Technische Universität München
Fakultät für Physik

Ferienkurs Analysis 1
Montag, 1.4.19

Tutoren:[1] Samuel Scalet, Eduard Koller

Letzte Änderung: 2. April 2019

[1] Skriptvorlage mit freundlicher Genehmigung von Jonas Habel, Florian Kollmannsberger

Inhaltsverzeichnis

1. Logik

1.1. Aussagen

Eine Aussage ist ein Satz, dem genau einer der Wahrheitswerte “wahr“ oder “falsch“ zugeordnet wird. Die Verknüpfung von Aussagen erfolgt über Junktoren, die Werte der Verknüpfungen sind in Tabelle (1) dargestellt:

Tabelle 1: Wahrheitswerte von durch Junktoren verknüpften Aussagen sind in dieser Wahrheitstafel gegeben.

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
f	f	w	f	f	w	w
f	w	w	f	w	w	f
w	f	f	f	w	f	f
w	w	f	w	w	w	w

1.2. Beweistechniken

In einem Beweis möchte man Grundsätzlich die Implikation $A \Rightarrow B$ zeigen. Geht man von einer wahren Aussage A aus, so soll also auch Aussage B wahr sein. Dazu gibt es drei Möglichkeiten:

$$\begin{aligned} \text{Direkter Beweis:} &\qquad A \Rightarrow B \\ \text{Kontraposition:} &\qquad (A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A) \\ \text{Reductio ad absurdum:} &\qquad B \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow C) \end{aligned}$$

wobei C eine beliebige falsche Aussage ist. Den direkten Beweis benützt man in einfachen Fällen, zB. wenn die Aussage durch algebraische Umformungen leicht zu zeigen ist, ansonsten greift man vorzugsweise zur Kontraposition.

Beispiel: Kontraposition $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
Behauptung:

$$\underbrace{x^2 \text{ ist ungerade}}_{Ausage A} \Rightarrow \underbrace{x \text{ ist ungerade}}_{Ausage B}$$

Beweis: Sei x gerade. Dann ist x = 2 a für eine ganze Zahl a. $x^2 = (2a)^2 = 2(2a^2)$ ist eine gerade Zahl. Hier ist (x gerade) $\neg B$ und (x^2 gerade)$\neg A$.

Beispiel: Reductio ad absurdum $B \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow C)$
Behauptung:

$$x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow \underbrace{(x \leq y) \vee (x \geq y)}_{Ausage B}$$

Beweis: Angenommen es gelte $\neg B$: $(x < y) \wedge (x > y) \Leftrightarrow (x - y < 0) \wedge (x - y > 0)$ was ein Widerspruch dazu ist, dass jede Zahl in $\mathbb{R}$ entweder positiv, negativ oder 0 ist.

2. Abbildungen

2.1. Definition und Wertebereich

Definition: Eine Abbildung f von der Menge M in die Menge N ordnet jedem Element $x \in M$ genau ein Element $y \in N$ zu. Wir definieren die Abbildung f durch:

$$f : \begin{cases} M \to N \\ x \mapsto f(x) = y \end{cases}$$

Dabei nennt man M Definitions- und N Wertebereich, $f(x)$ (Funktions)wert an der Stelle x, $f(A) := \{y \in N \mid \exists x \in M : f(x) = y\}$ Bild von A unter f (für alle $A \subseteq M$) und $G_f \; \{(x, y) \in M \times N | f(x) = y\}$ den Graph von f .

Bemerkung: Sind M, N Teilmengen von $\mathbb{K}$ mit $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, \mathbb{C}, \mathbb{C}^n\}$ so spricht man von einer Funktion statt von einer Abbildung.
Ist M eine Teilmenge von $\mathbb{N}_0$, so spricht man von einer Folge, mehr dazu in Vorlesung 2.

2.2. Surjektiv, Injektiv, Bijektiv

Definition: Seinen M, N zwei Mengen und $f : M \mapsto N, x \to f(x)$, dann heißt

(a) f injektiv, genau dann wenn:

$$\forall x_1, x_2 \in M : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

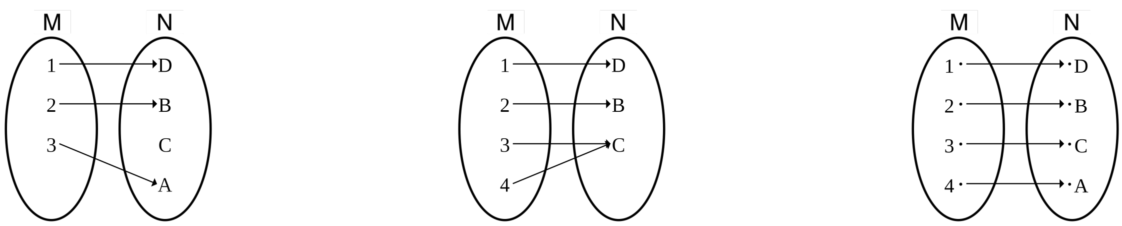
Es gibt für jeden Punkt a in N maximal einen Punkt b in M mit $f(b) = a$.

(b) f surjektiv, genau dann wenn:

$$f(M) = N \Leftrightarrow \forall y \in N \, \exists x \in M : f(x) = y$$

Auf jedes Element der Bildmenge wird abgebildet.

(c) f bijektiv, genau dann wenn f injektiv und subjektiv ist:
Für jeden Punkt a in N gibt es genau ein b in M mit $f(b) = a$.



(a) Injektive Abbildung, [2]

(b) Surjektive Abbildung, [3]

(c) Bijektive Abbildung, [1]

Abbildung 1: Skizze der Verschiedenen Eigenschaften einer Funktion $f : M \to N, x \mapsto f(x)$.

Beispiel: Sei folgende Funktion gegeben:

$$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, x \to f(x) := 2x + 4$$

(a) f ist injektiv, denn:

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow 2x_1 + 4 = 2x_2 + 4 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

(b) f ist surjektiv, das Urbild x von y lässt sich direkt angeben: $x = \frac{1}{2}(y-4)$.

(c) Da f injektiv und surjektiv ist, ist f auch bijektiv.

2.3. Umkehrfunktion und Verknüpfung

Ist eine Funktion bijektiv, so besteht $f^{-1}(\{y\})$ aus genau einem Element. Dies motiviert: Definition: Sei $f : M \to N$ eine Bijektion. Die Umkehrfunktion $f^-1 : N \to M, y \mapsto f^{-1}(y) = x$ ordnet jedem $y \in \mathbb{N}$ sein eindeutiges Urbild $x \in M$ zu.

Definition: Funktionen können verknüpft (hintereinander) ausgeführt werden. Für $f : N \to L$ und $g : M \to N$ ist die Verknüpfung $(f \circ g)(x) : M \to L, x \to f(g(x))$.

3. Vollständige Induktion

Sei A(n) eine Aussage für eine Menge von Objekten, wobei die Menge die Größe n hat. Das kann zum Beispiel eine Formel oder eine Charakterisierung sein. Beim Beweis per Induktion versucht man die Aussagen mit einer Kette von Folgerungen zu zeigen. (Dass dies immer klappt und anwendbar ist wird hierbei axiomatisch festgelegt "Peano Axiome").

Vorstellung $A(0) \to A(1) \to ... \to A(n) \to A(n+1) \to ...$

Ein Induktionsbeweis besteht aus 3 Dingen:

I.A. Induktionsanfang: Der Anfang der Kette

I.B. Die Aussage, die bei der Induktion gezeigt werden soll. Es ist hilfreich beim Beweis sich das noch ein mal aufzuschreiben.

I.S. Hier wird die Aussage gezeigt. Funktioniert in der Regel indem man mit einer Seite anfängt, dann diese solange umformt bis man die Induktionsbehauptung benutzen kann, und dann nachdem man die Induktionsbehauptung hergenommen hat, zur anderen Seite umformt. Manchmal muss man die Induktionsbehauptung auch öfters benutzen.

Beispiel: Man zeige per vollständiger Induktion:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Beweis:

I.A. $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1 = \frac{1(1+1)(2 \cdot 1+1)}{6}$

I.B. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

I.S. zu zeigen $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$

$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 \overset{\text{I.B.}}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)(n(2n+1)+6(n+1))}{6}$

Wir rechnen nach: $n(2n+1)+6(n+1) = 2n^2+n+6n+6$ und $(n+2)(2(n+1)+1) = (n+2)(2n+3) = 2n^2+3n+4n+6$. Also gilt $\frac{(n+1)(n(2n+1)+6(n+1))}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$ und damit folgt die Aussage.

4. Obere und untere Schranke

Sei $(M, <)$ eine geordnete Menge (in der Regel $\mathbb{R}$), $N \subset M$
Definition:

$x \in M$ ist eine obere Schranke von N, falls $y \leq x \; \forall y \in N$

$x \in M$ ist eine untere Schranke von N, falls $y \geq x \; \forall y \in N$

Falls eine obere Schranke existiert heißt N nach oben beschränkt, falls eine untere Schrnake exisitert heißt N nach unten beschränkt

4.1. Supremum und Infimum

Definition

Eine obere Schranke s von N mit der Eigenschaft dass ($x \in M$ obere Schranke an N) $\rightarrow$ $s \leq x$ heißt Supremum (kleinste obere Schranke) von N.

Eine untere Schranke s von N mit der Eigenschaft dass ($x \in M$ untere Schranke an N) $\rightarrow$ $s \geq x$ heißt Infimum (größte untere Schranke) von N.

4.2. Maximum, Minimum

Definition:

$x \in M$ heißt Maximum von $N \subset M :\leftrightarrow x \in N \wedge y \leq x \; \forall y \in N$

$x \in M$ heißt Minimum von $N \subset M :\leftrightarrow x \in N \wedge y \geq x \; \forall y \in N$

Bemerkung: Ein Maximum oder Minimum muss es nicht immer geben (a,b) $a, b \in \mathbb{R}$

Bemerkung: Infimum, Maximum, Supremum, Minimum sind eindeutig.

Bemerkung: Falls sup N existiert und sup N $\in N$, dann ist sup N = max N.
Falls inf N existiert und inf N $\in N$ dann ist inf N = min N.

Beispiel:

Sei $M = \{1/n | n \in \mathbb{N}\}$ dann ist

$$1 = \max M = \min M \text{ und}$$

$$0 = \inf M.$$

M besitzt jedoch kein Minimum.

4.3. Supremum Infimum einer Funktion

f : B→ M eine Funktion wobei $(M, <)$ eine geordnete Menge ist, dann

$$\sup_{x \in B} f(x) = \sup f(B)$$

$$\inf_{x \in B} f(x) = \inf f(B)$$

$\max\limits_{x \in B} f(x)$ und $\min\limits_{x \in B} f(x)$ sind analog definiert Falls $\sup\limits_{x \in B} f(x) = \max\limits_{x \in B} f(x)$ dann nimmt f auf B ihr Maximum an. Analog für min, inf. Vorgehen finde Supremum bzw Infimum und schaue ob es in der Menge liegt.

5. Monotone Funktionen

f:M→ N, $(M, <), (N, <)$ geordnete Mengen.
Definition: f heißt

$$\text{streng monoton wachsend } x < y \to f(x) < f(y) \tag{1}$$
$$\text{streng monoton fallend } x < y \to f(x) > f(y) \tag{2}$$
$$\text{monoton wachsend } x < y \to f(x) \leq f(y) \tag{3}$$
$$\text{monoton fallend } x < y \to f(x) \geq f(y) \tag{4}$$
$$\tag{5}$$

Lemma: f streng monoton wachsend oder fallend → injektiv.

Beweis: "$\neg B \to \neg A$"wobei hier A (streng monoton wachsend) und B (injektiv) ist. Wir betrachten hier nur den Fall streng monoton wachsend, für streng monoton wachsend geht der Beweis analog.
Sei f nicht injektiv, d.h. $\exists x, y : x \neq y$ und f(x) = f(y). M geordnet →

$$x < y \to f(x) < f(y)$$

$$x > y \to f(x) > f(y)$$

da f streng monoton steigend ist. In beiden Fällen ist $f(x) \neq f(y)$, was ein Widerspruch zur ursprünglichen Annahme ist. Damit muss, falls f streng monoton wachsend ist, f auch injektiv sein.

Logik: fange mit $\neg B$ an und nehme an das A gilt. Daraus ergibt sich ein Widersrpuch, da aber $\neg B$ gilt, muss $\neg B \to \neg A$ gelten, was äquivalent zu $A \to B$ ist.

6. Polardarstellung und kartesische Darstellung von komplexen Zahlen

Die zwei gängigen eindeutigen Darstellungen komplexer Zahlen $z \in \mathbb{C}$ sind

$$z = a + ib \text{ mit } a, b \in \mathbb{R}$$

$$z = re^{i\phi} \text{ mit } r \in [0, \infty) \text{ und } \phi \in [0, 2\pi)$$

Man beachte $e^{i(\phi+2\pi)} = e^{i\phi}$.

Um von der Polardarstellung zur kartesischen Darstellung zu kommen benutzt man die Eulerformel:

$$re^{i\phi} = r \cdot (\cos(\phi) + i \sin(\phi))$$

Die Umkehrung geschieht über folgende Formeln:

$$\phi = \arctan(b/a)$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Beispiele:

Addition: $(3 + 5i) + (7 - 2i) = 10 + 3i$

Multiplikation: $(3 + 5i) \cdot (7 - 2i) = 21 - 6i + 35i + 10 = 31 + 29i$

Multiplikation: $2e^{i\pi} \cdot 3e^{i\pi/2} = 6e^{i3\pi/4}$

Bruch: $\frac{1}{3+5i} = \frac{3-5i}{(3+5i)(3-5i)} = \frac{3-5i}{34}$

Bruch $\frac{1}{5e^{i\pi/2}} = \frac{1}{5}e^{-i\pi/2}$

6.1. Einheitswurzel

Sei $n \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{C}$
Definition: $w \in \mathbb{C}$ ist die nte komplexe Wurzel von $z \in \mathbb{C}$ falls $w^n = z$ gilt. Sei z in der Form $z = re^{i\phi}$ dann ist $w_k = \sqrt[n]{r}e^{i(\frac{\phi}{n}+k\frac{2\pi}{n})}$ wobei $k = 0, 1, ..., n - 1$

6.2. Hauptzweig

Definition: Die Abbildung $\sqrt[n]{\ } : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt Hauptzweig der komplexen nten Wurzel und es gilt $z \to \sqrt[n]{|z|}e^{i\frac{arg(z)}{n}} = w_0$

A. Literaturverzeichnis

[1] *Bijektivität*. URL: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Bijection.svg.

[2] *Injektivität*. URL: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Injection.svg.

[3] *Surjektivität*. URL: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Surjection.svg.