Technische Universität München
Fakultät für Physik

Ferienkurs Analysis 1
Mittwoch, 3.4.19

Tutoren:[1] Samuel Scalet, Eduard Koller

Letzte Änderung: 3. April 2019

[1]Skriptvorlage mit freundlicher Genehmigung von Jonas Habel, Florian Kollmannsberger

Inhaltsverzeichnis

1. Stetigkeit 1
1.1. Definitionen der Stetigkeit 1
1.2. Rechenregeln Stetigkeit 4

2. Grenzwerte von Funktionen 4

3. Anwendungen Stetigkeit 5
3.1. Zwischenwertsatz 5
3.2. Satz von Minimum und Maximum 6

4. Ableitung 6
4.1. Definition 6
4.2. Ableitungsregeln 6
4.3. Umkehrfunktion 7

5. Mittelwertsatz der Differenzialrechnung 7

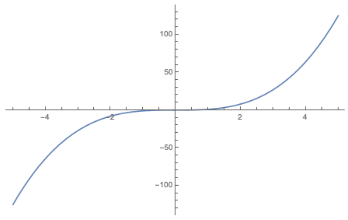
6. L'Hôpital 7

7. Taylorpolynome 7
7.1. Restgliedabschätzung 7

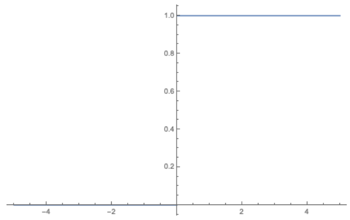
A. Literaturverzeichnis 8

1. Stetigkeit

Betrachten wir zur Einführung ein kleines Beispiel:



(a) $f(x)$



(b) $\theta(x)$

Mit den zugehörigen Funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3 \end{cases} \qquad \theta(x) \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ für } x \geq 0 \\ 0 \text{ für } x < 0 \end{cases} \end{cases}$$

Während für $f(x)$ und für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \to 0$ man Funktionswert- und Grenzwert- Berechnung vertauschen kann:

$$0 = f(0) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)^3 = \lim_{n\to\infty} x_n^3 = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$$

gilt für Heaviside Sprungfunktion $\theta(x)$:

$$a_n = \frac{1}{n} \text{ erfüllt } 1 = \theta\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} \theta(x_n)$$
$$\text{aber } b_n = -\frac{1}{n} \text{ erfüllt } 1 = \theta\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) \neq \lim_{n\to\infty} \theta(x_n) = 0$$

Es stellt sich also die Frage, wann Funktionswertbildung und Grenzwertbildung vertauscht werden dürfen.

1.1. Definitionen der Stetigkeit

Definition Folgenstetigkeit Das Beispiel motiviert:
Eine Funktion $f : M \to N$ heißt stetig in $x_0 \in M$, falls für alle Folgen $a : \mathbb{N} \to M$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0) \tag{1}$$

Bemerkung

- Ausformuliert: Für jede beliebige Folge im Definitionsbereich der Funktion, die gegen x_0 konvergiert, müssen auch die Funktionswerte der Folgenglieder $f(a_n)$ im Wertebereich gegen $f(x_0)$ konvergieren.
- Wir nennen $f : M \to N$ stetig, falls f in allen $x_0 \in M$ stetig ist.

Definition ϵ-δ-Charakterisierung Man kann Stetigkeit auch alternativ wie folgt definieren: Eine Funktion $f : M \to N$ heißt stetig in $x_0 \in M$, wenn:

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists \, \delta_{x_0} > 0 : \forall x \in M : |x - x_0| < \delta_{x_0} \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon \tag{2}$$

Bemerkung

- Anschaulicher: Eine kleiner Änderung im Definitionsbereich $x_0 \pm \delta_{x_0}$ soll maximal eine kleine Änderung im Wertebereich zufolge haben: $f(x_0) \pm \epsilon$. Das besondere ist: Wir können die Änderungen im Wertebereich beliebig klein machen, solange wir auch das δ_{x_0} anpassen:

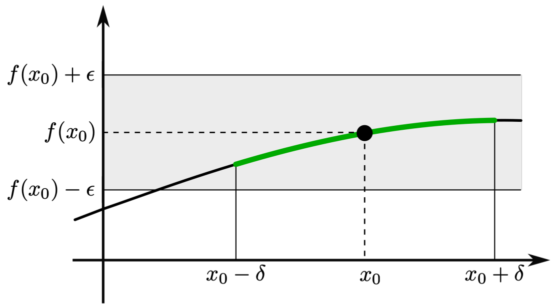


Abbildung 2: $\epsilon - \delta$ Kriterium für Stetigkeit. Kleine Änderungen im Definitionsbereich führen zu kleinen Änderungen im Wertbereich, Abbildung übernommen von [1]

- Stetigkeitsbeweise mit dem $\epsilon - \delta$-Kriterium verlaufen immer nach dem gleichen Schema: ,,Sei $\epsilon > 0$, wähle dann $\delta_{x_0} = ...$". Das δ_{x_0} zu bestimmen ist unsere Aufgabe.
- Im allgemeinen gilt $\delta_{x_0} = \delta(x_0, \epsilon)$. δ hängt also von dem gewählten x_0 und dem gewählten ϵ ab. Eine Abhängigkeit von x ist jedoch nicht erwünscht, da die Aussage ja für alle $x \in M$ gelten soll.

Beispiel Sei $f(x) = \frac{1}{5}x$. Wir möchten Stetigkeit mit dem $\epsilon - \delta$-Kriterium zeigen, es soll also gelten:

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists \, \delta_{x_0} > 0 : \forall x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta_{x_0} \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

Betrachten wir dazu den zweiten Teil der Implikation näher:

$$|f(x) - f(x_0)| = \frac{1}{5}|x - x_0| \overset{!}{<} \epsilon$$

Diese Ungleichung soll unter der Voraussetzung $|x - x_0| < \delta_{x_0}$ gelten, setzen wir also ein:

$$\frac{1}{5}|x - x_0| \overset{|x-x_0|<\delta_{x_0}}{<} \frac{1}{5}\delta \overset{!}{\leq} \epsilon$$

Umstellen liefert uns $\delta_{x_0} = 5\epsilon$, δ ist also unabhängig von x_0. Insgesamt ergibt sich also: Für alle $\epsilon > 0$ wähle $\delta = 5\epsilon$, dann gilt:

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x - x_0| < \delta \text{ folgt } |f(x) - f(x_0)| = \frac{1}{5}|x - x_0| < \frac{1}{5}\delta \overset{\delta=5\epsilon}{=} \epsilon$$

Definition $f: M \to N$ heißt gleichmäßig stetig, wenn:

$$\forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x, x_0 : \ |x - x_0| < \delta \to |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

Bemerkung

- Hier gilt $\delta = \delta(\epsilon)$. δ ist also unabhängig von x, x_0 für alle $x, x_0 \in M$
- Man sagt statt gleichmäßig stetig häufig glm. stetig.

Beispiel Jede lineare Funktion $f(x) = ax + b$ ist glm. stetig.

Satz Jede stetige Funktion auf einem kompakten Intervall ist glm. stetig.

Definition $f: M \to N$ heißt Lipschitz stetig bei x_0 mit Lipschitzskonstante $L \in (0, \infty)$, falls:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq L|x - x_0| \tag{3}$$

Satz Jede Lipschitzstetige Funktion ist glm. stetig. Jede glm. stetige Funktion ist stetig. Also ist auch jede Lipschitzstetige Funktion stetig.

Theorem Sei $f[a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf (a,b) dann sind folgende Aussagen äquivalent:

$$\begin{aligned}
&(1) \quad \exists C > 0 \text{ mit } |f'(x)| \leq C \quad \forall x \in (a, b) \\
&(2) \quad \max_{x \in (a,b)} |f'(x)| \leq C \\
&(3) \quad |f(x) - f(x_0)| \leq C \cdot |x - x_0| \quad \forall x, x_0 \in [a, b]
\end{aligned}$$

das bedeutet insbesondere: Jede Funktion, die im inneren eines kompakten Intervalls eine beschränkte Ableitung besitzt, ist (auf diesem Intervall) Lipschitzstetig.

Das dies gilt kann man sich mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung überlegen. Es gilt für f differenzierbar:

$$\left| \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \right| = |f'(\xi)| \leq \underset{x \in (a,b)}{max} |f'(x)| \text{ mit } x_1, x_2 \in [a, b]$$

für ein $\xi \in (x_1, x_2)$. Umgestellt:

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq |x_2 - x_1| \cdot \underset{x \in (a,b)}{max} |f'(x)|$$

Falls $\underset{x \in (a,b)}{max} |f'(x)|$ beschränkt ist folgt der obiges Theorem.

Zusammenfassung In diesem Abschnitt haben wir die Definitionen von **Folgenstetigkeit, $\epsilon - \delta$-Kriterium, Stetigkeit, glm. Stetigkeit, Lipschitzstetigkeit** sowie deren Zusammenhänge kennen gelernt.

1.2. Rechenregeln Stetigkeit

Theorem: Die Komposition stetiger Funktionen ist stetig. Komposition sind hierbei $+, -, /, \cdot, \circ$. Die Verknüpfung / für $\frac{f(x)}{g(x)}$ nur, wo $g(x) \neq 0$ gilt.

Theorem $f : M \to n$ bei $x_0 \in M$ stetig ist äquivalent zu: Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ mit $x_n \to x$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n)$$

2. Grenzwerte von Funktionen

Wir wollen nun den Grenzwert von Funktionen untersuchen. Dazu erinnern wir uns kurz an die Definition von Grenzwerten bei Folgen: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Man schreibt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

falls a das ϵ-Kriterium: $\forall \epsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \geq N : |a_n - a| < \epsilon$ erfüllt. Man stellt folgende Beobachtung fest: Ist $f : M \to N$ eine Funktion und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in M, so ist $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in N. Dies motiviert die Grenzwertdefinition für Funktionen:

Definition Sei $f : D \subset M \to N$ mit $M \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und x_0 in $\overline{D}$. Dann nennt man f_0 Grenzwert von f bei x_0, falls:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f_0 \qquad \forall \text{ Folgen } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ mit } \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \tag{4}$$

Bemerkung

- $\overline{D}$ ist der Abschluss von $D \subset M$, es gilt: $\overline{D} := \left\{x \in M \middle| \exists \text{ Folge } x_n \text{ mit } \lim_{n\to\infty} = x\right\}$. Das bedeutet, dass $\overline{D}$ alle Grenzwerte für Folgen in D enthält.
- Man schreibt auch $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f_0$ und meint damit eine Folge x, die gegen x_0 konvergiert.
- Der hier erhaltene Grenzwert f_0 muss nicht mit $f(x_0)$ übereinstimmen.

Defintion Für $f : M \to N$ mit nach oben/unten unbeschränkter Menge $M \subset \mathbb{R}$ heißt f_0 Grenzwert von f in $+\infty/-\infty$, falls:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f_0 \tag{5}$$

und falls dies für alle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die uneigentlich nach $+\infty/-\infty$ konvergieren gilt.

Bemerkung Man schreibt auch: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = f_0$

Beispiel Sei $h(x)$ definiert durch:

$$h(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1) \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

Sei nun $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge die von unten gegen 1 konvergiert aber kein x_n gleich 1 ist. Dann ist $h(x_n) = 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$. Aber $h(\lim_{n\to\infty} x_n) = h(1) = 1$. Da bei 1 der limes und die Funktion nicht vertauscht werden können ist h bei 1 nicht stetig.

Theorem Ist $f : M \to N$ stetig in $x_0 \in M$, ist äquivalent zu der Aussage:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(\lim_{x\to x_0} x) \tag{6}$$

Damit ist der Grenzwert bei stetigen Funktionen durch einsetzen des von x_0 zu lösen.

Rechenregeln Sei f,g: $D \to \mathbb{C}$ und $\lim_{\xi\to x} f(\xi)$ und $\lim_{\xi\to x} g(\xi)$ existieren und sind endlich, dann gilt

$$\lim_{\xi\to x}(f(\xi) + g(\xi)) = (\lim_{\xi\to x} f(\xi)) + (\lim_{\xi\to x} f(\xi))$$

$$\lim_{\xi\to x}(f(\xi) \cdot g(\xi)) = (\lim_{\xi\to x} f(\xi)) \cdot (\lim_{\xi\to x} f(\xi))$$

$$\lim_{\xi\to x}(\tfrac{f(\xi)}{g(\xi)}) = \frac{\lim_{\xi\to x} f(\xi))}{(\lim_{\xi\to x} g(\xi))} \text{ falls } \lim_{\xi\to x} \cdot g(\xi) \neq 0$$

falls g stetig ist gilt $\lim_{\xi\to x} g(f(\xi)) = g(\lim_{\xi\to x} f(\xi))$

Zusammenfassung Wir haben kennengelernt: **Grenzwert von Funktionen, Grenzwert von Funktionen im unendlichen, Rechenregeln für Grenzwerte**. Diese erinnern an die Definitionen und Rechenregeln für Folgen.

3. Anwendungen Stetigkeit

3.1. Zwischenwertsatz

Theorem Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) \leq s \leq f(b)$ oder $f(b) \leq s \leq f(a)$ und $s \in [f(a), f(b)] \subset \mathbb{R}$, dann existiert mindestens ein $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) = s$.

Bemerkung

1. Anschaulich: "Jede stetige Funktion nimmt alle Werte zwischen $[f(a), f(b)]$ an", Sie kann keinen Wert "überspringen".
2. Dieser Satz ist für die Existenz von Lösungen x_0 der Gleichung $f(x) = s$ interessant, wie man in Abbildung (3) erkennt sind diese jedoch nicht eindeutig.

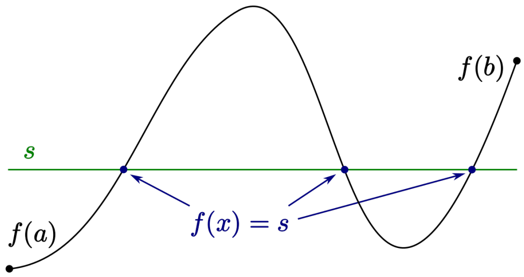


Abbildung 3: Zwischenwertsatz, Abbildung übernommen von [2]

3.2. Satz von Minimum und Maximum

Satz Sei $f : D \to \mathbb{R}$ stetig, D kompakt. Dann nimt f sein Minimum bzw. Maximum an, d.h es existieren

$$f(x_-) = \min_{x \in D} f(x) \qquad\qquad f(x_+) = \max_{x \in D} f(x)$$

Also $f(x_-) \leq f(x) \leq f(x_+)\ \forall x \in D$

Bemerkung Minima und Maxima sind im allgemeinen nicht eindeutig und können auch am Rand angenommen werden.

4. Ableitung

4.1. Definition

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $x \in (a, b)$. Der Grenzwert

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{7}$$

heißt Ableitung von f bei x, falls er existiert. Dann heißt die Funktion differenzierbar in x. Ist f differenzierbar für alle $x \in (a, b)$, dann ist f differenzierbar.

4.2. Ableitungsregeln

Es gelten die Ableitungsregeln:

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$$

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))\, g'(x)$$

4.3. Umkehrfunktion

Sei f^{-1} die Umkehrfunktion von f, f streng monoton und differenzierbar.

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \text{ und } (f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

5. Mittelwertsatz der Differenzialrechnung

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar, dann $\exists \xi \in (a,b)$ so dass

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$$

6. L'Hôpital

Theorem: $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $g(x) \neq 0$ und $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a,b)$ Sei weiter x_0 einer der Randpunkte und

(i) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$

oder

(ii) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$

Bitte hierbei beachten das auch $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty$ und so weiter möglich ist da sich - und der Limes vertauschen lassen.

Falls $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert gilt

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

7. Taylorpolynome

Definition: Sei $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n mal differenzierbar in $x_0 \in D$. Dann ist

$$(T^n_{x_0} f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

das Tylorpolynom von der Ordnung n um x_0.

7.1. Restgliedabschätzung

Theorem: Lagrange Restglied: Sei $n \in \mathbb{N}_0, f \in C^{n+1}([a,b])$ und $x_0 \in (a,b)$. Dann $\exists \xi \in [\min(x, x_0), \max(x, x_0)]$ so dass der Fehler

$$(R^n_{x_0} f)(x) = f(x) - (T^n_{x_0} f)(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \; \forall x \in [a,b]$$

A. Literaturverzeichnis

[1] Stephan Kulla. *Stetigkeit: Epsilon-Delta-Kriterium*. URL: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Illustration_for_epsilon-delta_definition_of_continuity_4.svg.

[2] *Zwischenwertsatz*. URL: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Illustration_for_the_intermediate_value_theorem.svg.