Technische Universität München
Fakultät für Physik

Ferienkurs Analysis 1
Dienstag, 2.4.19

Tutoren:[1] Samuel Scalet, Eduard Koller

Letzte Änderung: 2. April 2019

[1] Skriptvorlage mit freundlicher Genehmigung von Jonas Habel, Florian Kollmannsberger

Inhaltsverzeichnis

1. Folgen und Grenzwerte

Man erinnere sich an die Definition einer Abbildung:

$$f : M \to N, x \mapsto f(x) = y \tag{1}$$

aus Vorlesung 1. Wie bereits erwähnt wird durch die Wahl $M = \mathbb{N}$ eine Abbildung definiert, die allgemein als Folge bekannt ist. Diese Folgen sollen nun näher untersucht werden.

1.1. Definition von Folgen

Eine reelle Folge kann man sich als Wertetabelle vorstellen. Sie ist eine Auflistung unendlich vieler reeller Zahlen, die fortlaufend nummeriert sind. Jedem Folgenglied a_n wird dabei eine eindeutige, positive, ganzzahlige Nummer n zugewiesen. Diese Nummer nennt man Index.

Definition: Eine **reelle Folge** ist eine Abbildung

$$a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R};\ n \longmapsto a(n) =: a_n \tag{2}$$

n bezeichnet den Index und a_n das n-te Folgenglied.

Bemerkungen:

- Man schreibt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, oder kürzer (a_n).
- Häufig wählt man den Index nicht aus $\mathbb{N}$, sondern aus $\mathbb{N}_0$, der Index startet dann von 0 statt von 1.
- Man kann auch Folgen mit komplexen Folgengliedern definieren, diese heißen dann logischerweise komplexe Folgen.
- Manchmal wird zur Definition einer Folge nicht die Abbildungsvorschrift $n \longmapsto a_n$ selbst angegeben, sondern eine Rekursionsvorschrift. Zum Beispiel wird das erste Folgenglied a_1 angegeben, und wie man das $n + 1$-te Folgenglied aus dem n-ten Glied erhält.

Beispiel: $a_n = (-1)^n$ definiert eine Folge, deren Glieder nur die Werte -1 und 1 annehmen.

1.2. Monotonie und Konvergenz von Folgen

Definition: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge. a_n heißt

- **nach oben beschränkt**, wenn es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $a_n \leq c$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
- **nach unten beschränkt**, wenn es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $a_n \geq c$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
- **beschränkt**, wenn es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $|a_n| \leq c$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt; das heißt, wenn die Folge nach oben *und* nach unten beschränkt ist.

Bemerkungen:

- Anders ausgedrückt: Wenn die Folge nach oben beschränkt ist, finden wir eine reelle Zahl, sodass alle Folgenglieder unterhalb dieser reellen Zahl liegen (analog für Beschränktheit nach unten). Solche reellen Zahlen nennt man **obere Schranken** (bzw. **untere Schranken** für Beschränktheit nach unten).
- Natürlich kann es sehr viele Zahlen geben, die als obere oder untere Schranken in Frage kommen. Wenn c eine obere Schranke ist, dann ist offensichtlicherweise auch $c+1$ eine obere Schranke (Wenn c eine untere Schranke ist, dann ist $c-1$ auch eine untere Schranke).

Definition: Die kleinste obere Schranke einer Folge heißt **Supremum**, die größte untere Schranke einer Folge heißt **Infimum**.

Bemerkungen:

- Infimum und Supremum darf man nicht mit Minimum und Maximum gleichsetzen. Man betrachte als Beispiel die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := \frac{1}{n}$. Diese hat als kleinste obere Schranke die 1 und als größte untere Schranke die 0. Das Maximum der Folge ist 1, allerdings nimmt die Folge kein Minimum an! Sie nähert sich zwar immer weiter der 0 an, erreicht sie aber nie.
- Was allerdings immer gilt, ist Folgendes: *Falls* ein Minimum oder ein Maximum existiert, ist es gleich dem Infimum bzw. dem Supremum.

Definition: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge. a_n heißt

- **monoton steigend**, wenn $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
- **streng monoton steigend**, wenn $a_{n+1} > a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
- **monoton fallend**, wenn $a_{n+1} \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
- **streng monoton fallend**, wenn $a_{n+1} < a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Beispiele:

- Die Folge $a_n = -\frac{1}{n^2}$ ist streng monoton steigend.
- Die Folge $b_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & n \text{ gerade} \\ \frac{1}{n+1} & n \text{ ungerade} \end{cases}$ hat die Folgenglieder $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots)$ und ist damit monoton, aber nicht streng monoton fallend.

Definition: „ϵ-Kriterium“ Eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **konvergiert** gegen $a \in \mathbb{R}$, falls gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall n \geq N : |a_n - a| < \epsilon \tag{3}$$

a heißt **Grenzwert** oder **Limes** und man schreibt:

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \quad \text{oder} \quad a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a \quad \text{oder kürzer} \quad a_n \longrightarrow a \tag{4}$$

Bemerkungen:

- Anschaulicher: $|a_n - a|$ misst den Abstand des Folgenglieds zum Grenzwert der Folge. Damit die Folge konvergiert, muss dieser Abstand ab einem bestimmten N immer kleiner werden, für groß genügende N kleiner als jedes ϵ. Stellt man sich dies bildlich vor, liegen also in jeder ϵ-Umgebung $(a-\epsilon, a+\epsilon)$ alle bis auf endlich viele Folgeglieder. Für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} := a + (-1)^n/n$ ist dieses Verhalten Beispielhaft in Abbildung (1) skizziert:

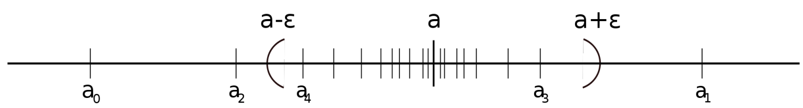

Abbildung 1: Folgenkonvergenz nach Definition (3), Abbildung übernommen von [1]

- Konvergenzbeweise mit dem ϵ-Kriterium verlaufen immer nach dem gleichen Schema: „Sei $\epsilon > 0$, wähle dann $N = \ldots.$“. Das $N(\epsilon)$ zu bestimmen ist unsere Aufgabe.
- Im allgemeinen gilt: Je kleiner wir ϵ wählen, desto später sind alle weiteren Folgenglieder in dieser ϵ-Umgebung.
- Es ist unwesentlich, ob die Bedingung $|a_n - a| < \epsilon$ oder $|a_n - a| \leq \epsilon$ lautet.
- Konvergiert eine Folge gegen $a = 0$, so heißt sie **Nullfolge**.

Beispiele: Beispiel: Untersuche die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} := 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ auf Beschränktheit und Konvergenz. Skizzieren wir uns zuerst den Sachverhalt in einem Plot (2):

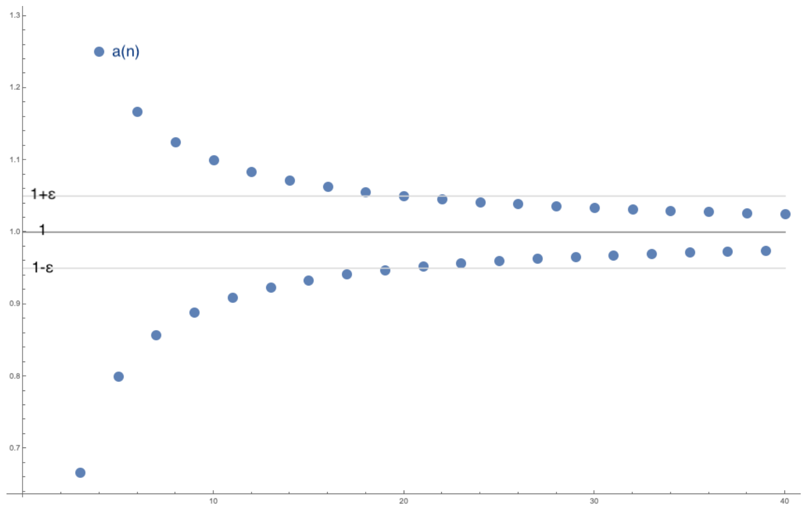

Abbildung 2: x-Achse Laufindizes n, y-Achse Folgenwerte a_n. Grenzwert $a = 1$ sowie ein ϵ Bereich sind eingezeichnet.

Wählt man $\epsilon = 0.05$ so muss $N = 21$ sein, damit $|a_n - a| \leq 0.05$ erfüllt ist. N ist also offensichtlich von ϵ abhängig. Man erkennt, dass fast alle Folgenglieder in einer ϵ-Umgebung um dem Grenzwert a liegen. Die folge lässt sich auch mathematisch charakterisieren:

- Beschränktheit:
  Wegen
  $$|a_n| = \left|1 + \frac{(-1)^n}{n}\right| \overset{\Delta-Ungl.}{\leq} 1 + \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| \leq 1 + \max_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{n}\right) = 2 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$
  ist a_n nach oben durch 2 beschränkt und aufgrund von Symmetrie durch -2 nach unten.
- Um Konvergenz mit dem ϵ-Kriterium (3) zu zeigen betrachtet man:
  $$|a_n - 1| = \left|1 + \frac{(-1)^n}{n} - 1\right| = \frac{1}{n} \overset{!}{\leq} \epsilon$$
  Durch auflösen erhält man $N(\epsilon)$ und wählt $N = \lceil \frac{1}{\epsilon} \rceil$:
  $$|a_n - 1| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} \leq \epsilon \qquad \forall n > N \text{ und } \forall \epsilon > 0$$
  das ϵ-Kriterium (3) ist also erfüllt und Konvergenz damit gewährleistet.

Neben Konvergenz gibt es noch zwei weitere Fälle für das Verhalten von Folgen: Entweder springt die Folge wild und ungeordnet umher oder sie strebt gegen $\pm\infty$. Im letzteren Fall nennt man die Folge bestimmt divergent/uneigentlich konvergent.

Definition: Eine reelle Folge (a_n) heißt

- **bestimmt divergent** oder **uneigentlich konvergent** gegen $+\infty$, falls gilt:
  $$\forall c \in \mathbb{R}\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N : a_n \geq c \tag{5}$$
  Man schreibt $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ oder kurz $a_n \longrightarrow -\infty$.
- **bestimmt divergent** oder **uneigentlich konvergent** gegen $-\infty$, falls gilt:
  $$\forall c \in \mathbb{R}\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N : a_n \leq c \tag{6}$$
  Man schreibt $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$ oder kurz $a_n \longrightarrow -\infty$.

Bemerkung: Anders ausgedrückt: Egal wie groß man c wählt, irgendwann (d.h. ab dem Index N) liegen alle weiteren Folgenglieder (d.h. mit Index $n \geq N$) oberhalb von c. Die Folge hat folglich keine obere Schranke (analog für bestimmte Divergenz gegen $-\infty$).

Beispiel: Die Folge $a_n = n$ divergiert bestimmt gegen $+\infty$.

Zusammenfassung In diesem Abschnitt haben wir wichtige Eigenschaften von Folgen kennen gelernt: **Definition, Beschränktheit, Supremum und Infimum, Monotonie, Konvergenz und Divergenz**. Mit diesen Definitionen ist nun das Rechnen und Arbeiten mit Folgen möglich.

1.3. Konvergenzkriterien und Grenzwertarithmetik

Da das ϵ-Kriterium für komplizierte Fälle sehr aufwendig sein kann, behilft man sich mit Rechenregeln, die komplizierte Fälle vereinfachen.

Satz: Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Bemerkung: Die Umkehrung gilt nicht. Nicht jede beschränkte Folge konvergiert auch. Man betrachte zum Beispiel die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := (-1)^n$. Diese Folge ist nach oben und nach unten beschränkt durch 1 bzw. -1, allerdings konvergiert sie nicht. Jedoch gilt:

Satz: Jede beschränkte und monoton steigende oder fallende Folge konvergiert.

Satz (Sandwich-Kriterium): Seien (a_n) und (c_n) konvergente Folgen mit demselben Grenzwert $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Sei außerdem (b_n) eine Folge mit $a_n \leq b_n \leq c_n$. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = a \tag{7}$$

Bemerkung: Anders ausgedrückt: Die Folge (b_n) wird zwischen den beiden Folgen (a_n) und (c_n) eingesperrt. Weil (a_n) und (c_n) aber gegen denselben Grenzwert konvergieren, kommen sie sich immer näher. (b_n) kann die Umklammerung durch (a_n) und (c_n) aber nicht verlassen und hat schließlich keine andere Wahl mehr, als gegen den Grenzwert von (a_n) und (c_n) zu konvergieren.

Beispiel: Wir wollen wissen, ob die Folge $b_n = \frac{1}{n^2+1}$ gegen 0 konvergiert. Dazu können wir sie zwischen die Folgen $a_n = 0$ und $c_n = \frac{1}{n}$ einsperren, denn es gilt für $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq \frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{n}$. Sowohl a_n als auch c_n konvergieren gegen 0. Damit muss nach dem Sandwichkriterium die Folge $\frac{1}{n^2+1}$ auch gegen 0 konvergieren.

Definition: Eine Folge (a_n) heißt **Cauchy-Folge**, falls gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N} \;\; \forall m, n \geq N : |a_n - a_m| < \epsilon \tag{8}$$

Bemerkung: Im Gegensatz zum ϵ-Kriterium sagen wir hier nicht, dass sich die Folgenglieder immer weiter einem Grenzwert annähern, sondern dass sich die Folgenglieder immer näher zusammenrücken.

Satz (Cauchy-Kriterium): Für reelle oder komplexe Folgen gilt: Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge und jede Cauchy-Folge ist eine konvergente Folge.

Satz (Rechenregeln): Seien (a_n) und (b_n) konvergente Folgen mit $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ und $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, sowie $c \in \mathbb{R}$. Dann gelten für die Limites folgende Rechenregeln:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ falls $b \neq 0$

d) (i) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n} = a^b$ (ii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^c = a^c$

e) (i) $a_n \leq b_n \Rightarrow a \leq b$ (ii) $a_n < b_n \Rightarrow a \leq b$

Bemerkung: Einige wichtige Grenzwerte sollte man kennen:

$$n^k \longrightarrow \begin{cases} 0 & k<0 \\ 1 & k=0 \\ \infty & k>0 \end{cases} \qquad \frac{a^n}{n!} \longrightarrow 0 \qquad \sqrt[n]{a} \longrightarrow 1 \qquad \left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n \longrightarrow e$$

$$k^n \longrightarrow \begin{cases} 0 & k\geq 0 \\ 1 & k=1 \\ \infty & k>1 \end{cases} \qquad \frac{n^n}{n!} \longrightarrow \infty \qquad \sqrt[n]{n} \longrightarrow 1 \qquad \left(1-\tfrac{1}{n}\right)^n \longrightarrow \frac{1}{e}$$

$$\frac{1}{n} \longrightarrow 0 \qquad \frac{a^n}{n^k} = \begin{cases} 0 & 0 \leq a \leq 1 \\ \infty & a>1 \end{cases} \qquad \sqrt[n]{n!} \longrightarrow \infty \qquad \left(1+\tfrac{x}{n}\right)^n = e^x$$

Beispiel: Wir wollen den Grenzwert der Folge $a_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ berechnen. Dazu benutzen wir den Standarttricks (Erweitern, um dritte binomische Formel zu erhalten) und Grenzwertarithmetik. Wir erweitern also mit $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \overset{\text{3.Binom}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Zusammenfassung Um Konvergenz zu zeigen haben wir folgende Kriterien kennen gelernt: **Monotonie+Beschränktheit, Sandwitchkriterium, Cauchy-Kriterium**. Falls diese nicht weiterhelfen, kann das zurückführen auf einfachere Folgen mithilfe der Grenzwertarithmetik zum Ziel führen.

1.4. Teilfolgen, Häufungspunkte, Limes inferior und Limes superior

Definition: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige reelle Folge und $k : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen. Dann heißt

$$a \circ k : \mathbb{N} \to \mathbb{R};\ n \mapsto a\left(k(n)\right) := a_{k_n} \tag{9}$$

Teilfolge von (a_n).

Bemerkung:

- Teilfolgen können auch für Folgen $b : \mathbb{N} \to N$ mit beliebiger Menge N definiert werden.
- Man erinnere sich an die Definition der Verknüpfung von Abbildungen in der ersten Vorlesung. Teilfolgen sind Verknüpfungen von Folgen.

Wie ist die Teilfolge (a_{k_n}) zu verstehen? Die ursprüngliche Folge (a_n) enthält alle Folgenglieder mit Indizes $n \in \mathbb{N}$. Wir wählen aus allen Folgengliedern jetzt Folgenglieder mit bestimmten Indizes aus. Die ausgewählten Indizes benennen wir mit n_k, wobei n_1 der erste ausgewählte Index ist und so weiter. So erhalten wir eine neue Folge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, die nur die aus der ursprünglichen Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ausgewählten Folgenglieder enthält. Weil wir die Reihenfolge der ausgewählten Folgenglieder nicht abändern wollen, muss die „Index-Auswahl-Funktion“ $k \longmapsto n_k$ zudem streng monoton steigend sein.

Beispiel: Seien die Folgen $a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, n \mapsto a(n) = \frac{1}{n}$ und $k_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto k(n) = 2n$ gegeben. Um eine Teilfolge von a_n zu erhalten führen wir eine Verknüpfung aus und erhalten:

$$(a \circ k)(n) = a(k(n)) = a_{k_n} = \frac{1}{k(n)} = \frac{1}{2n}$$

welches die Teilfolge $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ ist. Die Folgen $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$, $a_{2n-1} = \frac{1}{2n-1}$ oder $a_{n^2} = \frac{1}{n^2}$ sind ebenfalls Beispiele für Teilfolgen.

Definition: $x \in \mathrm{R}$ heißt Häufungspunkt der Folge (a_n), falls es eine Teilfolge (a_{k_n}) gibt mit $x = \lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n}$.
Dazu äquivalent ist folgende Definition: $x \in \mathrm{R}$ heißt Häufungspunkt der Folge (a_n), wenn gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \ \forall N \in \mathbb{N} \ \exists n \geq N : |x - a_n| < \epsilon \tag{10}$$

Bemerkungen:

- Anders ausgedrückt: In jeder noch so kleinen ϵ-Umgebung um jeden Häufungspunkt befinden sich unendlich viele Folgenglieder.
- Ist eine Folge konvergent, so ist ihr Grenzwert zugleich ihr einziger Häufungspunkt.
- Unterschied zwischen Grenzwert und Häufungspunkt: In einer ϵ-Umgebung um den Grenzwert liegen *alle bis auf endlich viele* Folgenglieder, in einer ϵ-Umgebung um einen Häufungspunkt liegen *„nur“ unendlich viele* Glieder. Gegen den Grenzwert müssen *alle* Teilfolgen konvergieren, gegen einen Häufungspunkt nur *eine*.

Beispiel: Die Folge $a_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ hat die Häufungspunkte $+1$ und -1.

Satz (Bolzano-Weierstraß): Jede beschränkte Folge komplexer Zahlen enthält mindestens eine konvergente Teilfolge und damit auch mindestens einen Häufungspunkt.

Definition: Sei (a_n) eine beschränkte reelle Folge. Wir definieren den **Limes superior** und den **Limes inferior** der Folge:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\geq n} a_k\right) \qquad \liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{k\geq n} a_k\right) \tag{11}$$

Bemerkungen:

- Der Limes inferior ist der kleinste Häufungspunkt, der Limes superior ist der größte Häufungspunkt einer beschränkten reellen Zahlenfolge.
- Ist eine Folge konvergent, so sind Limes inferior und Limes superior identisch und gleich dem Grenzwert der Folge.
- Limes inferior und Limes superior sind für wohldefiniert für beschränkte reelle Folgen, weil der Satz von Bolzano-Weierstraß die Existenz mindestens eines Häufungspunktes garantiert.

Beispiel: Man betrachte die Folge $a_n = \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ in Abbildung (3):

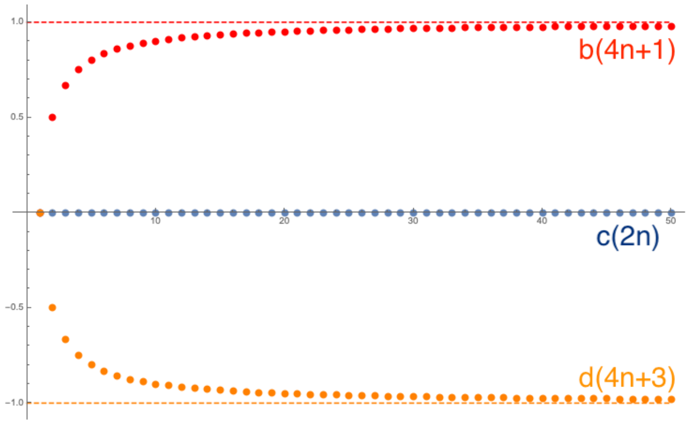

Abbildung 3: Folge a_n, man erkennt drei konvergente Teilfolgen b_n, c_n und d_n, mit Häufungspunkten $b = 1$, $c = 0$ und $d = -1$.

Das Intervall $[0, 2\pi)$ wird von $n\frac{\pi}{2}$ in 4 Teile zerlegt und der Sinus ist 2π periodisch, weshalb die Wahl der Teilfolgen $4n + i$ mit $i = 0, 1, 2, 3$ zielführend ist. Man erhält:

$$(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow \begin{cases} a_{4n+1} := b_n = & \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{4n+1}\right) \longrightarrow b = 1 \\ a_{2n} := c_n = & \sin(n\pi)\left(1 - \frac{1}{2n}\right) \longrightarrow c = 0 \\ a_{4n+3} := d_n = & \sin\left(2n\pi + \frac{3\pi}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{4n+3}\right) \longrightarrow d = -1 \end{cases}$$

da nur der Sinus-Term für die Konvergenz der Teilfolgen entscheiden ist (da $\frac{1}{n}$ eine Nullfolge ist).Die Häufungspunkte sind also -1, 0 und 1 und damit gilt $\liminf_{n\to\infty} a_n = -1$ und $\limsup_{n\to\infty} a_n = +1$.

Zusammenfassung Wichtige Begriffe dieses Abschnittes sind: **Teilfolgen, Häufungspunkte, Bolzano-Weierstraß, Limes superior und Limes inferior**. Mit diesen Begriffen ist das Arsenal zum behandeln von Folgen (für das erste Semester) vollständig.

2. Reihen

Nachdem wir das Thema Folgen abgeschlossen haben, widmen wir uns jetzt einem sehr verwandten Themenkomplex, den Reihen.

2.1. Definition

Eine Reihe ist im Wesentlichen nichts anderes als die Summe über die Glieder einer Folge. Wir definieren:

Definition: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine komplexe Folge. Für $n \in \mathbb{N}$ heißt

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k \tag{12}$$

die n**-te Partialsumme**. Die Folge der Partialsummen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt die (unendliche) **Reihe** mit Gliedern $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- Falls $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert mit $s := \lim\limits_{n\to\infty} s_n$, heißt s der **Wert** der Reihe. Wir schreiben in diesem Fall:
$$s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \tag{13}$$
- Falls $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht konvergiert, heißt die Reihe **divergent**.
- Falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge ist und $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt gegen $\pm\infty$ divergiert, heißt die Reihe **bestimmt divergent** oder **uneigentlich konvergent** gegen $\pm\infty$. Wir schreiben in diesem Fall:
$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \pm\infty \tag{14}$$

Bemerkungen:

- Oft identifiziert man die Folge der Partialsummen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ direkt mit dem Ausdruck $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$.
- Die Reihe muss nicht zwingend bei $k = 1$ anfangen, sondern kann zum Beispiel auch bei $k = 0$ oder $k = 2$ etc. anfangen.

Beispiele: Einige wichtige Reihen sollte man kennen:

- Die geometrische Reihe:
$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z} \qquad \text{für } |z| < 1 \tag{15}$$
Ihre Partialsummen sind:
$$s_n = \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z} \xrightarrow{|z|<1} \frac{1}{1-z} \tag{16}$$

- Die harmonische Reihe:
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty \tag{17}$$
Die harmonische Reihe divergiert bestimmt.

2.2. Absolute Konvergenz und Umordnung

Definition: Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt absolut konvergent, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

Definition: Sei $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ eine Bijektion. Dann heißt $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ eine **Umordnung** der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Bemerkung: Die bijektive Abbildung σ vertauscht die Indizes der Reihenglieder und ordnet sie dadurch um.

Satz (Riemannscher Umordnungssatz): Für jede konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, die nicht absolut konvergiert, und jedes $x \in \mathbb{R}$ gibt es eine Umordnung $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$, die gegen x konvergiert.

Bemerkung: Dieses Verhalten mag einem ziemlich merkwürdig erscheinen. Zum Beispiel kann man die alternierende harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, die konvergiert, aber nicht absolut konvergiert, immer so umordnen, dass jeder beliebige Wert herauskommt, den man sich wünscht. Man stellt allerdings fest, dass sich absolut konvergente Reihen weniger seltsam verhalten:

Satz: Konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut gegen einen Wert, konvergiert jede beliebige Umordnung gegen denselben Wert.

2.3. Konvergenzkriterien und Grenzwertarithmetik

Wie können wir bestimmen, ob eine Reihe überhaupt konvergiert? Die Reihenglieder können beliebig kompliziert sein, und den Wert einer Reihe direkt zu berechnen ist nur selten möglich. Zum Glück gibt es einige Kriterien, mit denen wir eine Reihe auf Herz und Nieren prüfen können.

Satz (Nullfolgenkriterium): Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe. Dann gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergent} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \tag{18}$$

Bemerkungen:

- Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht. Man betrachte nur die harmonische Reihe: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, aber $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$.
- Interessant ist dieser Satz insbesondere, wenn man herausfinden möchte, ob eine Reihe *nicht* konvergiert. Dazu schaut man sich die Negation der Aussage an:

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergent} \tag{19}$$

  Ist die Folge der Reihenglieder (a_n) nämlich keine Nullfolge, kann die Reihe gar nicht konvergieren. Dies ist intuitiv klar, denn konvergiert (a_n) gegen einen endlichen Grenzwert, so summiert man in der Reihe irgendwann näherungsweise immer nur noch diesen Grenzwert auf. Die Partialsummen werden in jedem Schritt etwa um den Grenzwert größer und wachsen damit über alle Grenzen.

Beispiel: Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n}$ konvergiert nicht, da $\sqrt[n]{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ keine Nullfolge ist.

Satz (Cauchy-Kriterium): Analog zum Cauchy-Kriterium für Folgen findet man für Reihen ein ähnliches Konvergenzkriterium:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergent} \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \geq m \geq N : \sum_{k=m}^{n} a_k < \epsilon \tag{20}$$

Satz (Leibnitz-Kriterium): Sei (a_n) eine monoton fallende Nullfolge mit $a_n \geq 0$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$.

Bemerkung: Das Leibnitzkriterium trifft keine Aussage über absolute Konvergenz, wie man am folgenden Beispiel sieht:

Beispiel: Die alternierende harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konvergiert nach dem Leibnitzkriterium, da $\frac{1}{n}$ eine monoton fallende Nullfolge ist. Allerdings konvergiert sie nicht absolut, da $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ ist.

Satz (Majorantenkriterium): Sei $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent mit $b_n \geq 0$. Falls $|a_n| \leq b_n$ für fast alle $n \in$ N, dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut.

Bemerkungen:

- Der Ausdruck „für fast alle $n \in$ N“ bedeutet „für alle $n \in$ N bis auf endlich viele“.
- Analog kann man auch die Divergenz von Reihen zeigen, indem man sie gegen bekanntermaßen divergente Reihen abschätzt.

Beispiel: Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ konvergiert nicht, da man sie gegen die harmonische Reihe abschätzen kann. Es gilt nämlich $\frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{2n}$ und damit $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \infty$.

Satz (Quotientenkriterium): Sei $a_n \neq 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

- $\limsup\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent
- $\liminf\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent
- $\limsup\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$ keine Aussage möglich

Beispiel: Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$ konvergiert nach dem Quotientenkriterium, denn es gilt:

$$\frac{\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}}{\frac{n^2}{n!}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0 < 1 \tag{21}$$

Satz (Wurzelkriterium): Es gilt:

- $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent
- $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent
- $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ keine Aussage möglich

Beispiel: Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ konvergiert nach dem Wurzelkriterium, denn es gilt:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2} < 1 \tag{22}$$

Bemerkung: Wann ist es sinnvoll, das Quotientenkriterium und wann das Wurzelkriterium anzuwenden? Das Quotientenkriterium ist häufig sinnvoll, wenn in den Reihengliedern a_n Fakultäten (z.B. $n!$) oder feste Potenzen von n (z.B. n^2) auftreten. Das Wurzelkriterium hingegen ist hilfreich, wenn n als Exponent auftritt (z.B. 2^n).

Satz (Rechenregeln): Seien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b$ zwei konvergente Reihen, sowie $c \in \mathbb{R}$. Dann gelten folgende Rechenregeln:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = a + b$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n = c \cdot a$

Sind $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ sogar absolut konvergent, so gilt die **Cauchy-Produktformel**:

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)$ ist absolut konvergent und $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) = a \cdot b$

2.4. Potenzreihen und Konvergenzradius

Kommen wir nun zu einem speziellen Typ Reihen, den sogenannten Potenzreihen. Diese sind von außerordentlicher Wichtigkeit auch in der Physik, da man mit ihnen jede ausreichend „gutmütige“ Funktion durch ein Polynom approximieren kann (Taylor-Reihe). Doch schauen wir uns zunächst an, was eine Potenzreihe überhaupt ist:

Definition: Jede Reihe der Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ mit Koeffizienten $a_n \in \mathbb{C}$, Variable $z \in \mathbb{C}$ und Entwicklungspunkt $a \in \mathbb{C}$ wird **Potenzreihe** genannt. Man nennt

$$R := \sup\{|z-a| \mid z \in \mathbb{C} \text{ und } \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n \text{ konvergent}\} \tag{23}$$

den **Konvergenzradius** der Potenzreihe.

Bemerkungen:

- Im Komplexen ist der Konvergenzradius der Radius der Kreisscheibe um a, auf der die Potenzreihe konvergiert. Im Reellen gibt der Konvergenzradius die Breite des Intervalls $(a-R, a+R)$ um a an, auf dem die Potenzreihe konvergiert.
- Es gibt zum Beispiel auch Potenzreihen der Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{2n}$. Diese sind zu verstehen als Potenzreihen der Form $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, wobei $b_n = \begin{cases} a_{n/2} & n \text{ gerade} \\ 0 & n \text{ ungerade} \end{cases}$.

Beispiel: Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ ist eine Potenzreihe.

Satz: Sei $R \in [0, \infty)$ der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$. Es stellt sich heraus, dass gilt:

- $|z-a| < R \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ konvergiert absolut
- $|z-a| > R \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ divergiert
- $|z-a| = R$ keine Aussage möglich

Satz: Aus dem Wurzel- und dem Quotientenkriterium folgen zwei Formeln für den Konvergenzradius einer Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$:

- $R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ (Formel von Cauchy-Hadamard)
- $R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$

Beispiel: Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ hat den Konvergenzradius $R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}}} = 1$.

2.5. Die Exponentialreihe und ihre Freunde

Beschäftigen wir uns zum Schluss noch mit einer ganz besonderen Potenzreihe, nämlich der Exponentialreihe.

Definition: Die **Exponentialreihe** ist für $z \in \mathbb{C}$ definiert als

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \tag{24}$$

Sie hat Konvergenzradius ∞. Die Exponentialreihe ist die Reihendarstellung der Exponentialfunktion e^z, denn es gilt $\exp(z) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Satz: Die Exponentialreihe hat einige interessante Eigenschaften. Seien $z, w \in \mathbb{C}$, dann gilt:

a) $\exp(0) = 1$ $\quad \exp(1) = e$ $\quad \exp(z) \neq 0$

b) $\exp(z + w) = \exp(z) \cdot \exp(w)$ $\quad \frac{1}{\exp(z)} = \exp(-z)$

c) $\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})$

Betrachtet man nur reelle Argumente $x \in \mathbb{R}$, so kommen folgende Eigenschaften hinzu:

d) $\exp(x) > 0$ $\quad \exp(x) \geq 1 + x$ für $x \geq 0$

e) exp ist streng monoton steigend $\quad \exp : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty)$ ist bijektiv

f) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\exp(x)}{x^k} = \infty$ für $k > 0$ (Die Exponentialfunktion wächst schneller als jede feste Potenz von x)

Definition: Die Umkehrabbildung $\log : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ von $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty)$ heißt (natürlicher) **Logarithmus**.

Satz: Aus den Eigenschaften der reellen Exponentialfunktion kann man folgende Eigenschaften des Logarithmus herleiten. Seien $x, y > 0$, dann gilt:

a) $\log(1) = 0$ $\quad \log(e) = 1$

b) $\log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y)$ $\quad \log\left(\frac{1}{x}\right) = -\log(x)$

c) log ist streng monoton steigend $\quad \log : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ ist bijektiv

d) $\log \leq x - 1$ für $x \geq 1$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{x^k} = 0$ für $k > 0$ (Der Logarithmus wächst langsamer als jede feste Potenz von x)

Bemerkung: Man kann den Logarithmus auch auf komplexe Zahlen verallgemeinern, indem man ausnutzt, dass $\exp : \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}(z) \in (-\pi, \pi]\} \longrightarrow \mathbb{C} \backslash \{0\}$ eine Bijektion ist. Man definiert:

Definition: Der **komplexe Logarithmus** ist die Funktion

$$\mathrm{Log} : \mathbb{C}\backslash\{0\} \longrightarrow \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}(z) \in (-\pi, \pi]\};\ z \longmapsto \mathrm{Log}(z) := \log|z| + i\arg(z) \tag{25}$$

Dabei ist log der bereits bekannte reelle natürliche Logarithmus. Man kann zeigen, dass Log auf $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ die Umkehrfunktion von exp ist.

Bemerkung: Diese Definition ist nicht gültig für negative reelle Zahlen, da deren Imaginärteil gerade $-\pi$ ist und sie damit nicht in der Definitionsmenge enthalten sind.

Definition: Weitere wichtige Funktionen, die sich aus der Exponentialreihe herleiten lassen, sind:

Name	Funktionsdefinition	Abbildungsvorschrift	Reihendarstellung	Darstellung mit exp
Sinus	$\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$	$z \mapsto \sin(z)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$	$\frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$
Cosinus	$\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$	$z \mapsto \cos(z)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$	$\frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)$
Tangens	$\tan : \mathbb{C}\backslash\{(k+\frac{1}{2})\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{C}$	$z \mapsto \tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$	kompliziert	$\frac{1}{i}\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}}$
Cotangens	$\cot : \mathbb{C}\backslash\{k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{C}$	$z \mapsto \cot(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)}$	kompliziert	$i\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}}$
Sinus hyperbolicus	$\sinh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$	$z \mapsto \sinh(z)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$\frac{1}{2}\left(e^{z} - e^{-z}\right)$
Cosinus hyperbolicus	$\cosh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$	$z \mapsto \cosh(z)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$	$\frac{1}{2}\left(e^{z} + e^{-z}\right)$
Tangens hyperbolicus	$\tanh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$	$z \mapsto \tanh(z) = \frac{\sinh z}{\cosh z}$	kompliziert	$\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}}$

Alle angegebenen Reihendarstellungen haben Konvergenzradius ∞.

Satz: Es gelten folgende Zusammenhänge. Sei $z \in \mathbb{C}$ und $x, y \in \mathbb{R}$, dann gilt:

a) Eulersche Formel:

$$e^{\pm iz} = \cos(z) \pm i\sin(z) \qquad e^{\pm z} = \cosh(z) \pm \sinh(z)$$

b) Trigonometrischer Pythagoras:

$$\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1 \qquad \cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$$

c) Additionstheoreme:

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \quad \sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)$$

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \quad \cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$$

A. Literaturverzeichnis

[1] Matthias Vogelgesang (Youthernergy). *Konvergenz*. URL: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Konvergenz.svg.