumme. Die Summe $\sum_{k=1}^{n}$ wird für $n \to \infty$ durch $\int_a^b$ ersetzt. Die x-Differenz $x_k - x_{k-1}$ wird unendlich klein und wird durch $\mathrm{d}x$ ersetzt. $\sup\limits_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x)$ bzw. $\inf\limits_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x)$ nähern sich für immer feinere Zerlegungen immer weiter einander an und werden in der Notation daher einfach durch $f(x)$ ersetzt.

(b) Ist eine Funktion f auf $[a, b]$ Riemann-integrierbar schreibt man auch $f \in \mathcal{R}[a, b]$.

Satz: Jede stückweise monotone oder stückweise stetige Funktion ist Riemann-integrierbar.

Satz (Rechenregeln): Für Riemann-Integrale gibt es ein paar Rechenregeln, die man kennen sollte. Seien $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ zwei Riemann-integrierbare Funktionen, sowie $c \in [a, b]$ und $k \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

a) $\int_a^b f(x) + kg(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + k \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ (Linearität des Integrals)

b) $f(x) \leq g(x) \;\; \forall x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ (Monotonie des Integrals)

c) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$

d) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$

e) $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$

Bemerkung: Der Raum $\mathcal{R}[a, b]$ ist nach obrigen Rechenreglen ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Zusammenfassung: In diesem Kapitel haben wir **Stammfunktionen**, die Definition des Riemannintegrals als **Grenzwert der Ober und Untersumme** sowie einige **Rechenregeln** kennen gelernt.

1.2. Mittelwertsatz und Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

In diesem Kapitel wird der Mittelwertsatz und der Hauptsatz der Differential - und Integralrechnung (HDI) betrachtet. Während der Mittelwertsatz der Integralrechnung analog zu dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung ist, schafft der HDI eine Verbindung zwischen Integralen und Stammfunktionen.

Satz (Mittelwertsatz der Integralrechnung): Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann existiert ein $\xi \in [a, b]$, sodass

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a) \tag{5}$$

Bemerkungen:

- Anders ausgedrückt: Man kann das Integral über eine Funktion f durch das Integral über ein Rechteck der Breite $b - a$ und der Höhe $f(\xi)$ ersetzen.
- Wichtig hierbei ist, dass die Funktion stetig sein muss. Einfach riemann-integrierbar reicht nicht mehr aus.

Satz: Jetzt schlagen wir den Bogen von Integralen zu Stammfunktionen. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Für jedes $c \in [a, b]$ ist

$$F(x) := \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t \tag{6}$$

eine Stammfunktion von f. Weil sich alle Stammfunktionen nur um eine Konstante unterscheiden, schreiben wir der Einfachheit halber auch häufig nur:

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x \tag{7}$$

Ein solches Integral ohne Integralgrenzen nennt man auch **unbestimmtes Integral**.

Satz (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung): Aus dem vorherigen Satz folgt direkt:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b \tag{8}$$

Bemerkung: Dies ist der Schlüssel zur Frage, wie man so ein Integral eigentlich konkret auswertet. Man braucht „nur“ eine Stammfunktion des Integranden zu finden und in den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung einzusetzen, schon hat man das Integral gelöst. Allerdings ist das Auffinden einer Stammfunktion häufig nicht ganz einfach (manchmal sogar unmöglich), wie wir noch sehen werden.

1.3. Uneigentliche Integrale

Wir haben bisher nur Integrale auf kompakten Intervallen $[a, b]$ betrachtet. Man kann das Riemann-Integral aber auch verallgemeinern auf den Fall, dass zum Beispiel eine oder beide Integralgrenzen $\pm\infty$ ist.

Definition: Sei $-\infty < a < b \leq \infty$. Sei außerdem $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ auf jedem Intervall $[a, x]$ mit $x \in [a, b)$ Riemann-integrierbar. Dann ist

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{x \nearrow b} \int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x \tag{9}$$

das **uneigentliche Riemann-Integral** von f von a bis b.

Bemerkungen:

- Wir können dies analog für Integrale über ein Intervall $(a, b]$ mit $-\infty \leq a < b < \infty$ definieren.
- Für Integrale über ein Intervall (a, b) mit $-\infty \leq a < b \leq \infty$ teilen wir das Integral an irgendeiner Stelle auf, sodass wir die beiden Limiten gegen a und b getrennt lösen können.
- Trotz unendlicher Integralgrenzen kann der Wert des Integrals endlich sein, und trotz endlicher Integralgrenzen kann der Wert des Integrals unendlich sein. Wie kann man jetzt feststellen, ob ein Integral endlichen Wert hat (d.h. ob es konvergiert)? Dafür gibt es zwei Kriterien:

Satz (Vergleichskriterium): Für $f : [1, \infty) \to [0, \infty)$ monoton fallend sind äquivalent:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \text{ konvergiert} \;\Leftrightarrow\; \int_1^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ konvergiert}$$

Satz (Majorantenkriterium): Sei $-\infty < a < b \leq \infty$. Sei außerdem $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ auf jedem Intervall $[a, x]$ mit $x \in [a, b)$ Riemann-integrierbar. Sei zudem $g : [a, b) \to \mathbb{R}$ so, dass $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ konvergiert. Es gilt:

$$|f(x)| \leq g(x) \text{ für } x \in [a, b) \Longrightarrow \left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \tag{10}$$

Bemerkungen:

- Anders ausgedrückt: Wir schätzen das Integral, dessen Konvergenz wir überprüfen möchten (also $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$), gegen ein anderes Integral $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ ab, von dem wir bereits wissen, dass es konvergiert. Ist der Integrand $f(x)$ des abzuschätzenden Integrals vom Integranden $g(x)$ des bereits bekanntermaßen konvergierenden Integrals eingesperrt (also $|f(x)| < g(x)$), dann ist auch das Integral über $f(x)$ durch das Integral über $g(x)$ eingesperrt.
- Analog können wir auch Definitionsbereiche wie $(a, b]$ oder (a, b) handhaben.

Beispiel: Betrachten wir das Integral $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}+1}\,\mathrm{d}x$. Dessen Wert ist auf den ersten Blick nicht leicht zu berechnen. Wir können aber zumindest abschätzen, dass das Integral konvergiert. Dafür müssen wir erkennen, dass $\sqrt[3]{x}+1 \geq \sqrt[3]{x}$ ist, womit direkt folgt, dass $\frac{1}{\sqrt[3]{x}+1} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ ist. Wir können jetzt das Majorantenkriterium anwenden und sehen, dass das Integral konvergiert:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}+1}\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{-\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\right]_0^1 = \frac{3}{2} < \infty \tag{11}$$

Zusammenfassung: Neben der **Definition von uneigentlichen Integralen** haben wir auch das **Vergleichskriterium** und das **Majorantenkriterium** kennen gelernt.

1.4. Integrationstechniken

Wie kann man jetzt Integrale konkret berechnen? Zuerst sollte man wissen, dass Integrale zu lösen deutlich schwerer ist als Abzuleiten. Während Ableiten eher eine Fingerübung ist, ist Integrieren eine Kunst und erfordert bei komplizierteren Integralen einiges an Erfahrung. Allerdings existieren ein paar Techniken, die einem das Leben ein bisschen einfacher machen.
Grundlage zur Berechnung eines Integrals ist das Finden einer Stammfunktion. Dann kann man das Integral über den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung leicht auswerten. Es gibt einige wichtige einfache Stammfunktionen, die man auf jeden Fall im Kopf haben sollte:

Satz: Sei $k \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$. Dann gilt:

a) $\int x^k\,\mathrm{d}x = \frac{x^{k+1}}{k+1}$ $\quad\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \log|x|$

b) $\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x$ $\quad\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x$

c) $\int \sinh x\,\mathrm{d}x = \cosh x$ $\quad\int \cosh x\,\mathrm{d}x = \sinh x$

d) $\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x$

Bemerkung: Man kann die obigen Aussagen leicht überprüfen, indem man die Stammfunktion auf der rechten Seite ableitet und prüft, ob man den Integrand des Integrals auf der linken Seite erhält.

Satz (partielle Integration): Seien $f, g : [a, b] \longrightarrow R$ stetig differenzierbar. Dann gilt:

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x \tag{12}$$

Bemerkungen:

- Diese Integrationstechnik ist hilfreich, wenn man ein Produkt zweier Funktionen integrieren möchte, von denen sich die eine (f) leicht aufleiten und die andere (g) leicht ableiten lässt (Daher nennt man die partielle Integration manchmal auch „Produktintegration“). Man „schiebt“ dabei sozusagen die Ableitung von f auf g.

- Die Regel für die partielle Integration folgt direkt aus der Produktregel für Ableitungen: $(fg)' = f'g + fg'$.
- Einige Funktionen können integriert werden, indem sie durch Einfügen einer 1 zu einem Produkt umgeschrieben werden.
- Die partielle Integration kann man auch für unbestimmte Integrale anwenden.

Beispiel: Betrachten wir das Integral $\int xe^x \, \mathrm{d}x$. Wir sehen, dass x sehr leicht abzuleiten ist, während e^x sehr leicht aufzuleiten ist. Wir setzen also $f(x) = e^x$ und $g(x) = x$ und erhalten:

$$\int xe^x \, \mathrm{d}x = xe^x - \int 1 \cdot e^x \, \mathrm{d}x = xe^x - e^x = (x-1)e^x \tag{13}$$

Satz (Substitution): Seien $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ und $f : [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, wobei $c = g(a)$ und $d = g(b)$. Dann gilt:

$$\int_a^b f(g(y))g'(y) \, \mathrm{d}y = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x) \, \mathrm{d}x \tag{14}$$

Wir substituieren also $g(y)$ durch x. Andersherum gilt („umgekehrte Substitution“):

$$\int_c^d f(x) \, \mathrm{d}x = \int_{g^{-1}(c)}^{g^{-1}(d)} f(g(y))g'(y) \, \mathrm{d}y \tag{15}$$

Bemerkungen:

- Diese Integrationstechnik ist hilfreich, wenn der Integrand aus zwei ineinandergeschachtelten Funktionen ($f(g(x))$) besteht und die Ableitung der inneren Funktion ($g'(x)$) zum Beispiel konstant ist oder sich irgendwie bei der Substitution weghebt.
- Die Substitutionsregel folgt direkt aus der Kettenregel für Ableitungen: $(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$
- Einige Funktionen können integriert werden, indem man trigonometrische Funktionen wie sin, cos, tan oder sinh, cosh, tanh für eine umgekehrte Substitution verwendet.
- Die Substitutionsregel kann man auch für unbestimmte Integrale anwenden.

Beispiel: Betrachten wir das Integral $\int_0^\infty ye^{-y^2} \, \mathrm{d}y$. Es fällt auf, dass das y vor der Exponentialfunktion gerade $-\frac{1}{2}$-mal die Ableitung des Exponenten ist. Wir Substituieren also den Exponenten: $g(y) = -y^2$. Dann gilt:

$$\int_0^\infty ye^{-y^2} \, \mathrm{d}y = -\frac{1}{2} \int_0^\infty g'(y)e^{g(y)} \, \mathrm{d}y = -\frac{1}{2} \int_{g(0)}^{g(\infty)} e^x \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{2} \int_0^{-\infty} e^x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 e^x \, \mathrm{d}x \tag{16}$$

$$= \frac{1}{2} \left[e^x\right]_{-\infty}^0 = \frac{1}{2} \tag{17}$$

Satz (Partialbruchzerlegung): Möchte man schwierigere rationale Funktionen der Form $\frac{f(x)}{g(x)}$ integrieren, wobei $f(x)$ und $g(x)$ Polynome sind und der Grad von f kleiner als der Grad von g ist, bietet sich häufig die **Partialbruchzerlegung** an. Diese ist im allgemeinen Fall recht kompliziert, weswegen wir uns hier auf den Spezialfall beschränken möchten, dass alle Nullstellen des Nennerpolynoms $g(x)$ alle reell sind.
Betrachten wir also eine rationale Funktion der Form

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sum_{m=0}^{\alpha} a_m x^m}{\sum_{n=0}^{\beta} b_n x^n} \tag{18}$$

Dabei sind α der Zählergrad, $\beta > \alpha$ der Nennergrad und a_m bzw. b_n die Koeffizienten des Zähler- bzw. Nennerpolynoms. Wir fordern zudem der Einfachheit halber, dass $b_\beta = 1$ ist. Dann können wir das Nennerpolynom schreiben als

$$g(x) = \prod_{n=1}^{r} (x - x_i)^{m_i} \tag{19}$$

wobei $x_i \in \mathbb{R}$ die Nullstellen des Nennerpolynoms, r die Anzahl der Nullstellen und m_i die entsprechenden Vielfachheiten sind. Man kann jetzt die Funktion $\frac{f(x)}{g(x)}$ folgendermaßen zerlegen:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{c_{ij}}{(x - x_i)^j} \tag{20}$$

Dabei sind $c_{ij} \in \mathbb{R}$ eindeutig bestimmte, reelle Koeffizienten. Diese Koeffizienten kann man jetzt durch Multiplikation von $g(x)$ auf beiden Seiten der Gleichung 20, Ordnen nach Potenzen von x und anschließenden Koeffizientenvergleich erhalten. Die durch diese Zerlegung erhaltene Funktion lässt sich einfach integrieren:

$$\int \frac{f(x)}{g(x)} \,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{m_i} \int \frac{c_k}{(x - x_i)^j} \,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{r} \left(c_{i1} \log|x - x_i| - \sum_{j=2}^{m_i} \frac{1}{j-1} \frac{c_{ij}}{(x - x_i)^{j-1}} \right) \tag{21}$$

Bemerkung: Falls der Zählergrad größer als der Nennergrad sein sollte, muss man vor der Partialbruchzerlegung eine Polynomdivision durchführen.

Beispiel: Diese doch recht komplizierten Formeln lassen sich wahrscheinlich am besten mit einem Beispiel veranschaulichen. Betrachten wir die Funktion $x \longmapsto \frac{2x+1}{x^3-x^2-x+1}$.

- Als erstes müssen wir die Nullstellen des Nenners herausfinden. Bei einem Polynom dritten Grades ist das erstmal nicht so leicht, aber durch Raten finden wir die Nullstelle 1. Dann folgt:

$$x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)(x^2-1) = (x-1)(x-1)(x+1) = (x-1)^2(x+1) \tag{22}$$

  Wir erhalten also die beiden anderen Nullstellen bei 1 und -1. Bei 1 liegt eine doppelte Nullstelle vor. Daher erhalten wir $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $m_1 = 2$, $m_2 = 1$.

- Der Satz über die Partialbruchzerlegung sagt uns jetzt, dass wir unsere Funktion $x \longmapsto \frac{2x+1}{x^3-x^2-x+1}$ schreiben können als:

$$\frac{2x+1}{x^3 - x^2 - x + 1} = \frac{c_{11}}{x-1} + \frac{c_{12}}{(x-1)^2} + \frac{c_{21}}{x+1} \tag{23}$$

- Jetzt multiplizieren wir mit dem Nennerpolynom $x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)^2(x+1)$ durch und ordnen nach Potenzen von x:

$$\begin{aligned} 2x + 1 &= c_{11}(x-1)(x+1) + c_{12}(x+1) + c_{21}(x-1)^2 && (24)\\ &= c_{11}(x^2-1) + c_{12}(x+1) + c_{21}(x^2 - 2x + 1) && (25)\\ &= x^2(c_{11} + c_{21}) + x(c_{12} - 2c_{21}) + 1(-c_{11} + c_{12} + c_{21}) && (26) \end{aligned}$$

- Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir ein lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten c_{11}, c_{12} und c_{21}:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{12} \\ c_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{27}$$

  Dieses wird durch $c_{11} = \frac{1}{4}$, $c_{12} = \frac{3}{2}$ und $c_{21} = -\frac{1}{4}$ gelöst.

- Wir erhalten also:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+1}{x^3 - x^2 - x + 1}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{4}\int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x + \frac{3}{2}\int \frac{1}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x && (28)\\ &= \frac{1}{4}\log|x-1| - \frac{3}{2}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{4}\log|x+1| && (29)\\ &= \frac{1}{4}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{3}{2}\frac{1}{x-1} && (30) \end{aligned}$$

Zusammenfassung: Die drei wesentlichen Integrationstechniken sind: **partielle Integration, Substitution, Partialbruchzerlegung**.

2. Funktionenfolgen

Reelle und komplexe Folgen haben wir bereits im Detail kennengelernt. Wir können jetzt auch Folgen von Funktionen betrachten. Diese sind ein bisschen komplizierter zu handhaben und zeigen einige interessante Verhaltensweisen. Zuerst einmal können wir uns, wie bei reellen und komplexen Folgen auch, Konvergenz anschauen:

Definition: Sei $(f_n)_{n\in\mathrm{N}}$ eine Folge von Funktionen $f_n : \mathbb{R} \supset D \longrightarrow \mathbb{R}$. Die Folge $(f_n)_{n\in\mathrm{N}}$ **konvergiert punktweise** gegen die Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, wenn gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R} \tag{31}$$

Beispiel: Betrachten wir die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R};\ x \mapsto x^n$. Diese Folge konvergiert punktweise gegen die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R};\ x \longmapsto \begin{cases} 0 & 0 \le x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$.

Bemerkung: Wie wir an unserem Beispiel sehen, muss die Grenzfunktion nicht stetig sein, obwohl alle Folgenglieder stetige Funktionen sind. Man sagt, die punktweise Konvergenz erhält die Stetigkeit nicht. Wir können den Konvergenzbegriff allerdings verschärfen:

Definition: Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $f_n : \mathbb{R} \supset D \longrightarrow \mathbb{R}$. Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **konvergiert gleichmäßig** gegen die Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, wenn gilt:

$$\sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{32}$$

Wir schreiben auch $f_n \overset{\text{glm.}}{\longrightarrow} f$.

Bemerkungen:

- Gleichmäßige Konvergenz erhält die Stetigkeit: Konvergiert eine Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion f und sind alle Folgenglieder f_n stetige Funktionen, so ist die Grenzfunktion f auch stetig.
- Gleichmäßige Konvergenz erlaubt das Vertauschen von Limes und Integral. Konvergiert eine Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion f und sind alle Folgenglieder f_n Riemann-integrierbar, dann ist f auch Riemann-integrierbar und es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{33}$$

Dabei ist $[a, b] \subset D$ (D ist der Definitionsbereich der Funktionen f_n). Die Aussage gilt nicht für Integrale mit unendlichen Integrationsgrenzen!

Beispiele:

- Die Funktionenfolge $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R};\ x \mapsto x^n$ konvergiert nicht gleichmäßig gegen ihre Grenzfunktion, da alle Folgenglieder stetig sind, die Grenzfunktion aber nicht.
- Die Funktionenfolge $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R};\ x \mapsto \frac{x}{n}$ (Ursprungsgeraden, die mit steigendem n immer flacher werden) konvergiert gleichmäßig gegen die Nullfunktion, da

$$\sup_{x\in[0,1]} \left|\frac{x}{n} - 0\right| = \sup_{x\in[0,1]} \frac{x}{n} = \frac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{34}$$

- Die Funktionenfolge $f_n : (0, 1] \to \mathbb{R};\ x \mapsto \frac{n}{1+(nx)^2}$ konvergiert punktweise, aber nicht gleichmäßig gegen die Nullfunktion, da

$$\int_0^1 \frac{n}{1 + (nx)^2}\,\mathrm{d}x \overset{y=nx}{=} \int_0^n \frac{1}{1 + y^2}\,\mathrm{d}y = [\arctan(y)]_0^n = \arctan(n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2} \tag{35}$$

aber $\int_0^1 0\,\mathrm{d}x = 0$. Limes und Integral vertauschen also nicht, womit die Konvergenz nicht gleichmäßig sein kann.

3. Differentialgleichungen

3.1. Matrixexponential

Ihr wisst aus der Physik vielleicht schon, dass Differentialgleichungen wie z.B. $x'(t) = ax(t)$ von Funktionen der Art $x(t) = x(0)e^{at}$ gelöst werden. Schwieriger wird es, wenn man Differentialgleichunssysteme der Form $\begin{cases} x'(t) = ax(t) + by(t) \\ y'(t) = cx(t) + dy(t) \end{cases}$ lösen möchte. Mithilfe der Matrix-Vektor-Schreibweise kann man solche Systeme zunächst auf die Form $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$. Dies kann man auch schreiben als $X'(t) = AX(t)$, wobei $X(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ und $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist. Das sieht ja schon recht ähnlich aus zu der Differentialgleichung $x'(t) = ax(t)$, die wir am Anfang hatten. Es wäre schön, wenn man die Lösung einfach genauso mit der Exponentialfunktion hinschreiben könnte, also $X(t) = X(0)e^{tA}$. Dafür müssen wir aber zuerst definieren, was „e hoch eine Matrix" überhaupt sein soll. Um das zu tun, benutzen wir einfach die Potenzreihenentwicklung der e-Funktion:

Definition: Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Dann ist das **Matrixexponential** von A definiert durch

$$\exp(A) := e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \mathbb{1} + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{6}A^3 + \dots \tag{36}$$

Berechnung:

- Allgemein: über die Jordan-Zerlegung
- Spezialfall: $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ sei diagonalisierbar, also $A = SDS^{-1}$ mit einer Diagonalmatrix $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ und S einer regulären Matrix. Dann gilt:
$$e^A = Se^DS^{-1} = S \cdot \mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}) \cdot S^{-1} \tag{37}$$
- Insbersondere bei 2×2-Matrizen (bedingt auch bei 3×3-Matrizen) kann es sinnvoll sein, ein paar Potenzen von A (A^2, A^3, ...) auszurechnen und nach einem Muster zu suchen, sodass man ohne Jordan-Zerlegung einen allgemeinen Ausdruck für A^k angeben kann. Dann lässt sich das Matrixexponential über die Reihendefinition leicht berechnen. Betrachte zum Beispiel
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{38}$$
Damit folgt $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k!} \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} \\ 0 & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & e \\ 0 & e \end{pmatrix}$.

3.2. Gewöhnliche DGLn

Nachdem wir jetzt also das Matrixexponential definiert haben, können wir uns mit Differentialgleichungen beschäftigen. Dazu müssen wir aber zunächst ein paar Begriffe definieren. Das Matrixexponential wird erst nachher interessant.

Definition: Sei $F : \underbrace{\mathbb{K}^n \times \dots \times \mathbb{K}^n}_{m \text{ Faktoren}} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}^n$ gegeben. Die Gleichung

$$\gamma^{(m)}(t) = F(\gamma(t), \gamma'(t), \dots \gamma^{(m-1)}, t) \tag{39}$$

heißt **gewöhnliche Differentialgleichung m-ter Ordnung**. Dabei ist $t \in (a, b)$ mit $a < b$ ($a = -\infty$ oder $b = \infty$ auch möglich). Eine Funktion $\gamma \in C^m((a, b), \mathbb{K}^n)$, die diese Gleichung erfüllt, heißt **Lösung** der Differentialgleichung.

Bemerkungen:

- Bei $n \geq 2$ spricht man auch von einem Differentialgleichungssystem.
- „Gewöhnlich“ bezieht sich darauf, dass nur Ableitungen nach einer Variablen (in diesem Fall t) auftreten.
- Jede gewöhnliche Differentialgleichung m-ter Ordnung lässt sich in eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung überführen. Sei $\gamma \in C^m((a,b), \mathbb{K}^n)$ eine Lösung der Differentialgleichung $\gamma^{(m)}(t) = F(\gamma(t), \gamma'(t), \dots \gamma^{(m-1)}, t)$. Setze jetzt

$$\delta : (a,b) \longrightarrow \underbrace{\mathbb{K}^n \times \ldots \times \mathbb{K}^n}_{m \text{ Faktoren}} = (\mathbb{K}^n)^m; \quad t \longmapsto \begin{pmatrix} \gamma(t) \\ \gamma'(t) \\ \vdots \\ \gamma^{(m-1)}(t) \end{pmatrix} \tag{40}$$

$$G : (\mathbb{K}^n)^m \times \mathbb{R} \longrightarrow (\mathbb{K}^n)^m; \quad \begin{pmatrix} \gamma(t) \\ \gamma'(t) \\ \vdots \\ \gamma^{(m-2)}(t) \\ \gamma^{(m-1)}(t) \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \gamma'(t) \\ \gamma''(t) \\ \vdots \\ \gamma^{(m-1)}(t) \\ F(\gamma(t), \dots, \gamma^{(m-1)}(t), t) \end{pmatrix} \tag{41}$$

Dann erfüllt δ die gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung $\delta'(t) = G(\delta(t), t)$.

Definition: Sei $F : \mathbb{K}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}^n$ gegeben. Dann ist $\gamma'(t) = F(\gamma(t), t)$ mit $t \in (a,b)$ eine gewöhnliche DGL erster Ordnung. Sei weiter $(\gamma_0, t_0) \in \mathbb{K}^n \times (a,b)$. Dann heißt die Differentialgleichung zusammen mit der Anfangsbedingung $\gamma(t_0) = \gamma_0$ ein **Anfangswertproblem (AWP)**.

Bemerkung: Ist F stetig und lokal lipschitz-stetig bezüglich der ersten Variablen, dann hat ein Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung in einer ϵ-Umgebung von t_0: $\gamma : (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \longrightarrow \mathbb{K}^n$. Dass F „lokal lipschitz-stetig bezüglich der ersten Variablen“ ist, bedeutet hier, dass F lokal lipschitz-stetig bezüglich Veränderungen des *ersten Funktionsarguments* ist. Dieses erste Funktionsargument ist ein n-dimensionaler Vektor aus $\mathbb{K}^n$. Bei Veränderungen des zweiten Funktionsarguments, nämlich $t \in \mathbb{R}$, muss die Funktion F dagegen *nicht* lokal lipschitz-stetig sein.

3.3. Gewöhnliche lineare DGLn

Die obigen Definitionen sind ziemlich allgemein. Wir wollen uns jetzt ein paar spezielle Differentialgleichungstypen anschauen, die besonders auch in der Physik herausragende Bedeutung haben:

Definition: Eine Differentialgleichung erster Ordnung für eine Funktion $\gamma \in C^1((a,b), \mathbb{K}^n)$ heißt **linear**, falls sie folgende Form hat:

$$\gamma'(t) = A(t)\gamma(t) + b(t) \tag{42}$$

Dabei ist $A : (a,b) \to \mathbb{K}^{n \times n}$ und $b : (a,b) \to \mathbb{K}^n$. Sie heißt **Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten**, wenn A nicht von t abhängt. Sie heißt **homogen**, falls

$b(t) = 0$ für alle $t \in (a, b)$ ist, sonst **inhomogen**. Die Definition ist analog für DGLn m-ter Ordnung.

Beispiele:

- Das Zerfallsgesetz für radioaktive Zerfälle, das die Anzahl vorhandener Kerne mit der Zerfallsrate verknüpft, ist eine homogene lineare DGL erster Ordnung: $N'(t) = -\lambda N(t)$.
- Die Differentialgleichung, die einen getriebenen harmonischen Oszillator mit Dämpfung beschreibt, ist eine inhomogene lineare DGL zweiter Ordnung: $x''(t) + \gamma x'(t) + \omega_0^2 x(t) = f \sin(\omega t)$

3.3.1. Gewöhnliche homogene lineare DGLn

Definition: Sei $\gamma'(t) = A\gamma(t)$ mit $t \in (a, b)$ und $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine homogene lineare DGL erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten für die Funktion $\gamma \in C^1((a, b), \mathbb{K}^n)$. Die Menge aller Lösungen der DGL

$$\mathfrak{L} := \{\gamma \in C^1((a, b), \mathbb{K}^n) \mid \gamma'(t) = A\gamma(t)\} \subset C^1((a, b), \mathbb{K}^n) \tag{43}$$

heißt **Lösungsraum** der DGL. $\mathfrak{L}$ ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum der Dimension n. Eine Basis von $\mathfrak{L}$ heißt **Lösungsfundamentalsystem**. Die Definition ist analog für DGLn m-ter Ordnung, nur dass der Lösungsraum dann die Dimension $n \cdot m$ hat.

Satz: Das Anfangswertproblem $\begin{cases} \gamma'(t) = A\gamma(t) \\ \gamma(t_0) = \gamma_0 \end{cases}$ für die Funktion $\gamma \in C^1((a, b), \mathbb{C}^n)$ hat die eindeutige Lösung

$$\gamma(t) = e^{tA}\gamma_0 \tag{44}$$

Dabei ist e^{tA} das Matrixexponential der $n \times n$-Matrix tA. Die Spalten der Matrix A bilden eine Basis des Lösungsraums $\mathfrak{L}$ der DGL.

Definition: Sei $\gamma^{(m)}(t) + a_{m-1}\gamma^{(m-1)}(t) + \ldots + a_0\gamma(t) = 0$ mit $t \in (a, b)$ und $a_i \in \mathbb{C}$ eine homogene lineare DGL m-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten für die Funktion $\gamma \in C^n((a, b), \mathbb{C})$. Das Polynom

$$p(\lambda) = \lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + \ldots + a_0 = \prod_{i=1}^{r} (\lambda - \lambda_i)^{\alpha_i} \tag{45}$$

heißt **charakteristisches Polynom** der DGL. Dabei sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ die r Nullstellen des Polynoms mit entsprechenden Vielfachheiten $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$.

Bemerkungen:

- Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms erlauben die Konstruktion eines Lösungsfundamentalsystems:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L} &= \mathrm{Span}(\{t^{j-1}e^{\lambda_i t} \mid i = 1, \ldots, r;\ j = 1, \ldots, \alpha_i\}) && (46) \\ &= \mathrm{Span}(\{e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, \ldots, t^{\alpha_1 - 1}e^{\lambda_1 t};\ \ldots;\ e^{\lambda_r t}, te^{\lambda_r t}, \ldots, t^{\alpha_r - 1}e^{\lambda_r t}\}) && (47) \end{aligned}$$

  Wegen $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_r = m$ hat der Lösungsraum wie erwartet die Dimension m.

- Man kann die DGL m-ter Ordnung auch in ein System von DGLn erster Ordnung überführen (siehe oben). Man erhält dann:

$$\begin{pmatrix} \gamma'(t) \\ \gamma''(t) \\ \vdots \\ \gamma^{(m-1)}(t) \\ \gamma^{(m)}(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} \gamma(t) \\ \gamma'(t) \\ \vdots \\ \gamma^{(m-2)}(t) \\ \gamma^{(m-1)}(t) \end{pmatrix} \tag{48}$$

Das charakteristische Polynom der DGL ist dann $p(\lambda) = \det(\lambda \mathbb{1} - A)$.

Beispiel: Der ungedämpfte harmonische Oszillator $x''(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$ hat das charakteristische Polynom $\lambda^2 + \omega_0^2$ mit den beiden Nullstellen $\pm i\omega_0$. Ein Lösungsfundamentalsystem lautet $\{e^{i\omega t}, e^{-i\omega t}\}$.

3.3.2. Gewöhnliche inhomogene lineare DGLn

Satz: Sei $\gamma'(t) = A\gamma(t) + b(t)$ eine inhomogene lineare DGL erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Um alle Lösungen der inhomogenen DGL zu kennen, genügt es, alle Lösungen γ_{hom} der zugehörigen homogenen DGL $\gamma'(t) = A\gamma(t)$, sowie eine *einzige* Lösung γ_{inhom} der inhomogenen DGL zu bestimmen. Alle anderen Lösungen der inhomogenen DGL berechnen sich dann zu

$$\gamma(t) = \gamma_{\text{hom}}(t) + \gamma_{\text{inhom}}(t) \tag{49}$$

Satz: Das Anfangswertproblem $\begin{cases} \gamma'(t) = A\gamma(t) + b(t) \\ \gamma(t_0) = \gamma_0 \end{cases}$ für die Funktion $\gamma \in C^1((a,b), \mathbb{C}^n)$ hat die eindeutige Lösung

$$\gamma(t) = \underbrace{e^{tA}\gamma_0}_{\text{homogene Lösung}} + \underbrace{e^{tA}\int_{t_0}^{t} e^{-sA} b(s)\,\mathrm{d}s}_{\text{inhomogene Lösung}} \tag{50}$$

Beispiel: Wenn man einen vollständig entladenen Kondensator an eine konstante Spannung U_0 anschließt, kann man die Ladung $Q(t)$ der Kondensatorplatten beschreiben durch das AWP $Q'(t) + \alpha Q = \beta U_0$ mit $Q(0) = 0$. Dabei sind α und β physikalische Koeffizienten, die unter anderem mit der Kapazität des Kondensators zusammenhängen. Wir finden mit der Formel für inhomogene DGLn:

$$Q(t) = e^{-\alpha t}Q(0) + e^{-\alpha t}\int_0^t e^{\alpha s}\beta U_0\,\mathrm{d}s = \beta U_0 e^{-\alpha t}\left[\frac{e^{\alpha s}}{\alpha}\right]_0^t = \frac{\beta U_0}{\alpha}e^{-\alpha t}\left(e^{\alpha t} - 1\right) \tag{51}$$

$$= \frac{\beta U_0}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha t}\right) \tag{52}$$

A. Gewöhnliche nichtlineare DGLn

Ein Thema, das nicht in der Vorlesung behandelt wurde, aber besonders in der Physik von Bedeutung ist, sind nichtlineare Differentialgleichungen.

Satz: Wir betrachten eine Differentialgleichung der Form $\gamma'(t) = f(\gamma(t))$ mit einer Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Sei $F(x) = \int \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x$ eine Stammfunktion von $\frac{1}{f(x)}$. Dann wird die DGL von der Umkehrfunktion F^{-1} gelöst.

Bemerkung: In der Physik verwendet man oft eine Notation, die mathematisch nicht ganz korrekt, aber deutlich anschaulicher ist. Dabei schreibt man die Ableitung $\gamma'(t)$ symbolisch als Differentialquotienten $\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}$ und behandelt Zähler und Nenner wie normale Variablen. Man schreibt:

$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = f(\gamma) \tag{53}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{f(\gamma)}\,\mathrm{d}\gamma = \mathrm{d}t \tag{54}$$

$$\Leftrightarrow \quad \int \frac{1}{f(\gamma)}\,\mathrm{d}\gamma = t \tag{55}$$

$$\Leftrightarrow \quad F(\gamma) = t \tag{56}$$

$$\Leftrightarrow \quad \gamma(t) = F^{-1}(t) \tag{57}$$

Beispiel: Betrachten wir die Differentialgleichung $\gamma'(t) = \gamma(t)^2$. Wir schreiben:

$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = \gamma^2 \tag{58}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\gamma^2}\,\mathrm{d}\gamma = \mathrm{d}t \tag{59}$$

$$\Leftrightarrow \quad \int \frac{1}{\gamma^2}\,\mathrm{d}\gamma = t \tag{60}$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{\gamma} = t \tag{61}$$

$$\Leftrightarrow \quad \gamma(t) = -\frac{1}{t} \tag{62}$$

Wir sehen, dass diese Funktion tatsächlich die DGL löst, denn $\gamma'(t) = \frac{1}{t^2} = \left(-\frac{1}{t}\right)^2 = \gamma(t)^2$.