Technische Universität München

Wintersemester 2018/2019

Ferienkurs zur Vorlesung Mathematik für Physiker 1 (Lineare Algebra)

Skript zu Tag 1-4

25.03.2019 - 29.03.2019

Laura Louis laura.louis@tum.de

Frederik Schnack frederik.schnack@tum.de

Inhaltsverzeichnis

1 Matrizen und Vektoren

In diesem Kapitel steht K stets für einen Körper, also z.B. $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

Definition 1.1 (Matrix)**.** Eine $m \times n$ Matrix ist eine rechteckige Anordnung von Elementen aus K auf m Zeilen und n Spalten der Form

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} == (a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} = (a_{i,j}).$$

Eine Matrix $A \in K^{n \times m}$heißt...

- Zeilenvektor, falls $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_m \end{pmatrix} \in K^{1 \times n}$.
- Spaltenvektor, falls $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \in K^{m \times 1}$.
- Zahl (Skalar), falls $A = (a) = a \in K^{1 \times 1}$.
- quadratisch, falls $n = m$.
- Nullmatrix, falls $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} =: \mathbf{0}$.
- Einheitsmatrix, falls $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} =: I_n \in K^{n \times n}$.

Wir definieren folgende Matrixoperationen:

Definition 1.2 (Addition)**.** Seien $A = (a_{i,j}) \in K^{m \times n}$ und $B = (b_{i,j}) \in K^{m \times n}$, also zwei Matrizen mit **derselben Anzahl an Zeilen** m **und Spalten** n. Dann ist:

$$A + B = (c_{i,j}) \quad \text{mit} \quad c_{i,j} := a_{i,j} + b_{i,j}.$$

Matrizen werden demnach komponentenweise addiert.

Beispiel 1.1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 7 \\ 7 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+9 & 2-2 \\ 4-2 & 5+7 \\ 7+7 & 8-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 2 & 12 \\ 14 & 5 \end{pmatrix}$$

Hingegen ist z.B. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & -2 & 2 \\ -2 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ nicht definiert.

Definition 1.3 (Skalare Multiplikation)**.** Sei $\lambda \in K$ und $A = (a_{i,j}) \in K^{m \times n}$. Dann gilt:

$$\lambda \cdot (a_{i,j}) = (\lambda a_{i,j})$$

Jede einzelne Komponente von A wird mit dem Skalar multipliziert.

Beispiel 1.2.

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 4 & 2 \cdot 5 \\ 2 \cdot 7 & 2 \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 10 \\ 14 & 16 \end{pmatrix}$$

Definition 1.4 (Matrixmultiplikation)**.** Seien $A = (a_{i,j}) \in K^{m \times n}$ und $B = (b_{i,j}) \in K^{n \times l}$, also zwei Matrizen, wobei **die Spaltenzahl der ersten Matrix gleich der Zeilenzahl der zweiten Matrix ist**. Dann ist: $A \cdot B = (c_{i,j})$ mit

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$$

Merkregel: „Zeile mal Spalte“.

Beispiel 1.3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -2 & 2 \\ -2 & 7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 9 + 2 \cdot (-2) & 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 7 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \\ 4 \cdot 9 + 5 \cdot (-2) & 4 \cdot (-2) + 5 \cdot 7 & 4 \cdot 2 + 5 \cdot 1 \\ 7 \cdot 9 + 8 \cdot (-2) & 7 \cdot (-2) + 8 \cdot 7 & 7 \cdot 2 + 8 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 4 \\ 26 & 27 & 13 \\ 47 & 42 & 22 \end{pmatrix}$$

Hingegen ist z.B. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 7 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$ nicht definiert.

Anmerkung 1.1. Für quadratische Matrizen definiert man zusätzlich: $A^2 := A \cdot A$.

Definition 1.5 (Transponierte Matrix)**.** Für $A = (a_{i,j}) \in K^{m \times n}$ ist $A^T := (a_{j,i}) \in K^{n \times m}$ die transponierte Matrix zu A. Es werden Zeilen und Spalten der Matrix vertauscht.

Beispiel 1.4.

$$\begin{pmatrix} 12 & 11 & 10 \\ 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 12 & 9 & 6 & 3 \\ 11 & 8 & 5 & 2 \\ 10 & 7 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Satz 1.1. *Für zwei A, B und $s \in K$ gilt:*

- $(A^T)^T = A$;
- $(A + B)^T = A^T + B^T$;
- $(s \cdot A)^T = s \cdot A^T$;
- $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

Definition 1.6 (Symmetrische Matrix)**.** Eine quadratische Matrix heißt symmetrisch, falls $A^T = A$ gilt.

Definition 1.7 (Kommutativität)**.** Gilt für zwei Matrizen A und B die Gleichheit $A \cdot B = B \cdot A$, so kommutieren A und B.

Anmerkung 1.2. Im Allgemeinen gilt die Formel $A \cdot B = B \cdot A$ **nicht**!

2 Lineare Gleichungssysteme

Beispiel 2.1. Gegeben sei ein lineares Gleichunssystem der Form:

$$\begin{aligned} 2x_2 + 3x_2 + 5x_3 &= 8 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 5 \\ 4x_1 + 5x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem lässt sich als Matrix-Vektor-Multiplikation formulieren:

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = b \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Definition 2.1 (Lineares Gleichungssystem, erweiterte Koeffizientenmatrix)**.** Eine Gleichung der Form $A \cdot x = b$ mit $A \in K^{m \times n}$ und $b \in K^{m \times 1} = K^m$ bezeichnet man als lineares Gleichungssystem (kurz: LGS).

- Die zugehörige Lösungsmenge ist die Menge aller $x \in K^n$, die das System lösen.
- Das LGS heißt homogen, falls $b = (0, 0, ..., 0)$, sonst inhomogen.
- Die Matrix A heißt Koeffizientenmatrix des LGS.
- Die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|b) \in K^{m\times(n+1)}$ kodiert das gesamte LGS.

Ziel ist es nun ein Verfahren zur Bestimmung der Lösungsmenge eines LGS zu entwickeln. Mithilfe von sogenannten Zeilenoperationen soll die erweiterte Koeffizientenmatrix auf Zeilenstufenform gebracht werden:

Definition 2.2 (Elementare Zeilenoperationen)**.** Die folgenden Operationen heißen elementare Zeilenoperationen:

- **Typ I:** Vertauschen zweier Zeilen;
- **Typ II:** Multiplizieren einer Zeile mit einem Skalar $s \in K\backslash\{0\}$;
- **Typ III:** Addieren des s-fachen einer Zeile zu einer anderen, wobei $s \in K$.

Anmerkung 2.1. Diese Operationen ändern die Lösungsmenge nicht und dienen der Vereinfachung eines LGS in eine Form, in der die Lösungsmenge direkt abgelesen werden

Definition 2.3 (Zeilenstufenform)**.** Eine Matrix $A \in K^{m\times n}$ ist in Zeilenstufenform, wenn sie folgende Bedingungen erfüllt:

- Beginnt eine Zeile mit k Nullen, so stehen unter diesen Nullen lauter weitere Nullen;
- Unter dem **ersten** Eintrag $\neq 0$ einer jeder Zeile (falls diese keine Nullzeile ist) stehen lauter Nullen;
- Stehen zusätzlich **über** dem führenden Eintrag jeder Zeile ebenfalls lauter Nullen und ist jeder führende Eintrag eine 1, so ist die Matrix in strenger Zeilenstufenform

Mittels des sogenannten Gauß-Jordan-Algorithmus (Anwendung elementarer Zeilenoperatioen) lässt sich nun eine beliebige Matrix auf reduzierte Zeilenstufenform bringen. Anschließend ist die Lösungsmenge des entsprechenden GLS einfach ablesbar.

Beispiel 2.2. Fortsetzung von 2.1:
Unter Verwendung der 3 Zeilenoperationen bringen wir die Matrix auf strenge Zeilenstufenform (Gauß-Algorithmus).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & 0 & 5 & 2 \end{array}\right) \underset{\text{I} \leftrightarrow \text{II (Typ I)}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 8 \\ 4 & 0 & 5 & 2 \end{array}\right) \underset{\text{II - 2} \cdot \text{I (Typ III)}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & 5 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{III - 4} \cdot \text{I (Typ III)}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -4 & 1 & -18 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{III + 4} \cdot \text{II (Typ III)}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 13 & -26 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{13} \cdot \text{III (Typ II)}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{II - 3} \cdot \text{III (Typ III)}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{I - } \cdot \text{ III (Typ III)}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{I - } \cdot \text{ II (Typ III)}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Aus der erhaltenen Matrix in strenger Zeilenstufenform können wir die Lösungsmenge einfach ablesen:

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

Beim letzten Beispiel haben wir gesehen, dass die Lösungsmenge des gegebenen LGS genau ein Element besitzt. Das ist bei LGS nicht immer der Fall. In der Tat können hinsichtlich der Lösbarkeit drei Fälle eintreten. Diese Fälle werden durch den Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix unterschieden.

Definition 2.4 (Rang)**.** Es sei $A \in K^{m \times n}$, und $A' \in K^{m \times n}$ sei eine Matrix in Zeilenstufenform, die durch elementare Zeilenoperationen aus A hervorgegangen ist. Dann ist der Rang von A definiert als die Anzahl r der Zeilen in A', die mindestens einen Eintrag $\neq 0$ haben. Wir schreiben $r =: rg(A)$.

Mithilfe dieses neuen Begriffs können wir die unterschiedlichen Lösbarkeits-Fälle auflisten:

1. Unlösbarkeit. Die letzte Zeile $\neq 0$ hat die Gestalt $(0 \cdots 0 | b_r)$ mit $b_r \neq 0$. Die Lösungsmenge ist leer: $L = \emptyset$. (Für die nächsten zwei Fälle sei dies nicht der Fall.)

2. Eindeutige Lösbarkeit. Die Matrix in Zeilenstufenform hat genauso viele Gleichungen $\neq 0$ wie Unbekannte des LGS. Anders gesagt: Der Rang von A ist gleich der Spaltenzahl von A ($r = n$). Die Lösungsmenge besitzt nur ein Element: $|L| = 1$.

3. Uneindeutige Lösbarkeit: Die Matrix in Zeilenstufenform hat weniger Gleichungen $\neq 0$ wie Unbekannten des LGS. Anders gesagt: Der Rang von A ist kleiner als die Spaltenzahl von A ($r < n$). Die Lösungsmenge hat dann $n - r$ freie Parameter und besitzt somit unendlich viele Elemente (falls K unendlich viele Elemente besitzt): $|L| = \infty$.

Satz 2.1 (Lösbarkeit LGS)**.** *Ein LGS* $A \cdot x = b$ *ist genau dann lösbar, wenn* $rg(A) = rg(A, b)$*.*

3 Gruppen, Ringe, Körper

Gruppen

Definition 3.1 (Gruppe)**.** Eine Gruppe ist eine Menge G zusammen mit einer Abbildung $\cdot : G \times G \to G, (a, b) \mapsto a \cdot b = ab$, sodass die folgende Gruppenaxiome erfüllt sind:

(G1) $\forall a, b, c \in G : (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (Assoziativität)

(G2) $\exists e \in G : \forall a \in G a \cdot e = e \cdot a = a$ (Existenz eines neutralen Elements)

(G3) $\forall a \in G : \exists a' \in G : a' \cdot a = a \cdot a' = e$ (Existenz inverser Elemente)

Eine Gruppe G heißt abelsch oder kommutativ, falls außerdem gilt:

(G4) $\forall a, b \in G : a \cdot b = b \cdot a$

Anmerkung 3.1. Das neutrale sowie inverse Elemente einer Gruppe sind eindeutig.

Beispiel 3.1. Standardbeispiele

1. $(\mathbb{N}, +)$ ist keine Gruppe, da (G2) verletzt ist. Es gibt kein neutrales Element.
2. $(\mathbb{N}_0, +)$ ist keine Gruppe, da (G3) verletzt ist. Kein Element außer der 0 hat ein Inverses.
3. $(\mathbb{Z}, +)$ ist eine abelsche Gruppe, ebenso $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ und $(\mathbb{C}, +)$.
4. $(\mathbb{Z}, \cdot)$ ist keine Gruppe, da (G3) verletzt ist. Kein Element außer 1 und -1 hat ein Inverses. Ebenso sind $(\mathbb{Q}, \cdot)$, $(\mathbb{R}, \cdot)$ und $(\mathbb{C}, \cdot)$ keine Gruppen, da die 0 nicht invertierbar ist.
5. $(\mathbb{Q}\backslash\{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{R}\backslash\{0\}, \cdot)$ und $(\mathbb{C}\backslash\{0\}, \cdot)$ sind abelsche Gruppen.
6. $(\{-1, 1\}, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe. $(\{-1, 1\}, +)$ hingegen nicht. Es scheitert schon daran, dass $1 + 1 = 2$ und 2 liegt nicht mehr in unserer Menge. Also ist die Forderung, dass die Abbildung von $G \times G$ nach G geht schon nicht erfüllt und wir brauchen uns um (G1)-(G3) gar nicht zu kümmern.

Satz 3.1 (Rechenregeln)**.** *In einer Gruppe G gelten folgende Rechenregeln:*

- $\forall a \in G : (a^{-1})^{-1} = a$
- $\forall a, b \in G : (ab)^{-1} = b^{-1}a{-}1$

Definition 3.2 (Untergruppe)**.** Eine Untergruppe U einer Gruppe $(G, *)$ ist eine Teilmenge $U \subseteq G$, sodass gilt:
(UG1) $e \in U$ (UG2) $\forall x, y \in U : \quad x * y \in U$ (UG3) $\forall x \in U : \quad x^{-1} \in U$

Anmerkung 3.2. Eine (echte) Untergruppe ist also eine (echte) Teilmenge der Gruppe, die selbst wieder eine Gruppe ist.

Beispiel 3.2. $(\mathbb{Z}, +)$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{Q}, +)$. (Übungsaufgabe)

Wir betrachten kurz Abbildungen von Mengen um anschließend die sogenannte symmetrische Gruppe einzuführen.

Definition 3.3 (injektiv, surjektiv, bijektiv)**.** Seien A, B Mengen. Eine Abbildung $f : A \to B$ heißt

- **injektiv**, wenn jedes $b \in B$ höchstens ein Urbild unter f hat.
- **surjektiv**, wenn jedes $b \in B$ mindestens ein Urbild unter f hat.
- **bijektiv**, wenn jedes $b \in B$ genau ein Urbild unter f hat. Das ist äquivalent zu der Aussage, dass f sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

Definition 3.4 (Symmetrische Gruppe)**.** Für eine Menge A ist

$$S_A := \{f : A \to A \,|\, f \text{ ist bijektiv}\}$$

mit der Komposition, d.h. $f \cdot g := f \circ g$ eine Gruppe.

S_A heißt symmetrische Gruppe auf A. Die Elemente von S_A heißen Permutationen. Für $A = \{1, 2, ..., n\}, n \in \mathbb{N}$ heißt $S_n = S_A$ symmetrische Gruppe auf n Ziffern.

Anmerkung 3.3. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, Elemente der S_n darzustellen. Betrachten wir z.B. die S_3, also die Gruppe, die die Zahlen 1, 2, 3 permutiert (=vertauscht), so können wir die Vertauschung von 1 und 2 folgendermaßen schreiben:

- (12). Dies ist die sogenannte **Zykelschreibweise**, die man so liest: '1 wird abgebildet auf 2, 2 auf 1, 3 bleibt sitzen' oder in Zeichen: $1 \mapsto 2, 2 \mapsto 1, 3 \mapsto 3$
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. In dieser Schreibweise kommen alle Ziffern 1 bis n in die erste Zeile und in der zweiten Zeile stehen die jeweiligen Bilder.

Anmerkung 3.4. Kardinalität und Kommutativität

- Die Kardinalität (= Mächtigkeit) der S_n ist $n!$ (Übungsaufgabe)
- Für $n \geq 3$ ist S_n nicht abelsch (Übungsaufgabe)

Abschließend widmen wir uns noch kurz Homomorphismen - Abbildungen zwischen zwei Mengen mit Struktur (also z.B. zwei Gruppen), die die Struktur erhalten. Es gibt Homomorphismen zwischen allen möglichen Strukturen (Gruppen, Körper, Vektorräume, Ringe).

Definition 3.5 (Gruppenhomomorphismus)**.** Seien $(G, *)$ und $(\tilde{G}, \star)$ zwei Gruppen.
Ein Homomorphismus von Gruppen von $(G, *)$ nach $(\tilde{G}, \star)$ ist eine Abbildung $f : G \to \tilde{G}$, für die die folgende Eigenschaft gilt:

$$\forall x, y \in G : \quad f(x * y) = f(x) \star f(y).$$

Beispiel 3.3. Seien $(G, *) = (\mathbb{Z}, +)$ und $(\tilde{G}, \star) = (\mathbb{Q}, +)$ zwei Gruppen.

1. Wir betrachten folgende Abbildung $f(a) = \frac{a}{2}\ \forall a \in G$ und prüfen ob es sich dabei um einen Gruppenhomomorphismus handelt: Seien $a, b \in \mathbb{Z}$. Dann gilt:

   $$f(a+b) = \frac{a+b}{2} = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = f(a) + f(b)$$

   Also ist f ein Gruppenhomomorphismus.

2. Nun betrachten wir die Abbildung $g(a) = a^2\ \forall a \in G$ und prüfen erneut die Homomorphieeigenschaft:

   $$g(a+b) = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \neq a^2 + b^2 = g(a) + g(b)$$

   Dies ist also kein Gruppenhomomorphismus.

Anmerkung 3.5. Glossar Homomorphismen
Auch für Homomorphismen werden die Begriffe injektiv, surjektiv und bijektiv verwendet, um die Homomorphismen zu charakterisieren. Hier ein kleines Glossar der wichtigsten Homomorphismen (zum Nachschlagen gedacht). Seien A, B Gruppen:

Monomorphismus	injektiver Homomorphismus von A nach B
Epimorphismus	surjektiver Homomorphismus von A nach B
Isomorphismus	bijektiver Homomorphismus von A nach B
Endomorphismus	Homomorphismus von A nach A
Automorphismus	bijektiver Homomorphismus von A nach A

Ringe
Ringe sind eine algebraische Struktur mit zwei Rechenoperationen (Addition und Multiplikation). Allerdings besitzt hier nicht jedes Element ein multiplikativ Inverses.

Definition 3.6 (Ringe)**.** Ein Ring $(R, +, \cdot)$ ist eine Menge R zusammen mit zwei Operationen $R \times R \to R$,

$$(a, b) \mapsto a + b,$$
$$(a, b) \mapsto a \cdot b,$$

für die gilt:

(R1) (R, +) ist eine additive abelsche Gruppe

(R2) $\forall a, b, c \in R : (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (Assozitivität)

(R3) $\forall a, b, c \in R : a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ und $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ (Distributivgesetze)

(R4) $\exists 1 \in R$, sodass $1 \cdot a = a \cdot 1 = 1$ (Existenz multiplikativ n.E.)

Ein Ring heißt kommutativ, falls die $a \cdot b = b \cdot a$.

Anmerkung 3.6. Ein Ring ist in Bezug auf die Addition immer kommutativ.

Beispiel 3.4. Standardbeispiele

- Kommutativ: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}[x]$ Polynomring
- Nicht kommutativ: Quadratische Matrizen

Körper

Körper sind eine algebraische Struktur mit zwei Rechenoperationen (Addition und Multiplikation). Hier besitzt jedes Element ein multiplikativ Inverses. Ein Körper lässt sich als Erweiterung eines Rings definieren:

Definition 3.7 (Körper)**.** Ein kommutativer Ring heißt Körper, falls gilt:

- $0 \neq 1$,
- $(R \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine (multiplikative) Gruppe.

Alternativ lässt sich ein Körper über folgende Axiome definieren:

Definition 3.8. (Körper)
Ein Körper $(K, +, \cdot)$ ist eine Menge K mit zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$, sodass gilt:

(K1) $(K, +)$ ist eine abelsche Gruppe mit 0_K als neutralem Element der Addition.

(K2) $(K \backslash \{0_K\}, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe mit 1_K als neutralem Element der Multiplikation.

(K3) Es gelten die Distributivgesetze:

$$\forall a, b, c \in K : \quad (a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c), \quad a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c).$$

Beispiel 3.5. Standardbeispiele und Gegenbeispiele

1. $(\mathbb{Q}, +, *), (\mathbb{R}, +, *)$ und $(\mathbb{C}, +, *)$.
2. $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (p prim)
3. $(\mathbb{Z}, +, *)$ ist hingegen kein Körper, da $(\mathbb{Z}, *)$ keine Gruppe ist (z.B. Element 2 besitzt kein multiplikativ Inverses in $\mathbb{Z}$)

4 Vektorräume

Definition 4.1 (Vektorraum)**.** Ein K-Vektorraum (auch: Vektorraum über K genannt) ist eine Menge V zusammen mit zwei Abbildungen:

$$+ : V \times V \to V$$
$$(\vec{v}, \vec{w}) \mapsto \vec{v} + \vec{w}$$

und

$$\cdot : K \times V \to V$$
$$(a, v) \mapsto a \cdot \vec{v}$$

so dass folgende Axiome gelten:

(VR1) V ist mit + als Verknüpfung eine kommutative Gruppe.

(VR2) Für alle $a \in K$ und $\vec{v}, \vec{w} \in V$ gilt $a \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = a \cdot \vec{v} + a \cdot \vec{w}$ (Punkt vor Strich!).

(VR3) Für alle $a, b \in K$ und $\vec{v} \in V$ gilt $(a + b)\vec{v} = a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{v}$.

(VR4) Für alle $a, b \in K$ und $\vec{v} \in V$ gilt $(a \cdot b)\vec{v} = a \cdot (b \cdot \vec{v})$.

(VR5) Für alle $\vec{v} \in V$ gilt $1_K \cdot \vec{v} = \vec{v}$ (wobei 1_K das n. E. der Körpermultiplikation ist.)

Die Elemente eines Vektorraums heißen Vektoren.

Anmerkung 4.1*.* Offensichtlich kann mit '+' sowohl die Addition von Skalaren aus dem Körper gemeint sein $(a + b)$ als auch die Addition von Elementen aus der abelschen Gruppe V $(\vec{v} + \vec{w})$. Es muss im jeweiligen Kontext erschlossen werden, welche Addition gemeint ist. Es können nur Elemente aus gleichen Strukturen addiert werden, also ist z.B. $a + \vec{v}$ nicht sinnvoll. Mit '·' kann nur die Multiplikation von Skalaren gemeint sein. Die Multiplikation von Vektoren ist im Allgemeinen nicht definiert. Ab jetzt werden wir nur noch v anstelle von $\vec{v}$ für ein Element von V schreiben.

Beispiel 4.1*.* Standardbeispiele

1. Das klassische Beispiel für einen Vektorraum ist der $\mathbb{R}^n$, der n-dimensionale $\mathbb{R}$-Vektorraum. Genauso kann man aus jedem Körper einen K^n, den n-dimensionalen K-Vektorraum konstruieren.

2. $V = \{0\}$ (kommutative Gruppe mit nur einem Element, der 0) wird mit $a \cdot 0 := 0$ für $a \in K$ ein K-Vektorraum. Dieser Vektorraum heißt der **Nullraum**.

3. Polynomring $K[x] := \{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0 \,|\, n \in \mathbb{N}_0, a_i \in K\ \}$ (mit Polynomaddition und Produkt von Skalar und Polynom)

Satz 4.1 (Rechenregeln)**.** *Es seien V ein K-Vektorraum und* $a \in K, v \in V$ *. Dann gelten:*

1. $a \cdot 0 = 0$ *und* $0 \cdot v = 0$ *(in der ersten Gleichung bezeichnet die linke 0 den Nullvektor, in der zweiten das Nullelement von K)*
2. $(-a) \cdot v = a \cdot (-v) = -(a \cdot v)$
3. *Aus* $a \cdot v = 0$ *folgt* $a = 0$ *oder* $v = 0$*.*

Definition 4.2 (Untervektorraum)**.** Sei V ein K-Vektorraum. Eine Teilmenge $U \subseteq V$ heißt ein Untervektorraum (auch: Unterraum, Teilraum), falls gilt:

- $U \neq \emptyset$
- Für $v, w \in U$ ist auch $v + w \in U$.
- Für $a \in K$ und $v \in U$ ist auch $a \cdot v \in U$

Insbesondere enthält jeder UVR den Nullvektor und jeder UVR ist selbst ein K-VR.

Beispiel 4.2. Standardbeispiele

1. $V = \mathbb{R}^3$. Alle Ebenen und Geraden durch den Nullpunkt sind Untervektorräume. Gehen sie nicht durch den Nullpunkt, sind es keine UVR.
2. $U = 0$ und V sind selbst UVR eines Vektorraums V (und müssen insbesondere immer mit angegeben werden, wenn gefordert ist, alle Untervektorräume eines gegebenen Vektorraums anzugeben, außer es ist gefordert alle *echten* Unterräume anzugeben. Dann lässt man V selbst weg.)
3. Lösungsmenge eines homogenen LGS $A \cdot x = 0$ mit $A \in K^{m \times n}$ ist ein Unterraum von K^n.
4. Polynomring $V = K[x]$ hat für jedes $d \in \mathbb{N}_0$ einen Unterraum $U = \{f \in V \mid deg(f) \leq d\}$.

Satz 4.2 (Schnitt und Summe von Untervektorräumen)**.** *Sei V ein K-Vektorraum und* $U_1, U_2 \subseteq V$ *Unterräume. Dann gilt:*

1. *Der Schnitt zweier Unterräume* $U_1 \cap U_2 \subseteq V$ *ist ein Unterraum.*
2. $U_1 + U_2 := \{v + w | v \in U_1, w \in U_2\} \subseteq V$ *ist ein Unterraum.*

Anmerkung 4.2. Die Vereinigung von Unterräumen $U_1 \cup U_2$ ist im Allgemeinen kein Unterraum. So ist z.B. die Vereinigungsmenge zweier Geraden $U_1, U_2 \in \mathbb{R}^2$, die beide durch den Nullpunkt gehen, kein Unterraum (es sei denn $U_1 = U_2$). An dieser Stelle sollte man sich den Unterschied zwischen $U_1 + U_2$ und $U_1 \cup U_2$ klar machen.

5 Linearkombinationen

In diesem Kapitel ist V stets ein Vektorraum über dem Körper K.

Definition 5.1 (Linearkombination)**.** Man nennt den Vektor $v \in V$ eine Linearkombination von Vektoren $v_1, ..., v_n \in V$, falls man v durch Addition und Multiplikation, mit Skalaren $a_1, ..., a_n \in K$, ausdrücken kann. In anderen Worten:

$$v \text{ ist Linearkombination von } v_1, ..., v_n \in V \iff v = \sum_{k=1}^{n} a_k v_k \text{ mit } a_1, ..., a_n \in K$$

Beispiel 5.1. Sei $V = \mathbb{R}^2$.

1. Der Vektor $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ ist eine Linearkombination der Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, da $v = 4v_2 - v_1$. Dabei können die Koeffizienten durch Lösen folgenden Gleichungssystems bestimmt werden:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ bzw. } a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\iff a_1 + a_2 = 3 \wedge -a_1 + a_2 = 5 \iff 2a_2 = 8 \Leftrightarrow a_2 = 4, a_1 = -1.$$

2. Der Vektor $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ ist keine Linearkombination von den Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, da hier keine Koeffizienten existieren, sodass der untere Eintrag erzeugt wird.

3. Für den Vektorraum $W = K[x]$ ist das Polynom $13 + 37x^2 \in W$ eine Linearkombination der Elemente $1, x^2 \in W$.

Mit Definition 5.1 können wir ebenfalls den sogenannten *erzeugten Unterraum* definieren:

Definition 5.2 (Erzeugter Unterraum)**.** Sei $S \subseteq V$. Der erzeugte Unterraum $\langle S \rangle$ ist die Menge aller Linearkombinationen von S:

$$\langle S \rangle = \{v \in V \mid v \text{ ist Linearkombination von } S\}.$$

Insbesondere gilt für $v_1, \cdots v_n \in V$:

$$\langle v_1, ..., v_n \rangle = \left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k v_k \; | a_1, ..., a_n \in K \right\}$$

Beispiel 5.2. Sei $V = \mathbb{R}^2$.

1. $S = \{1, x, x^2, ...\}$ erzeugt den K-Vektorraum der Polynome $K[x]$.

2. Die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ spannen den gesamten $\mathbb{R}^2$ auf, da man alle Vektoren des $\mathbb{R}^2$ als Linearkombination von v_1 und v_2 schreiben kann. Also: $\langle v_1, v_2 \rangle = \mathbb{R}^2$. Zur Bestimmung der Koeffizienten betrachten wir wieder folgendes Gleichungssystem: Sei $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, dann: $a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow a_1 + a_2 = x \wedge -a_1 + a_2 = y \\
&\Longleftrightarrow 2a_2 = x + y \Longleftrightarrow a_2 = \frac{x+y}{2}, a_1 = \frac{x-y}{2} \\
&\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{x-y}{2} v_1 + \frac{x+y}{2} v_2.
\end{aligned}$$

Somit haben wir eine eindeutige Lösung für das Gleichungssystem gefunden.

3. Die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ spannen dagegen nur die x-Achse des $\mathbb{R}^2$ auf, da bei beiden der zweite Eintrag 0 ist. Also: $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_1 \rangle = \langle v_2 \rangle \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} | \lambda \in \mathbb{R} \right\}$. Um einen Vektor aus dem Span zu erzeugen haben wir hier also keine eindeutigen Koeffizienten vorliegen.

Diese Beobachtung fomalisieren wir mit dem Konzept der linearen Unabhängigkeit.

Definition 5.3 (Lineare Un-/Abhängigkeit)**.** Die Vektoren $v_1, ..., v_n \in V$ sind linear unabhängig, falls für Skalare $a_1, ..., a_n \in K$ folgende Bedingung gilt:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n = 0 \Longrightarrow a_1, a_2, ..., a_n = 0.$$

Ist dies nicht der Fall, so spricht man von linearer Abhängigkeit der Vektoren $v_1, ..., v_n$.
Eine Teilmenge $S \subseteq V$ ist linear unabhängig, falls alle ihre Elemente $v_1, ..., v_n \in S$ zueinander linear unabhängig sind. Andernfalls ist S linear abhängig.
In anderen Worten: Eine Menge von Elementen aus dem Vektorraum ist genau dann linear unabhängig, wenn sich kein Element als Linearkombiantion der anderen darstellen lässt. Findet man nicht verschwindende Skalare, sodass die obere Gleichung gilt, so sind die Vektoren linear abhängig.

Anmerkung 5.1. Sei $S = \langle v_1, ..., v_m \rangle$, mit $v_1, ..., v_m \in V$, linear unabhängig und $v \in S$. Dann gibt es eindeutige Koeffizienten $a_1, ..., a_m \in K$, sodass $v = a_1 v_1 + \cdots a_m v_m$. In anderen Worten: Für linear unabhängige Mengen sind Linearkombinationen eindeutig.

Beispiel 5.3. Sei $V = \mathbb{R}^2$.

1. Wir überprüfen die lineare Unabhängigkeit von $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ a_1 - a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow a_1 = -a_2 \wedge a_1 = a_2 \Longrightarrow a_1 = -a_1 \Longrightarrow a_1 = a_2 = 0.$$

Also sind v_1 und v_2 linear unabhängig. Bei zwei Elementen ist dies äquivalent dazu, dass sie keine Vielfachen zueinander sind.

2. Wir überprüfen die lineare Unabhängigkeit von $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Hier finden wir direkt durch scharfes Hinsehen: $a_1 = -2$ und $a_2 = 1$, sodass $a_1 v_1 + a_2 v_2 = 0$. Die Vektoren sind somit linear abhängig, da sie Vielfache voneinander sind.

Um herauszufinden ob Vektoren linear unabhängig sind, muss man im Wesentlichen Definition 5.1 überprüfen. Schreiben wir diese in Matrix-Vektor Form, erhalten wir direkt folgenden Satz.

Satz 5.1. *Für Vektoren $v_1, ..., v_n \in K^m$ definieren wir das folgende LGS:*

$$\underbrace{\begin{pmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}}_{=:A \in K^{m \times n}} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sind die Vektoren linear unabhängig, so ist der Nullvektor die einzige(eindeutige) Lösung dieses LGS. Dies ist äquivalent zur Aussage, dass der Rang von A gleich der Spaltenzahl n ist (siehe Kapitel 2). Somit:

$$v_1, ..., v_n \quad \textit{sind linear unabhängig} \quad \Longleftrightarrow \quad rg(A) = n.$$

Um den Rang von A zu bestimmen, bringt man wie üblich die Matrix auf Zeilenstufenform. Der Rang von A ist dann die Anzahl der nicht-null Zeilen in der ZSF.

Anmerkung 5.2. Für $A \in K^{m \times n}$ gilt $rg(A) \leq \min\{m, n\}$. Somit können im K^m maximal m Vektoren linear unabhängig sein. Sind es mehr als m Vektoren, so sind sie automatisch linear abhängig.

6 Basen

Im vorherigen Kapitel haben wir für $S \subseteq V$ den Begriff des erzeugten Unterraums $\langle S \rangle$ definiert. Dies ist die Menge aller Vektoren $v \in V$, die durch Linearkombination von Elementen aus S hervorgehen können. Dies wollen wir im Folgenden als Erzeugendensystem weiter formalisieren und unter Zuhilfenahme von linearer Unabhängigkeit Basen einführen.

Definition 6.1 (Erzeugendensystem und Basis)**.** Sei $S \subseteq V$.

1. S ist Erzeugendensystem von $V \iff \langle S \rangle = V$.
2. S ist Basis von $V \iff S$ ist Erzeugendensystem von V und S ist linear unabhängig.

Zusammengefasst ist eine Basis B ein *linear unabhängiges Erzeugendensystem.* Dies bedeutet, dass alle Vektoren in V durch eine eindeutige Linearkombination von Vektoren aus B darstellbar sind. Bei einer Basis muss man also überprüfen, dass sie den zugehörigen Vektorraum erzeugt und dass deren Elemente linear unabhängig sind.

Anmerkung 6.1. In der Regel kann ein Vektorraum beliebig viele Basen besitzen. (Hat man eine Basis gegeben, so kann man ein beliebiges Element skalieren und hat immernoch eine Basis)

Beispiel 6.1. Wir wollen zu Begin einige Beispiele von Basen betrachten:

1. Für den Vektorraum K^3 kann man unterschiedliche Basen angeben, z.B.

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{oder} \quad B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

   Letztere nennt man auch *kanonische Standardbasis.*

2. Für $K^{2\times 2}$ können wir ebenfalls eine kanonische Standardbasis angeben, nämlich

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

3. Wir betrachten das Folgende LGS

$$\begin{aligned} x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 &= 0 \end{aligned}$$

   . Dieses besitzt die ZSF $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$ und die Lösungsmenge $L = \left\{ \begin{pmatrix} \mu + 2\lambda \\ -2\mu - 3\lambda \\ \mu \\ \lambda \end{pmatrix} \right\}$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ beliebig.

Indem wir die auftretenden Variablen in der Lösungsmenge in verschiedene Vektoren auftrennen, können wir leicht ein Erzeugendensystem für L ablesen.

$$\begin{pmatrix} \mu + 2\lambda \\ -2\mu - 3\lambda \\ \mu \\ \lambda \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow L = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

wobei wir die Definition des Erzeugnisses ausgenutz haben. Somit bilden die beiden Vektoren ein Erzeugendensystem, insbesondere eine Basis da sie linear unabhängig sind.

4. Der Vektorraum der Polynome $K[x]$ besitzt die Basis der Monome $B = \{1, x, x^2, x^3, ...\}$. Man beachte dass diese Basis unendlich viele Elemente besitzt.

Die Existenz einer Basis ist durch folgendes Theorem garantiert.

Satz 6.1 (Basissatz)**.** *Jeder Vektorraum hat eine Basis.*

Satz 6.2 (Eigenschaften von Basen)**.** *Für eine Teilmenge $S \subseteq V$ sind äquivalent:*

1. *S ist eine Basis von V.*
2. *S ist ein minimales Erzeugendensystem. Dies bedeutet: S erzeugt V und falls wir aus S einen beliebigen Vektor v wegnehmen, so wird V durch $S \setminus \{v\}$ nichtmehr erzeugt.*
3. *S ist maximal linear unabhängig. Dies bedeutet: S ist linear unabhängig und wenn wir zu S einen zusätzlichen Vektor $v \in V$ hinzufügen, so ist $S \cup \{v\}$ nichtmehr linear unabhängig.*

Korollar 6.1. *Aus einem endlichen Erzeugendensystem $S \subseteq V$ kann man eine Basis $B \subseteq S$ auswählen.*

Dies führt uns zu folgender Erkenntnis: Falls V ein endliches Erzeugendensystem hat, so sind alle Basen von V endlich und haben gleich viele Elemente. Was uns zu folgender Definition motiviert.

Definition 6.2 (Dimension)**.** Die *Dimension* eines Vektorraums V, $\dim(V)$, ist gleich der Elementanzahl einer Basis von V, falls V endlich erzeugt ist. (Eine Basis endlich viele Elemente besitzt) Ansonsten ist $\dim(V) = \infty$.

Mit Hilfe der Dimension kann schnell nützliche Kriterien für eine Basis herleiten.

Korollar 6.2. *Sei $S = \langle v_1, ..., v_n \rangle \subset V$.*

- *Wenn $n < \dim(V)$, dann ist $V \neq \langle S \rangle$.*
- *Wenn $n > \dim(V)$, dann ist S linear abhängig.*

Desweiteren ist äquivalent:

1. S ist eine Basis von V.

2. $\dim(V) = n$ und S ist linear unabhängig.

3. $\dim(V) = n$ und $V = \langle S \rangle$.

Beispiel 6.2. Dimensionen einiger Vektorräume:

1. $\dim(K^n) = n$.

2. Für den Nullraum $V = \{0\}$ gilt $\dim(V) = 0$.

3. Für Polynome $V = K[x]$ gilt $\dim(V) = \infty$

Satz 6.3. *Für ein homogenes LGS, also ein Gleichungssystem der Form $A \cdot x = 0$ mit $A \in K^{m \times n}$, kann man die Dimension der Lösungsmenge L angeben als:*

$$dim(L) = n - rang(A).$$

Dies bedeutet: Wenn wir wissen wollen, wie viele Vektoren eine Basis von L bilden, ist dies durch $n - \text{rang}(A)$ gegeben. Damit können wir leicht Basen von beliebigen Unterräumen des K^n bestimmen.

Satz 6.4 (Basis aus Erzeugendensystemim K^n)**.** *Sei $U = \langle v_1, ..., v_m \rangle \subseteq K^n$. Wir bilden die Matrix $A \in K^{n \times m}$, welche die Vektoren v_i als Zeilen besitzt:*

$$A = \begin{pmatrix} - & v_1 & - \\ - & v_2 & - \\ & \vdots & \\ - & v_m & - \end{pmatrix}.$$

Nun bringen diese Matrix auf Zeilenstufenform. Die Zeilen $\neq 0$ der resultierenden Matrix bilden eine Basis von U mit $dim(U) = \text{rang}(A)$.

Satz 6.5 (Basisergänzung)**.** *Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $S \subseteq V$ linear unabhängig. Dann kann S durch Hinzufügen von weiteren Vektoren zu einer Basis von V gemacht werden. Die neue Basis $B \subseteq S$ bezeichnen wir als Basisergänzung von S.*

Korollar 6.3. *Sei $U \subseteq V$ ein Unterraum. Dann gelten:*

1. $\dim(U) \leq \dim(V)$.

2. Falls $\dim(U) = \dim(V) < \infty \Longrightarrow U = V$.

7 Lineare Abbildungen

In diesem Kapitel sind V und W stets Vektorräume über dem Körper K.

Definition 7.1 (Homomorphismus/ Lineare Abbildung)**.** Eine Abbildung $\phi : V \to W$ heißt Vektorraumhomomorphismus bzw. lineare Abbildung, falls gelten:

1. Für alle $v, v' \in V$: $\phi(v + v') = \phi(v) + \phi(v')$.

2. Für alle $v \in V$ und $a \in K$: $\phi(a \cdot v) = a \cdot \phi(v)$.

Man beachte, dass die Operationen stets im passsenden Vektorraum zu lesen sind.

Anmerkung 7.1. Wir sammeln hier eine wichtige Auflistungen an Beobachtungen.

- Eine lineare Abbildung bildet den Nullvektor von V stets auf den Nullvektor von W ab.

- Die Verknüpfung von linearen Abbildungen ist wieder eine lineare Abbildung.

- Achtung: Ausgangs- und Zielvektorraum müssen den gleichen Grundkörper K haben.

- Sei $A \in K^{m \times n}$. Dann ist
$$\phi_A : K^n \to K^m, v \mapsto A \cdot v$$
eine lineare Abbildung. Dies ist einer der wichtigsten Typen von linearen Abbildungen. **Notation:** Die Bezeichnung ϕ_A werden wir in Zukunft weiter benutzen. Sie stellt die Abbildung dar, die von der Matrix A induziert, d.h. hervorgerufen wird. Weiterhin gilt: $\phi_{A \cdot B} = \phi_A \circ \phi_B$.

Definition 7.2 (Kern und Bild)**.** Sei $\phi : V \to W$ linear.

1. Der Kern von ϕ ist die Menge: $\ker(\phi) \coloneqq \{v \in V \mid \phi(v) = 0\} \subseteq V$.
   In Worten: Der Kern ist die Menge aller Elemente in V, die von ϕ auf die 0 in W abgebildet werden.

2. Das Bild von ϕ ist die Menge: $\mathrm{im}(\phi) \coloneqq \phi(V) = \{\phi(v) \mid v \in V\} \subseteq W$.
   In Worten: Das Bild ist die Menge, die man erhält, wenn man alle Elemente in V mit ϕ nach W abbildet.

Satz 7.1 (Eigenschaften von Kern und Bild)**.** *Es sei $\phi : V \to W$ eine lineare Abbildung.*

1. $\ker(\phi) \subseteq V$ *ist ein Unterraum von V, also des Ausgangsvektorraumes, und enthält insbesondere 0_V.*

2. $\mathrm{im}(\phi) \subseteq W$ *ist ein Unterraum von W, also des Zielvektorraumes, und enthält insbesondere 0_W*

3. ϕ ist injektiv $\iff$ $\ker(\phi) = \{0\}$ *(man sagt 'der Kern ist trivial')*

Beispiel 7.1.

1. Sei $A \in K^{m\times n}$. Dann ist $\ker(\phi_A)$ die Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems $Ax = 0$. Also sind äquivalent: ϕ_A ist injektiv $\iff \ker(\phi_A) = \{0\} \iff \operatorname{rang}(A) = n$.
   Das Bild von ϕ_A: $\operatorname{im}(\phi_A) = \{\phi_A(v) \mid v \in K^n\} = \{Av \mid v \in K^n\} = \langle a_1, ..., a_n\rangle$, wobei $a_1, ..., a_n$ die Spalten von A sind.

2. Sei $V = \mathbb{R}[x]$ und betrachte die Ableitung $\phi : V \to V, f \mapsto f'$. $\ker(\phi)$ ist die Menge aller konstanten Polynome, somit ist ϕ nicht injektiv. Weiterhin gilt $\operatorname{im}(\phi) = V$.

Definition 7.3. Eine lineare Abbildung $\phi : V \to W$ heißt Isomorphismus, falls ϕ bijektiv ist. Dann ist auch die Umkehrabbildung $\phi^{-1} : W \to V$ ein Isomorphismus.
V und W heißen isomorphe Vektorräume, falls es einen Isomorphismus von V nach W gibt.
Notation: $V \cong W$.

Satz 7.2. *Sei $n = \dim(V) < \infty$. Dann ist $V \cong K^n$.*

Anmerkung 7.2. Der Beweis hier ist konstruktiv und sehr praktisch, wie wir bei Darstellungsmatrizen später noch sehen werden. Die Idee ist die kanonische Standardbasis vom K^n auf eine Basis von V, $B = \{v_1, ..., v_n\}$, abzubilden. Die so definierte Abbildung φ ist ein Isomorphismus mit der Vorschrift

$$\varphi_B : K^n \to V, \qquad \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_i v_i.$$

Die Umkehrabbildung ist dadurch gegeben, dass jedem $v \in V$ sein **Koordinatenvektor** bezüglich B zugewiesen wird.

Satz 7.3 (Dimensionssatz)**.** *Sei $\phi : V \to W$ linear. Dann gilt der Dimensionssatz:*

$$\dim(V) = \dim(\ker(\phi)) + \dim(\operatorname{im}(\phi)).$$

In Worten: Die Dimension des Ausgangsraumes ist die Summe aus der Dimension des Kerns (der im Ausgangsraum lebt) und der Dimension des Bildes (das im Zielraum lebt).

Korollar 7.1 (Zeilenrang gleich Spaltenrang)**.** *Der Rang einer Matrix $A \in K^{m\times n}$ ist die Dimension des von den Spalten aufgespannten Unterraums von K^m.*
Weiterhin gilt: Spaltenraum und Zeilenraum haben beide Dimension $\operatorname{rang}(A)$.

$$\boxed{\text{„Zeilenrang“} = \text{„Spaltenrang“}}$$

Korollar 7.2. *Es sei* $\dim(V) = \dim(W) < \infty$, *und $\phi : V \to W$ sei eine lineare Abbildung. Dann sind äquivalent:*

1. *ϕ ist ein Isomorphismus.*

2. *ϕ ist injektiv.*

3. *ϕ ist surjektiv.*

Insbesondere für $A \in K^{n\times n}$: ϕ_A Isomorphismus $\iff \operatorname{rang}(A) = n$

Definition 7.4 (Invertierbarkeit)**.** Eine quadratische Matrix $A \in K^{n\times n}$ heißt invertierbar, falls es $B \in K^{n\times n}$ gibt mit $A \cdot B = I_n$. B ist dann eindeutig bestimmt, und es gilt auch $B \cdot A = I_n$. B heißt die Inverse von A und wird als $B = A^{-1}$ geschrieben.
Es gilt: $A \in K^{n\times n}$ ist invertierbar $\iff$ A ist regulär.

Anmerkung 7.3. Um die Inverse einer Matrix $A \in K^{n\times n}$ explizit zu berechnen, lösen wir folgenden linearen Gleichungssysteme: $Ax_i = e_i$, wobei e_i der i-te Einheitsvektor ist. Dadurch erhalten wir die i-te Spalte von A^{-1} mit x_i. Analog können wir die rechten Seiten zusammensetzen und erhalten das matrixwertige LGS $AX = I$, welches wie gewohnt mit dem Gauß-Algorythmus gelöst wird.

Satz 7.4 (Lineare Fortsetzung)**.** *Es sei $B = \{v_1, ..., v_n\}$ eine Basis von V. Eine lineare Abbildung $\phi : V \to W$ ist durch die Bilder der Basisvektoren v_i eindeutig bestimmt.*
Mit anderen Worten: Ist $\psi : V \to W$ eine weitere lineare Abbildung mit $\phi(v_i) = \psi(v_i)$ für alle i, so folgt $\phi = \psi$.
Man kann lineare Abbildungen also eindeutig durch die Bilder der Basisvektoren definieren.
Dies wird das Prinzip der linearen Fortsetzung genannt.

8 Dualräume

In diesem Kapoitel ist K stets ein Körper.

Definition 8.1 (Linearform, Dualraum)**.** Es sei V ein K-VR. Eine Linearform (auf V) ist eine lineare Abbildung $V \to K$. Der Raum

$$V* := Hom(V, K)$$

aller Linearformen heißt Dualraum von V.

Beispiel 8.1. Standardbeispiele

1. Sei $V = K^n$ mit der Standardbasis. Eine Linearform ist eine Abbildung $\phi : K^n \to K$ und besitzt eine Darstellungsmatrix aus $K^{1\times n}$. Demnach liefert jeder Zeilenvektor eine Linearform! In diesem Fall gilt also

$$V^* = K^{1\times n} = \{\text{Menge aller Zeilenvektoren.}\}$$

2. Sei $V = K[x]$ Polynomraum mit der kanonischen Basis aus Monomen $\{x^i\}$. In diesem Fall liefert jede Linearform $\phi : V \to K$ eine Folge $(b_0, b_1, ...)$ mit $b_i := \phi(x^i) \in K$. Gleichzeitig erhält man auch über jede Folge $(b_0, b_1, ...)$ in K eine Linearform:

$$\phi : V \to K, \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i b_i.$$

   Insgesamt kann hier also der Dualraum V^* mit der Menge aller K-wertigen Folgen identifiziert werden, d.h.

$$V^* = \{(b_0, b_1, ...) \,|\, b_i \in K\} = \{\text{Menge aller } K\text{-wertigen Folgen}\}.$$

Definition 8.2 (Duale Abbildung)**.** Ist $\phi : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen zwei K-Vektorräumen, so definieren wir die duale Abbildung

$$\phi^* : W^* \to V^*, \quad f \mapsto f \circ \phi.$$

Anmerkung 8.1. Die duale Abbildung ist ebenfalls eine lineare Abbildung. Die duale Abbildung geht in **umgekehrter** Richtung wie ϕ.

Definition 8.3 (Dualbasis)**.** Sei B eine Basis des Vektorraums V. In diesem fall lässt sich ein beliebiges $v \in V$ eindeutig schreiben als

$$v = \sum_{w\in B} a_w \cdot w$$

für $a_w \in K$ und nur endlich vielen $a_w \neq 0$. Für jedes Basiselement $b \in B$ können wir nun eine Linearform definieren über

$$b* : V \to K, \quad \left(v = \sum_{w \in B} a_w \cdot w \right) \mapsto a_b.$$

Hierbei wird jedem Element v des Vektorraum der Koeffizient a_b des entsprechenden Basisvektors b zugeordnet. Die Menge

$$B^* := \{b^* \mid b \in B\}$$

heißt Dualbasis zu B.

Hierbei ist zu beachten, dass die Dualbasis nicht immer eine Basis liefert. Jedoch erhält man so für einen endlich-dimensionalen Vektorraum eine Basis:

Satz 8.1. *Sei B die Basis eines Vektorraums V.*

1. *Die Dualbasis $B^* \subseteq V^*$ ist linear unabhängig.*
2. *B^* ist genau dann eine Basis von V^*, falls $dim(V) < \infty$. In diesem Fall gilt also $dim(V) = dim(V^*)$.*

Zu guter Letzt definieren wir den sogenannten Bidualraum, den Dualraum des Dualraums:

Definition 8.4 (Bidualraum)**.** Für einen Vektorraum V ist

$$V^{**} := (V^*)^*$$

der sogenannte Bidualraum. Für $v \in V$ können wir ein spezielles Element des Bidualraums $\phi_v \in V^{**}$ definieren über

$$\phi_v : V^* \to K, \quad f \mapsto f(v).$$

Für einen endlich-dimensionalen Vektorraum V sind V und V^{**} isomorph.

Satz 8.2. *Sei V ein K-VR.*

1. *Die Abbildung $\Phi : V \to V^{**}, \quad v \mapsto \phi_v$ ist linear und injektiv.*
2. *Φ ist genau dann ein Isomorphismus, wenn $dim(V) < \infty$.*

9 Darstellungsmatrizen

In diesem Kapitel sei K ein Körper, sowie V und W endlich-dimensionale K-Vektorräume mit Dimensionen n bzw. m. Weiter seien $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ und $\mathcal{C} = \{w_1, ...w_m\}$ (geordnete) Basen von V bzw. W.

Definition 9.1 (Darstellungsmatrix)**.** Sei $\phi : V \to W$ eine lineare Abbildung. Für $j \in \{1, ..., n\}$ können wir schreiben:

$$\phi(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{i,j} w_i$$

mit $a_{i,j} \in K$. Die Matrix

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\phi) = (a_{i,j}) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \in K^{m \times n}$$

heißt Darstellungsmatrix von ϕ (bezüglich der Basen B und C.)

- Die Spalten von A sind also die Koordinatenvektoren der $\phi(v_i)$.
- Falls $V = W$ gilt, so verwendet man dieselbe Basis $\mathcal{B} = \mathcal{C}$ und schreibt $M_{\mathcal{B}}(\phi) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\phi) \in K^{n \times n}$.

$$\boxed{\text{Spalten der Darstellungsmatrix} \quad \longleftrightarrow \quad \text{Bilder der Basisvektoren}}$$

Nach dem Prinzip der linearen Fortsetzung **??** ist ϕ durch seine Darstellungsmatrix eindeutig bestimmt und jede Matrix taucht als Darstellungsmatrix einer linearen Abbildung auf. Insgesamt lässt sich also jede lineare Abbildung zwischen Vektorräumen als Matrix darstellen und andersherum stellt auch jede Matrix eine Abbildung zwischen Vektorräumen dar.

In **??** haben wir bereits gesehen, dass jeder Matrix $A \in K^{m \times n}$ eine lineare Abbildung $\phi_A : K^n \to K^m$ über $v \mapsto Av$ zugeordnet werden kann. Besteht zwischen dieser Zuordnung und der Definition 9.1 ein Zusammenhang? In der Tat!

Satz 9.1. *Sei $\phi : K^n \to K^m$ eine lineare Abbildung, $\mathcal{B}$ die Standardbasis des K^n und $\mathcal{C}$ die Standardbasis des K^m. Sei weiter $A = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\phi)$ die Darstellungsmatrix von ϕ bezüglich der Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$. Dann ist $\phi = \phi_A$. Also gilt:*

- *Alle linearen Abbildungen $K^n \to K^m$ sind von der Form ϕ_A mit $A \in K^{m \times n}$.*
- *A ist die Darstellungsmatrix von ϕ_A bezüglich der Standardbasen.*

Beispiel 9.1. Wir betrachten die Abbildung $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (y, x)$.

- Wählen wir die Standardbasis $\mathcal{B} = \mathcal{C} = \{e_1, e_2\}$, so erhalten wir die darstellende Matrix
$$M_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Wählen wir hingegen die Basis $\mathcal{B}' = \mathcal{C}' = \{e_1, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$, so ist die zugehörige Darstellungsmatrix gegeben durch
$$M_{\mathcal{B}'}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$
da $\phi(e_1) = 1 \cdot v + (-1) \cdot e_1$ und $\phi(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Wir wissen, dass die Hintereinanderausführung, d.h. das Kompositum, von linearen Abbildungen wieder eine lineare Abbildung ist. Doch wie erhält man die Darstellungsmatrix des Kompositums?

Satz 9.2 (Kompositum linearer Abbildungen)**.** *Es seien U, V und W endlich-dimensionale K-Vektorräume mit Basen $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ bzw. $\mathcal{C}$, und es seien $\phi : U \to V$ und $\psi : V \to W$ lineare Abbildungen. Dann gilt für die Darstellungsmatrix des Kompositums $\psi \circ \phi : U \to V \to W$*
$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{A}}(\psi \circ \phi) = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\psi) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\phi).$$

$$\boxed{\textit{Kompositum von linearen Abbildungen} \quad \longleftrightarrow \quad \textit{Matrixprodukt}}$$

Als Korollar von Satz 9.1 und 9.2 erhält man folgende Aussage:

Korollar 9.1. *Seien nun $A \in K^{l \times m}$ und $B \in K^{m \times n}$ Matrizen. Dann gilt für die zugehörigen linearen Abbildungen $\phi_A : K^m \to K^l$ und $\phi_B : K^n \to K^m$*
$$\phi_A \circ \phi_B = \phi_{A \cdot B}.$$

Ist insbesondere $A \in K^{n \times n}$ invertierbar, d.h. $A \in GL_n(K)$, so gilt für die Umkehrabbildung von ϕ_A:
$$\phi_{A^{-1}} = \phi_A^{-1}$$

Vektorräume haben bekanntlich verschiedene Basen. Was passiert mit der Darstellungsmatrix einer linearen Abbildung $V \to V$, wenn man die Basis von V wechselt? In Beispiel 9.1 haben wir explizit die Bilder der neuen Basis unter ϕ ausgerechnet. Hier lernen wir einen Weg kennen, der ohne das explizite Ausrechnen der Bilder auskommt.

Definition 9.2 (Basiswechselmatrix)**.** Es sei $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ eine Basis von V. Sei $\mathcal{C} = \{w_1, ..., w_n\}$ eine weitere Basis, so können wir die Elemente von $\mathcal{B}$ in der Basis $\mathcal{C}$ schreiben:

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} w_i \tag{9.1}$$

für eindeutige $a_{i,j} \in K$. Die Matrix

$$T_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = (a_{i,j})$$

heißt Basiswechselmatrix von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{C}$.

Die Basiswechselmatrix lässt sich auch als Darstellungsmatrix zur Identitätsabbildung interpretieren:

$$T_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(id_V).$$

Spalten der Basiswechselmatrix $\longleftrightarrow$ Koordinatenvektoren der „neuen“ Basisvektoren

Anmerkung 9.1. Man kann natürlich auch den umgekehrten Weg gehen und die w_i mit Hilfe der v_i ausdrücken. Man enthält entsprechend die Basiswechselmatrix $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$, wobei gilt $T_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = (T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}})^{-1}$.

Definition 9.3 (Allgemeine Lineare Gruppe (General Linear Group))**.** Die Menge $\mathrm{GL}_n(\mathrm{K}) := \{A \in K^{n \times n} \mid A \text{ ist invertierbar}\}$ heißt allgemeine lineare Gruppe oder 'general linear group' auf englisch. $\mathrm{GL}_n(\mathrm{K})$ bildet zusammen mit dem Matrixprodukt als Operation eine Gruppe.

Jede invertierbare Matrix $A = (a_{i,j}) \in \mathrm{GL}_n(K)$ beschreibt einen Basiswechel, indem man die neue Basis durch Gleichung (9.1) definiert. Mithilfe der Basiswechselmatrizen lässt sich nun die Darstellungsmatrix nach einem Basiswechsel bestimmen.

Satz 9.3. *Es seien $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ Basen eines endlich-dimensionalen K-Vektorraums V und $S := T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ die Basiswechselmatrix. Dann gilt für eine lineare Abbildung $\phi : V \to V$:*

$$\boxed{M_{\mathcal{C}}(\phi) = S^{-1} \cdot M_{\mathcal{B}}(\phi) \cdot S.}$$

Definition 9.4 (Ähnlich)**.**
Zwei quadratische Matrizen $A, B \in K^{n \times n}$ heißen **ähnlich**, falls es $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ gibt mit

$$B = S^{-1} AS.$$

Damit sind die Darstellungsmatrizen in der alten und neuen Basis, $M_{\mathcal{C}}$ und $M_{\mathcal{B}}$, ähnliche.

Schließlich wollen wir noch die Zusammenhänge zwischen den neuen Begriffen visualisieren.

Eine kleine Veranschaulichung zu Darstellungsmatrizen

Für $F : V \longrightarrow W$ linear mit $V \cong K^n$ und $W \cong K^m$ lässt sich folgendes Diagramm erstellen:

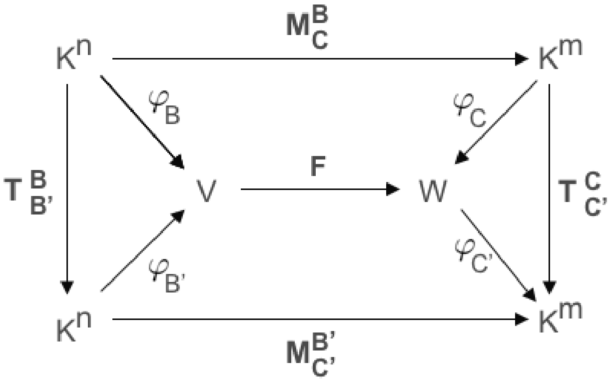

Abbildung 1: Darstellungsmatrix, Basiswechselmatrix und Koordinatenvektoren.

Dabei bezeichnen M_C^B und $M_{C'}^{B'}$ Darstellungsmatrizen und $T_{B'}^B$ und $T_{C'}^C$ Basiswechselmatrizen. Schließlich stehen noch φ_B, $\varphi_{B'}$, φ_C, $\varphi_{C'}$ für die entsprechenden Koordinatenabbildungen aus 7.2.

10 Determinanten

In diesem Kapitel sind alle Matrizen quadratisch: $A \in K^{n\times n}$. An dieser Stelle möchten wir an die Definition der symmetrischen Gruppe S_n erinnern.

Definition 10.1 (Fehlstelle, Signum)**.** Sei $\sigma \in S_n$.

- Eine Fehlstelle ist ein Paar (i,j) mit $1 \leq i < j \leq n$, aber $\sigma(i) > \sigma(j)$. Mit $w(\sigma)$ bezeichnen wir die Anzahl von Fehlstellen.
- $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{w(\sigma)}$ ist das Vorzeichen bzw. Signum von σ.

Beispiel 10.1. Wie bestimmt man die Anzahl von Fehlstellen bei einer Permutation? Man betrachte zum Beispiel $\sigma \in S_n$,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Wir gehen die untere Zeile von links her Zahl für Zahl durch und führen Strichliste, wie viele Zahlen, die rechts von jeder Zahl stehen, kleiner sind (also falsch stehen): 4: |||, 3: ||, 1: keines, 5:|. Es gibt also sechs Fehlstände. Das Signum ist +1.

Satz 10.1 (Multiplikativität Signum)**.**
Seien $\sigma, \tau \in S_n$. Dann gilt:

$$sgn(\sigma\tau) = sgn(\sigma) \cdot sgn(\tau).$$

Insbesondere ist

$$sgn(\sigma^{-1}) = sgn(\sigma).$$

Definition 10.2 (Determinante)**.** Es sei $A = (a_{i,j}) \in K^{n\times n}$ eine quadratische Matrix. Die Determinante von A ist definiert als

$$\det(A) := \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}.$$

Anmerkung 10.1. Die Determinante kann man als im $\mathbb{R}^2$ als Flächenänderung und im $\mathbb{R}^3$ als Volumenänderung, die durch die Abbildung verursacht wird, auffassen.

Beispiel 10.2. Berechnung der Determinante

- Für $n = 2, A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ gilt: $\det(A) = ad - bc$
- Für $n = 3$ kann die Determinante mit der **Regel von Sarrus** berechnet werden:

$$\det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} \\ - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2}.$$

- Für $n \geq 4$ macht es keinen Spaß mehr, die Determinante einer voll besetzten Matrix händisch auszurechnen. Wenn die Matrix viele Nullen enthält, kann man mit dem Entwicklungssatz von Laplace arbeiten. Zudem ist es möglich Nullen durch elementare Zeilenoperationen des Typs III zu erzeugen.

- Für eine Diagonalmatrix
$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$
gilt $\det(A) = a_1 \cdots a_n$.

- Für eine obere Dreiecksmatrix
$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} \tag{10.1}$$
gilt $\det(A) = a_1 \cdots a_n$.

- Für eine Matrix in Block-Dreiecksgestalt
$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$$
gilt
$$\det(A) = \det(B) \cdot \det(D).$$

Satz 10.2 (Entwicklungssatz von Laplace)**.** *In Worten besagt der Entwicklungssatz von Laplace, dass man die Determinante einer Matrix durch 'Entwickeln nach einer Zeile (oder Spalte)' erhält. Entwickeln nach der i-ten Zeile geht so, dass man sich die Zeile i aussucht - am besten mit vielen Nullen - und dann für alle Einträge $a_{i,j}$ der Zeile folgendes Schema durchgeht. j steht dabei für die Spalte, in der der Eintrag steht:*

1. *Streiche (in Gedanken) die i-te Zeile und j-te Spalte. Es entsteht die sogenannte Streichmatrix.*
2. *Bilde von der Streichmatrix die Determinante.*
3. *Multipliziere die Determinante der Streichmatrix mit $(-1)^{i+j} \cdot a_{i,j}$*

Am Schluss summiert man über alle diese Produkte. In Formeln:
$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \cdot \det(A_{i,j})$$
Analoge Vorgehensweise für das Entwickeln nach der j-ten Spalte.

Beispiel 10.3. Determinantenberechnung mittels Laplace

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Entwicklung nach der 1.Zeile: Es ergibt sich
$\det(A) = 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} - 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} + 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} = -2 \cdot (3 \cdot 8 - 6 \cdot 5) = 12.$

Satz 10.3 (Determinantenmultiplikationssatz)**.** *Für $A, B \in K^{n \times n}$ gilt*

$$\boxed{\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B).}$$

Satz 10.4 (Determinanten ähnlicher Matrizen)**.** *Zwei Matrizen $A, B \in K^{n \times n}$ seien ähnlich. Dann gilt*

$$\det(A) = \det(B).$$

Satz 10.5. *Es gelten folgende Rechenregeln für die Determinante einer Matrix A:*

1. $\det(A^T) = \det(A)$.
2. *Ist A invertierbar, so gilt:* $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$
3. *Für $\lambda \in K$ gilt:* $\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \det(A)$ *(Determinante ist linear in jeder Zeile oder Spalte).*
4. *Änderung der Determinante unter elementaren Zeilenumformungen:*
   - *Vertauschen zweier Zeilen oder Spalten ändert das Vorzeichen der Determinante*
   - *Multiplikation einer Zeile oder Spalte von A mit einem Skalar $s \in K$ bewirkt, dass die Determinante mit s multipliziert wird. In Formeln:*

     $$\det(\textit{neue Matrix}) = s \cdot \det(\textit{alte Matrix}).$$

   - *Addition des s-fachen einer Zeile oder Spalte zu einer anderen ändert die Determinante nicht.*
5. *Falls in A zwei Zeilen oder zwei Spalten übereinstimmen, so folgt: det(A)=0.*

Satz 10.6. *Für eine quadratische Matrix $A \in K^{n \times n}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent: A ist regulär $\iff$ $A \in GL_n(K)$ $\iff$ Zeilen und Spalten von A sind linear unabhängig $\iff$ LGS $A \cdot x = 0$ ist eindeutig lösbar $\iff$ ϕ_A ist surjektiv/injektiv/bijektiv.*

11 Diagonalisierbarkeit und Eigenwerte

Eigenwertberechnung und Diagonalisierung spielen bei der Physik eine große Rolle. Die Bestimmung der Hauptachsen eines Rotationskörpers oder die Schwingungsmoden eines oszillierenden Systems lassen sich mittels Eigenwertberechnungen bestimmen. Selbst die Schrödingergleichung, eine der wichtigsten physikalischen Gleichungen überhaupt, ist im Grunde eine Eigenwertgleichung.

Definition 11.1 (Eigenwert, Eigenvektor und Eigenraum)**.** Sei $A \in K^{n\times n}$ eine quadratische Matrix. Dann ist $\lambda \in K$ ein Eigenwert von A, falls es ein $v \in K^n \backslash \{0\}$ gibt mit:

$$A \cdot v = \lambda \cdot v$$

v bezeichnet man als Eigenvektor zum Eigenwert λ. Zudem definieren wir den Eigenraum zum Eigenwert λ als:

$$E_\lambda = \{v \in K^n | (A - \lambda I_n) = 0\}$$

Also ist E_λ der Lösungsraum des homogenen LGS $(A - \lambda I_n)v = 0$ für $v \in K^n$.

Beispiel 11.1. Für die Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 7 \\ 6 & 2 & -6 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist gegeben, dass $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor ist.
Wir berechnen den zugehörigen Eigenwert:

$$A \cdot v = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 7 \\ 6 & 2 & -6 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Somit ist $\lambda = 2$ ein Eigenwert der Matrix A zum Eigenvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Definition 11.2 (Charakteristisches Polynom)**.** Für $A \in K^{n\times n}$ ist

$$\chi_A(x) := \det(x \cdot I_n - A)$$

das charakteristische Polynom von A. Die Nullstellen von χ_A sind die Eigenwerte von A.

Beispiel 11.2. Wir bestimmen die Eigenwerte von A. Dazu berechnen wir zunächst das charakteristische Polynom:

$$\chi_A = \begin{vmatrix} \lambda+5 & 0 & -7 \\ -6 & \lambda-2 & 6 \\ 4 & 0 & \lambda-6 \end{vmatrix} = (\lambda+5)(\lambda-2)(\lambda-6)+28(\lambda-2) = (\lambda-2)[(\lambda^2-6\lambda+5\lambda-30+28]$$

$$= (\lambda-2)(\lambda^2-\lambda-2) = (\lambda-2)^2(\lambda+1)$$

Die Eigenwerte von χ_A sind somit $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = -1$.
Wie finden wir nun die zugehörigen Eigenvektoren? Die Eigenvektoren sind Elemente des Eigenraums E_λ. Um diese zu bestimmen, berechnen wir die Basis der zugehörigen Eigenräume, d.h. die Lösungsräume des homogenen LGS $(A - \lambda I_n)v = 0$ für $v \in K^3$.
Für $\lambda_1 = 2$ gilt:

$$ker(A - 2 \cdot I_3) = ker \begin{pmatrix} -7 & 0 & 7 \\ 6 & 0 & -6 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow ker \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Somit hat der Lösungsraum die Dimension $3 - 1 = 2$ und lässt sich durch zwei Basisvektoren darstellen:

$$E_2 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$$

Für $\lambda_2 = -1$ gilt:

$$ker(A + I_3) = ker \begin{pmatrix} -4 & 0 & 7 \\ 6 & 3 & -6 \\ -4 & 0 & 7 \end{pmatrix} \longrightarrow ker \begin{pmatrix} -4 & 0 & 7 \\ 0 & 3 & 4,5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow ker \begin{pmatrix} -4 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Somit hat der Lösungsraum die Dimension $3 - 2 = 1$ und lässt sich durch einen Basisvektor darstellen:

$$E_{-1} = \langle \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} . \rangle$$

Satz 11.1 (Fundamentalsatz der Algebra)**.** *Jedes nicht-konstante Polynom $f \in \mathbb{C}[x]$ zerfällt in Linearfaktoren.*

Definition 11.3 (Algebraisch abgeschlossen)**.** EIn Körper K heißt algebraisch abgeschlossen, wenn jedes nicht-konstante Polynom $f \in K[x]$ eine Nullstelle in K besitzt.

Anmerkung 11.1. $\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen

Korollar 11.1. *Sei $A \in K^{n\times n}$. Dann gilt:*

1. *A hat höchstens n Eigenwerte.*
2. *Falls K algebraisch abgeschlossen ist (z.B. $\mathbb{C}$, so hat A n Eigenwerte.*

Definition 11.4 (Geometrische und algebraische Vielfachheit)**.** Es sei $\lambda \in K$ ein Eigenwert einer Matrix $A \in K^{n\times n}$.

(1) Algebraische Vielfachheit $m_a(\lambda)$ = Vielfachheit der Nullstelle λ im Polynom χ_A.

(2) Geometrische Vielfachheit $m_g(\lambda) = \dim(\mathrm{Eig}(A,\lambda))$.

Satz 11.2. *Es gilt stets:*

$$1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$$

Definition 11.5 (Diagonalisierbarkeit)**.** Eine quadratische Matrix $A \in K^{n\times n}$ ist diagonalisierbar, falls es eine Basis von K^n bestehend aus Eigenvektoren von A gibt.
Gleichbedeutend: A ist ähnlich zu einer Diagonalmatrix D, d.h. es existiert ein $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ sodass

$$A = SDS^{-1}$$

Anmerkung 11.2. Falls A diagonalisierbar ist, so kann man die zu A ähnliche Diagonalmatrix D aufstellen, die folgende Gestalt hat:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_m \end{pmatrix}$$

Aus den zugehörigen Eigenvektoren kann man eine Basiswechselmatrix S aufstellen. Dazu schreibt man die Eigenvektoren $v_1, \cdots, v_n$ in die Spalten der Matrix:

$$S = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

Für diese Matrizen gilt die Beziehung:

$$A = SDS^{-1}$$

Satz 11.3 (Diagonalisierbarkeit). *Eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ ist genau dann diagonalsierbar, wenn folgende beide Bedingungen erfüllt sind:*

1. *Das charakteristische Polynom χ_A zerfällt in Linearfaktoren (für $K = \mathbb{C}$ immer der Fall).*
2. *Für alle Eigenwerte λ_i gilt:*
$$m_g(\lambda_i) = m_a(\lambda_i)$$

Korollar 11.2. *Falls χ_A in Linearfaktoren zerfällt und nur Nullstellen der Vielfachheit* 1 *hat, so ist A diagonalisierbar.*

Beispiel 11.3. Zurück zu unserer Matrix A aus Beispiel 11.2. Das charakteristische Polynom ξ_A zerfällt in Linearfaktoren und bei den beiden Eigenwerten stimmen geometrische und algebraische Vielfachheit überein. Somit ist A diagonalisierbar. Die Diagonalmatrix und die Basiswechselmatrix lauten somit:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -6 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Rezept zur Diagonalisierbarkeit einer Matrix

Sei $A \in K^{n\times n}$ eine quadratische Matrix. *Frage:* Ist die Matrix diagonalisierbar?

1. Berechne das charakteristische Polynom von A mit
$$\chi_A = \det(A - \lambda I_n)$$
2. Bestimme die Eigenwerte (Nullstellen von χ_A) $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$.

   Falls χ_A nicht in Linearfaktoren zerfällt, so ist A nicht diagonalisierbar. Wir sind fertig.

   Falls χ_A in Linearfaktoren zerfällt (immer bei $K = \mathbb{C}$), gehe zu Punkt 3.
3. Bestimme die arithmetische Vielfachheit der Nullstellen $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$. Diese ist gegeben durch die Exponenten der Linearfaktoren, in denen χ_A zerfällt.

   Falls $\forall\ \lambda_i$ gilt: $m_a(\lambda_i) = 1$, so ist die Matrix diagonalisierbar. Gehe zu Punkt 5.

   Falls mindestens eine Nullstelle eine Vielfachheit > 1 hat, gehe zu Punkt 4.
4. Bestimme für die Eigenwerte mit $m_a(\lambda) > 1$ die Dimension der Eigenräume zu λ. Der Eigenraum zu einem Eigenwert λ ist definiert als:
$$E_\lambda = \{v \in K^n | (A - \lambda I_n)v = 0\}$$

   Gilt für jedes λ: $m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$, so ist A diagonalisierbar. Gehe zu Punkt 5.

   Gilt für mindestens ein λ: $m_a(\lambda) \neq m_g(\lambda)$, so ist die Matrix nicht diagonalisierbar.

5. Falls erforderlich: Gebe die Diagonalmatrix an: $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_m \end{pmatrix}$.

Rezept zur Berechnung von Eigenvektoren und Transformationsmatrix
Sei $A \in K^{n \times n}$ eine quadratische Matrix. Nehmen wir an, A sei diagonalisierbar.
Frage: Bestimme alle Eigenwerte und Eigenvektoren von A. Bestimme die Transformationsmatrix S, sodass $A = SDS^{-1}$.

1. Berechne das charakteristische Polynom von A mit

$$\chi_A = \det(A - \lambda I_n)$$

1. Ermittle die Nullstellen des charakteristisches Polynom $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$. Diese Nullstellen sind die **Eigenwerte** von A.

2. Finde zu jedem Eigenwert $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ eine Basis vom zugehörigen Eigenraum. Der Eigenraum zu einem Eigenwert λ ist definiert als:

$$E_\lambda = \{v \in K^n | (A - \lambda I_n) = 0\}$$

3. Gebe die Diagonalmatrix an: $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_m \end{pmatrix}$.

4. **Gemäß der für D gewählten Reihenfolge der Eigenwerte**, stelle S auf mit den Eigenvektoren $v_1, \cdots, v_n$ als **Spalten**: $S = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$.

5. Falls erforderlich (oder zur Überprüfung): Invertiere S, um S^{-1} zu berechnen. Überprüfe, dass in der Tat $A = SDS^{-1}$ ist. Wir sind fertig.

12 Normen und Skalarprodukte

Definition 12.1. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine Abbildung

$$V \times V \to \mathbb{R}, (v, w) \mapsto \langle v, w \rangle$$

heißt eine **symmetrische Bilinearform**, falls sie **symmetrisch**: Für $v, w \in V$ gilt

$$\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle,$$

und **bilinear**: Für alle $u, v, w \in V$ und $a \in \mathbb{R}$ gelten

$$\langle u, v + aw \rangle = \langle u, v \rangle + a\langle u, w \rangle$$
$$\langle u + av, w \rangle = \langle u, w \rangle + a\langle v, w \rangle,$$

ist. Eine symmetrische Bilinearform heißt **Skalarprodukt**, wenn sie zusätzlich **positiv definit ist**: Für $v \in V$ mit $v \neq 0$ gilt

$$\langle v, v \rangle > 0.$$

Ein reeller Vektorraum zusammen mit einem Skalarprodukt heißt Euklidischer Raum.

Definition 12.2. Sei $(v, w) \mapsto \langle v, w \rangle$ eine symmetrische Bilinearform auf $\mathbb{R}^n$ mit Basis $\{e_1, ..., e_n\}$ Die symmetrische Matrix $(a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $a_{i,j} := \langle e_i, e_j \rangle$ heißt Darstellungsmatrix der Bilinearform.
Bilinearität liefert uns somit für $v, w \in \mathbb{R}^n$:

$$\langle v, w \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} v_i e_i, \sum_{j=1}^{n} w_j e_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} v_i w_j \langle e_i, e_j \rangle = v^T A w.$$

Beispiel 12.1. Das Standard Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ zwischen zwei Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^n$ ist definiert durch

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i = v^T w = v \cdot w.$$

Dieses Skalarprodukt hat somit die Identität I als Darstellungsmatrix.

Anmerkung 12.1. In einem $\mathbb{C}$-Vektorraum W müssen wir andere Voraussetzungen an ein Skalarpodukt verlangen. Betrachtet man zum Beispiel die positiv Definitheit, so hat man für $0 \neq v \in W$:

$$\langle iv, iv \rangle = i^2 \langle v, v \rangle = -\langle v, v \rangle < 0.$$

Hier bringen wir die komplexe Konjugation ins Spiel. Für $z = a + ib \in \mathbb{C}$ ist $\bar{z} = a - ib \in \mathbb{C}$.

Definition 12.3. Sei W ein $\mathbb{C}$-Vektorraum. Eine Abbildung

$$W \times W \to \mathbb{C}, (v, w) \mapsto \langle v, w \rangle$$

heißt eine **hermitesche Sesquilinearform**, falls sie **hermitesch**: Für $v, w \in W$ gilt

$$\langle v, w\rangle = \overline{\langle w, v\rangle},$$

und **sesquilinear**: Für alle $u, v, w \in W$ und $a \in \mathbb{C}$ gelten

$$\begin{aligned}\langle u, v + aw\rangle &= \langle u, v\rangle + a\langle u, w\rangle \\ \langle u + av, w\rangle &= \langle u, w\rangle + \bar{a}\langle v, w\rangle,\end{aligned}$$

ist. Eine hermitesche Sesquilinearform heißt **komplexes Skalarprodukt**, wenn sie zusätzlich **positiv definit ist**: Für $v \in W$ mit $v \neq 0$ gilt

$$\langle v, v\rangle \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \langle v, v\rangle > 0.$$

Ein komplexer Vektorraum zusammen mit einem Skalarprodukt heißt unitärer Raum.

Definition 12.4. Sei $(v, w) \mapsto \langle v, w\rangle$ eine hermitesche Sesquilinearform auf $\mathbb{C}^n$ mit Basis $\{f_1, ..., f_n\}$ Die hermitesche Matrix $(a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $a_{i,j} := \langle f_i, f_j\rangle$ heißt Darstellungsmatrix der Sesquilinearform. Hermitesche Matrix heißt dass $a_{i,j} = \overline{a_{j,i}}$ für alle $i, j \in \{1, ..., n\}$ gilt. Also $A = \bar{A}^T =: A^H$, ist somit eine Verallgemeinerung von symmetrischen Matrizen.

Beispiel 12.2. Das Standard Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$ zwischen zwei Vektoren $v, w \in \mathbb{C}^n$ ist definiert durch

$$\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^{n} \bar{v}_i w_i = \bar{v}^T w.$$

Im Folgenden sei V ein Euklidischer oder unitärer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Definition 12.5. Für $v \in V$ heißt

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v\rangle} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

die (induzierte) Norm von v.
Für $v, w \in V$ heißt

$$d(v, w) = \|v - w\| \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

der Abstand von v und w.
Ein Vektor v mit $\|v\| = 1$ heißt Einheitsvektor.

Definition 12.6.

- Zwei Vektoren $v, w \in V$ heißen orthogonal (senkrecht), falls

$$\langle v, w\rangle = 0$$

- Für einen Einheitsvektor $u \in V$ und $v \in V$ ist $\langle u, v\rangle u$ die orthogonale Projektion auf den Unterraum aufgespannt von u.

Satz 12.1 (Cauchy-Schwarz Ungleichung)**.** *Für $v, w \in V$ gilt*

$$|\langle v, w\rangle| \leq \|v\|\|w\|,$$

mit Gleichheit genau dann, wenn v und w linear abhängig sind.

Satz 12.2. *Für alle $u, v, w \in V$ und $a \in \mathbb{R}$ bzw. $a \in \mathbb{C}$ gelten:*

1. *Falls $v \neq 0$, so folgt $\|v\| > 0$.*
2. $\|av\| = |a|\|v\|$.
3. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ *(Dreiecksungleichung).*
4. *Falls $v \neq w$, so folgt $d(v, w) > 0$.*
5. $d(v, w) = d(w, v)$.
6. $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$ *(Dreiecksungleichung).*

Definition 12.7.

1. Ein normierter Vektorraum ist ein reeller oder komplexer Vektorraum V mit einer Abbildung
$$V \to \mathbb{R}_{\geq 0}, v \mapsto \|v\|,$$
die 1. - 3. aus Satz 12.2 erfüllt.

2. Ein metrischer Raum ist eine Menge V mit einer Abbildung
$$d : V \times V \to \mathbb{R}_{\geq 0},$$
die 4. - 6. aus Satz 12.2 erfüllt. Die Abbildung d heißt Metrik auf V

Anmerkung 12.2.

- Nicht jede Norm kommt von einem Skalarprodukt! Man betrachte zum Beispiel die Manhatten-Norm auf $\mathbb{R}^n$, definiert durch
$$\|v\| = \sum_{i=1}^{n} |v_i|.$$
- Nicht jede Metrik kommt von einer Norm.

Definition 12.8.

1. Eine Menge $S \subseteq V$ heißt ein Orthogonalsystem, falls alle verschiedene Vektoren $v \neq$

$w \in S$ orthogonal sind.

2. Ein Orthogonalsystem $S \subseteq V$ heißt ein Orthonormalsystem, falls zusätzlich alle Vektoren $s \in S$ die Länge $\|v\| = 1$ haben.

3. Ein Orthonormalsystem $S \subseteq V$ heißt Orthonormalbasis, falls es zusätzlich eine Basis ist.

4. Zu einem Unterraum $U \subseteq V$ heißt

$$U^{\perp} := \{v \in V | \langle v, u \rangle = 0 \text{ für alle } u \in U\}$$

das orthogonale Komplement von U. Und ist selbst auch ein Unterraum von V.

Satz 12.3. *Jedes Orthogonalsystem $S \subseteq V$ mit $0 \notin S$ ist linear unabhängig. Falls $|S| = \dim(V) < \infty$, so ist S eine Basis.*

Anmerkung 12.3. Sei $S = \{v_1, ..., v_n\}$ eine Orthonormalbasis und $v \in V$. Dann sind die Skalarprodukte $\langle v_i, v \rangle$ genau die Koordinaten von v bezüglich der Basis S. (Warum?)

Satz 12.4 (Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren)**.** *Das Schmidtsches Verfahren liefert eine Orthonormalbasis von $\langle v_1, ..., v_k \rangle \subseteq V$.*

- ***Eingabe:*** *Vektoren $u_1, ..., u_k \in V$*
- ***Ausgabe:*** *Orthonormalbasis $\{v_1, ..., v_k\}$ von $\langle u_1, ..., u_k \rangle$.*

1. *Setze $m := 0$.*
2. *Für $i = 1, ..., k$:*
   - *Setze*
   $$w_i := u_i - \sum_{j=1}^{m} \langle v_j, u_i \rangle v_j.$$
   (Im Fall $m = 0$ ist $w_i := v_i$.)
   - *Falls $w_i \neq 0$, setze $m := m + 1$ und*
   $$v_m := \frac{1}{\|w_i\|} w_i.$$

Korollar 12.1. *Jeder endlich-dimensionale Euklidische oder unitäre Vektorraum hat eine Orthonormalbasis.*

Definition 12.9. Seien V und W zwei Euklidische (bzw. unitäre) Räume.
Eine lineare Abbildung $\phi : V \to W$ heißt orthogonal (bzw. unitär), falls für alle $v, w \in V$

gilt:

$$\langle \phi(v), \phi(w) \rangle = \langle v, w \rangle.$$

Anmerkung 12.4. In diesem Fall gilt:

- ϕ is injektiv.
- Für alle $v \in V$ gilt $\|\phi(v)\| = \|v\|$. (Isometrie)
- Orthogonale Abbildungen sind winkelerhaltend.

Definition 12.10. 1. Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt orthogonal, falls

$$A^T A = I.$$

Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißt unitär, falls

$$A^H A = I.$$

2. Die Untergruppe

$$O_n := \left\{ A \in \mathbb{R}^{n \times n} | A^T A = I \right\} \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$$

heißt orthogonale Gruppe.

Die Untergruppe

$$U_n := \left\{ A \in \mathbb{C}^{n \times n} | A^H A = I \right\} \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$$

heißt unitäre Gruppe.

Anmerkung 12.5. Für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (bzw. $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$) ist gleichbedeutend:

1. A ist orthogonal (bzw. unitär),
2. Die Spalten von A bilden eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$ (bzw. $\mathbb{C}^n$),
3. Die Zeilen von A bilden eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$ (bzw. $\mathbb{C}^n$).

13 Hauptachsentransformation

Lemma 13.1. *Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch, d.h.*

$$A^T = A.$$

Für A gelten folgende Eigenschaften:

- *Wäre $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Dann sind alle Eigenwerte von A reell mit reellen Eigenvektoren.*
- *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Unterraum mit $U \neq \{0\}$, mit $A \cdot u \in U$ für alle $u \in U$. Dann enthält U einen Eigenvektor von A.*
- *Zwei Eigenvektoren v, w zu zwei unterschiedlichen Eigenwerten λ, μ sind orthogonal zueinander, d.h.:*
$$\langle v, w \rangle = 0.$$

Aus diesen Eigenschaften können wir herleiten:

Satz 13.1 (Hauptachsentransformation)**.** *Für jede symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gibt es eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$ bestehend aus Eigenvektoren von A.*
Äquivalent dazu: Es existiert $S \in O_n(\mathbb{R})$, so dass

$$S^{-1}AS = S^TAS$$

eine Diagonalmatrix ist. (Dabei sind die Spalten von S Eigenvektoren von A)

Satz 13.2 (Spektralsatz)**.** *Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine normale Matrix, d.h.*

$$A^H A = AA^H.$$

Dann gibt es eine unitäre Matrix $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$, so dass S^HAS eine Diagonalmatrix ist.

Satz 13.3. *Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch mit Eigenwerten $\lambda_1 \leq ... \leq \lambda_n \in \mathbb{R}$. Dann gilt für alle Einheitsvektoren $v \in \mathbb{R}^n$, ($\|v\| = 1$)*

$$\lambda_1 \leq \langle Av, v \rangle \leq \lambda_n.$$

Definition 13.1 (Definitheit)**.** Eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt:

- **positiv definit**, falls alle Eigenwerte von A positiv sind;
- **positiv semidefinit**, falls alle Eigenwerte von A positiv oder Null sind;
- **negativ definit**, falls alle Eigenwerte von A negativ sind;
- **negativ semidefinit**, falls alle Eigenwerte von A negativ oder Null sind;

- **indefinit**, falls es sowohl positive als auch negative Eigenwerte gibt.

Anmerkung 13.1. Für alle $v \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$A \text{ positiv definit} \Leftrightarrow \langle v, A \cdot v \rangle > 0$$

Lemma 13.2. *Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Dann ist die Matrix $A^T A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv semidefinit.*

Satz 13.4 (Singulärwertzerlegung)**.** *Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Dann gibt es orthogonale Matrizen $U \in O_m(\mathbb{R})$ und $V \in O_n(\mathbb{R})$, so dass*

$$U^T A V = \left(\begin{array}{ccc|c} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & \sigma_r & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right) =: \Sigma \in \mathbb{R}^{m\times n},$$

mit $\sigma_1 \geq ... \geq \sigma_r > 0$, wobei $r = \operatorname{rang}(A)$. Die Zerlegung

$$A = U\Sigma V^T$$

heißt Singulärwertzerlegung von A.

Anmerkung 13.2. Der Beweis ist konstruktiv.

Beispiel 13.1 (Rezept zur Bestimmung der Singulärwertzerlegung).
Zur Bestimmung der Singulärwertzerlegung $A = U\Sigma V^T$ einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$gehen wir wie folgt for:

1. Bestimme die Eigenwerte $\lambda_1, ..., \lambda_n$ von $A^T A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und ordne:

   $$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_r > \lambda_{r+1} = \cdots = \lambda_n = 0 \text{ mit } 1 \leq r \leq n.$$

   Bestimme eine ONB $\{v_1, ..., v_n\}$ des $\mathbb{R}^n$ aus den zugehörigen Eigenvektoren von $A^T A$ ($A^T A v_i = \lambda_i v_i$) und erhalte die orthogonale Matrix $V = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

2. Setze

   $$\text{Für } m \leq n: \ \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & \sigma_m & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{Für } n \leq m: \ \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

   mit $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ für alle $i = 1, ..., \min\{m, n\}$.

3. Bestimme $u_1, ..., u_r$ aus

   $$u_i = \frac{1}{\sigma_i} A v_i \text{ für } i = 1, ..., r$$

   und ergänze im Fall $r < m$ die Vektoren $u_1, ..., u_r$ zu einer ONB bzw. zu einer orthogonalen Matrix $U = (u_1, ..., u_m)$.

14 Die Jordansche Normalform

Definition 14.1 (Jordan-Block und -Matrix)**.** Ein Jordan-Block ist eine Matrix $J \in K^{n\times n}$ mit der Form:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \in K^{e\times e},$$

Eine quadratische Matrix B ist in Jordan-Nomalform, falls sie Jordan-Blöcke als Diagonalelemente besitzt.

$$B = \begin{pmatrix} \boxed{J_1} & & & 0 \\ & \boxed{J_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{J_r} \end{pmatrix}$$

Ist diese Matrix B ähnlich zu $A \in K^{n\times n}$, dann heißt B eine Jordansche Normalform von A.

Satz 14.1. *Eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ hat genau dann eine Jordansche Normalform, wenn χ_A in Linearfaktoren zerfällt.*

Satz 14.2. *Ist $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine quadratische Matrix, so konvergiert die Reihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

(mit $A^0 = I_n$) in jedem Eintrag.
Dies motiviert die Definition des Matrix-Exponentials:

$$\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k.$$