1 Kinematik d. Massenpunkts

$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}$ $\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ $(\Rightarrow \vec{v}=\int \vec{a}(t)dt=\vec{a}\cdot t+b_{v_0}, \vec{r}=\int \vec{v}(t)dt=\frac{\vec{a}}{2}t^2+\vec{v}_0\cdot t+\vec{c}_{r_0}$

Schiefer Wurf

$x(t)=v_0\cdot\cos(\alpha)\cdot t$
$y(t)=-\frac{g}{2}t^2+v_0\cdot\sin(\alpha)\cdot t+h$

$\Rightarrow y(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_{0x}^2}+\frac{v_{0y}}{v_{0x}}\cdot x+h \\ -\frac{1}{2}\frac{g}{v_0^2\cos(\alpha)^2}x^2+\tan(\alpha)\cdot x+h\end{cases}$

$x_W=\frac{v_0^2\cdot\sin(2\alpha)}{g}$ (NST $y(x)=0$) $s_H=\frac{v_0^2\cdot\sin^2(\alpha)}{2g}$ $[v_y=0]$ $t_H=\frac{v_0\cdot\sin(\alpha)}{g}$

2 Dynamik d. Massenpunkts

Krafteinwirkung → Änderung d. Bewegungszustands

$p=m\cdot v$, $F=\dot{p}=m\cdot\dot{v}=m\cdot a$ Newton$_3$: $\vec{F}_1=-\vec{F}_2$, actio = reaktio

$\vec{F}=\frac{d}{dt}(m\cdot\vec{v})\Rightarrow\vec{v}(t)=\frac{1}{m}\int\vec{F}dt+\vec{C}_1\Rightarrow\vec{r}(t)=\int\vec{v}(t)dt+C_2=\frac{1}{m}\iint\vec{F}(t)dtdt+\int\vec{C}_1dt+C_2$

(Zentralkraftfeld: F abhängig von r, Erde: $\vec{F}=-G\cdot\frac{m\cdot M}{r^2}\hat{r}$), Drehimpuls erhalten)

Rakete: $p(t+\Delta t)=(m-\Delta m)(\vec{v}+\Delta\vec{v})+m\cdot v' \Rightarrow \Delta p=(p(t+\Delta t))-p(t)=m\Delta\vec{v}+\Delta m(\vec{v}'-\vec{v})-\Delta m\Delta\vec{v}$

$\vec{v}-\vec{v}'=\vec{v}_e$, $m\frac{dv}{dt}=-\frac{dm}{dt}\cdot\vec{v}_e-m_g$ für 1dim $\Rightarrow v_t=v_e\cdot\ln\left(\frac{m_R+m_B}{m_R}\right)-g\cdot T$

$v_0 \gg \sqrt{2Rg}$ → Steighöhe ins Unendliche

Potenzial Erde: $U(r)=-G\frac{Mm}{r}$

Kreisbewegung

$|\vec{v}|=$ konst, $\vec{v}=v\cdot\hat{e}_t$, $\Delta s=R\cdot\Delta\varphi$

$\Rightarrow v=\frac{ds}{dt}=R\cdot\frac{d\varphi}{dt}=R\cdot\omega$, $\omega=\dot{\varphi}=\frac{v}{r}$

$\vec{a}=\frac{d}{dt}\vec{v}=\frac{dv}{dt}\hat{e}_t+v\cdot\frac{d}{dt}\hat{e}_t$, mit $\frac{d\hat{e}_t}{dt}=\omega$

$\Rightarrow\vec{a}=v\cdot\omega\cdot\hat{e}_a=-R\omega^2\cdot\hat{r}$, $|\vec{a}|=R\omega^2=\frac{v^2}{r}$

$\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{R}\Rightarrow\vec{\omega}=\frac{1}{R^2}(\vec{R}\times\vec{v})$

$F_r=\frac{mv^2}{r}=\omega^2mr=m\frac{4\pi^2r}{T^2}$ $|\vec{\omega}|=\frac{|\vec{a}|}{|\vec{R}|}$

Energiesatz

$\Delta W=\vec{F}(\vec{r})\cdot\Delta\vec{r}$, $W=\int_{P_1}^{P_2}\underbrace{\vec{F}\cdot d\vec{r}}_{\text{Skalarprodukt}}\overset{\text{Def.}}{=}-[E_{pot}(P_2)-E_{pot}(P_1)]$

$dW=\vec{F}\cdot d\vec{r}=\vec{F}\cdot\vec{v}dt\Rightarrow P=\frac{dW}{dt}=\vec{F}\cdot\vec{v}$

$E_{pot}=m\cdot g\cdot h$ $E_{kin}=\frac{1}{2}mv^2$ $E_{Feder}=\frac{1}{2}kx^2$

Stokes: konservatives Kraftfeld

$\nabla\times\vec{F}=\begin{pmatrix}\partial_x\\\partial_y\\\partial_z\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}F_x\\F_y\\F_z\end{pmatrix}=0$

$E_{pot}(P)+E_{kin}(P)=E=$ konst.

Potenzial

$\Delta E_{pot}=\frac{\partial}{\partial x}E_{pot}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}E_{pot}\Delta y+\frac{\partial}{\partial z}E_{pot}\Delta z$

$\Rightarrow\vec{F}\cdot\Delta\vec{r}=F_x\Delta x+F_y\Delta y+F_z\Delta z$

kurz: $\vec{F}=-\text{grad}E_{pot}=-\nabla\cdot E_{pot}=\left(-\frac{\partial}{\partial x}E_{pot},-\frac{\partial}{\partial y}E_{pot},-\frac{\partial}{\partial z}E_{pot}\right)$

$V(P)=\lim_{m\to0}\left[\frac{1}{m}E_{pot}(P)\right]\Rightarrow$ Potentialänderung $=g\cdot h$

Keplersche Gesetze

1. Planetenbahnen = Ellipse, Sonne in einem Brennpunkt
→ Erhaltung d. Richtungsinformation bei Impulserhaltung
2. Fahrstrahl überstreicht in gleicher Zeit gleiche Fläche
→ Erhaltung d. Betragsinformation bei Drehimpulserhaltung
3. Quadrate d. Umlaufzeit = Kuben d. gr. Halbachsen

$\frac{T_1^2}{T_2^2}=\frac{a_1^3}{a_2^3}\Rightarrow\frac{T_1^2}{a_1^3}=$ konst $=\frac{4\pi^2}{G\cdot M}$

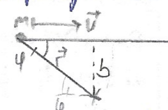
$dA=\frac{1}{2}|r|\cdot|vdt|\cdot\sin(\alpha)\Rightarrow\frac{dA}{dt}=\frac{1}{2}|r|\cdot|v|\cdot\sin(\alpha)$
$=\frac{1}{2m}|\vec{r}\times\vec{p}|=\frac{1}{2m}|\vec{L}|$

→ Zentralkraftfeld, Kraft proportional zur Masse

Drehbewegung

Drehimpuls $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}$ → abhängig von Koordinatenursprung, axialer Vektor, senkrecht auf $\vec{r},\vec{p}$

$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=m(\vec{r}\times\vec{v})=m[\vec{r}\times(\vec{v}_r+\vec{v}_\varphi)]=m\cdot\vec{r}\times\vec{v}_\varphi$



$|L|=m\cdot r^2\cdot\dot{\varphi}=m\cdot r^2\omega=m\cdot r\cdot v$

$|\vec{L}|=|\vec{r}\times\vec{p}|=m\cdot v\cdot r\cdot\sin(\alpha)=m\cdot v\cdot b$
b = Stoßparameter, zeitl. konstant

Drehmoment

$\frac{d}{dt}\vec{L}=\frac{d}{dt}\vec{r}\times\vec{p}+\vec{r}\times\frac{d}{dt}\vec{p}=\vec{r}\times\frac{d}{dt}\vec{p}=\vec{r}\times\vec{F}$

$\Rightarrow\vec{D}=\frac{d}{dt}\vec{L}=\underline{\vec{r}}\times\vec{F}$ → Hebelarm der Kraft, wo greift die Kraft an

} abhängig von Ursprung

Gleichgewicht eines Hebels: $\vec{D}_1+\vec{D}_2+\dots+\vec{D}_n=0$

$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$

$\sigma=\frac{\sqrt{\sum(\bar{x}-x_i)^2}}{\sqrt{n-1}}$

Harmonischer Oszillator

frei, ungedämpft Feder: $\ddot{x}+\frac{D}{m}x=0$, Torsion: $2r^2m\ddot{\alpha}+k_\alpha\alpha=0$
Faden: $\ddot{\alpha}+\frac{g}{\ell}\alpha=0$ $(ml\ddot{\varphi}=-mg\varphi)$ bzw $-k\alpha=I\cdot\ddot{\alpha}$

allg: $x(t)=c_e e^{\lambda t}$, $\Rightarrow x(t)=c_1e^{i\omega_0t}+c_2e^{-i\omega_0t}$, $C_1=C_2^*$

Überlagerung $x(t)=\sum_n x_n(t)$
↗ $x(t)=a\cos(\omega t+\varphi_1)+b\cos(\omega t+\varphi_2)$ $(f_1=f_2)$
speziell: $\varphi_1=\varphi_2$ → Add. von A, $\varphi_1=\varphi_2+\pi$ → Subtraktion d. Ampl.
↘ $x(t)=a\cos(\omega_1t)+a\cos(\omega_2t)=2a\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)\cos(\dots)$
speziell: Schwebung, $f_0=\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$, A variiert mit $f\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)$ $\omega_1-\omega_2$

gedämpfter Oszillator

$\lambda_{1,2}=-\gamma\pm\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}\Rightarrow x(t)=e^{-\gamma t}\left(c_1e^{\sqrt{\quad}t}+c_2e^{-\sqrt{\quad}t}\right)$

i) schwache Dämpfung, $\gamma\ll\omega_0$, $x(t)=A\cdot e^{-\gamma t}\cos(\omega t+\varphi)$, $\omega=\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}$
Amplitude nimmt exponentiell ab, größeres Gamma → kl. Frequenzen für ω
ii) starke Dämpfung $\gamma\gg\omega_0$, $\lambda_{1,2}=-\gamma\pm\alpha$ mit $\alpha=\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}$
$x(t)=e^{-\gamma t}(c_1e^{\alpha t}+c_2e^{-\alpha t})$, oszilliert nicht, mit $x(0)=0$, $\dot{x}(0)=v_0\Rightarrow\frac{v_0}{\alpha}e^{-\gamma t}\sinh(\alpha t)$
iii) aperiodischer Grenzfall, $\gamma=\omega_0$, $x(t)=C(t)e^{\lambda t}$, $\ddot{C}=0\Rightarrow C(t)=\tilde{C}_1+\tilde{C}_2t$

erzwungene Schwingung

$m\ddot{x}=-Dx-b\dot{x}+F_0\cos(\omega t)\Rightarrow x(t)=A_1e^{-\gamma t}\overset{\to 0 \text{ für } t \text{ groß}}{\cos(\omega t+\varphi)}+\overbrace{A_2\cos(\omega t+\varphi)}^{\text{stationärer Term}}$

$\Rightarrow$ stat. Term in DGL $\tan(\varphi)=-\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$ hinkt Erregerfrequenz hinterher, $\varphi=0$ für f_0 klein, $\frac{\pi}{4}$, für f_0 groß

$A_2(\omega)=\frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\gamma\omega)^2}}$; $\left.\begin{matrix}\omega\to0\Rightarrow A_2\to\frac{F_0}{m\omega_0^2}\\\omega\to\infty\Rightarrow A_2\to0\end{matrix}\right\}$ max: $\omega_R=\sqrt{\omega_0^2-2\gamma^2}$

Energiebilanz

frei, ungedämpft: $\frac{1}{T}\int_0^T\frac{1}{2}m\dot{x}^2dt=E_{kin}$, $E_{pot}=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{1}{2}Dx^2dt$

frei, gedämpft: $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}Dx^2\right)=-b\dot{x}^2=-2\gamma m\dot{x}^2$, $W=-2\gamma m\int_0^T\dot{x}^2dx$ für γ klein, pro Periode

erzwungen: $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}Dx^2\right)=-b\dot{x}^2+F(t)\dot{x}\Rightarrow$ da $\dot{E}=0$, $W=\int_t^{t+T}b\dot{x}^2dt=\frac{1}{2}b\omega^2A_2^2T$

Mathehilfe

$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)\pm\cos(\alpha)\sin(\beta)$

$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)\mp\sin(\alpha)\sin(\beta)$

$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan(\alpha)\pm\tan(\beta)}{1\mp\tan(\alpha)\cdot\tan(\beta)}$

Winkel zw. zwei Geraden/Vektoren

$\cos(\varphi)=\frac{|\vec{g}\cdot\vec{h}|}{|\vec{g}|\cdot|\vec{h}|}$

$T=\frac{2\pi}{\omega}$, $\omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi f$

$\omega_{Feder}=\sqrt{\frac{m}{k}}$ $\omega_{Faden}=\sqrt{\frac{\ell}{g}}$

$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r\cos\varphi\sin\vartheta\\r\sin\varphi\cos\vartheta\\r\cos\vartheta\end{pmatrix}$

$\omega_B=\omega_E\sin(\alpha)$

Taylorreihe:
um Punkt a: $Tf(x,a)=\sum_{n=0}^{k}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\cdot(x-a)^n$
um 0: $\sum_{n=0}^{k}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n$

Drehimpulserhaltung: $L=I\cdot\omega$, $I=mr^2$

Bezugs- und Koordinatensysteme

i) Inertialsysteme → Trägheitsgesetz gelten, $\vec{u}=$ konst.
$\vec{r}'(t)=\vec{r}(t)-\vec{u}\cdot t$
$\vec{v}'(t)=\vec{v}(t)-\vec{u}$
$\vec{a}'=\vec{a}$ (unabhängig von $\vec{u}$),
ebenso $\vec{F}'=\vec{F}$

ii) beschl. Bezugssysteme → keine Trägheitsgesetze

geradlinig beschl. mit $\vec{a}$

$\left.\begin{matrix}x=x'+u_{0x}\cdot t+\frac{1}{2}a_xt^2\\y=y'+u_{0y}\cdot t+\frac{1}{2}a_yt^2\\z=z'+u_{0z}\cdot t+\frac{1}{2}a_zt^2\end{matrix}\right\}t=t'$

rotierend mit $\vec{\omega}=$ konst

$\vec{r}(t)=x(t)\hat{e}_x+y(t)\hat{e}_y+z(t)\hat{e}_z$
$r'(t)=x'(t)\hat{e}_x'+y(t)\hat{e}_y'+z(t)\hat{e}_z'$
$\vec{v}(x',y',z')=\vec{v}'(x',y',z')+\vec{u}(x',y',z')$
$\rightarrow\frac{d\hat{e}_i'}{dt}=\vec{\omega}\times\hat{e}_i\rightarrow\vec{v}=\vec{v}'+\vec{\omega}\times\vec{r}$

$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d}{dt}\vec{v}'+\left(\omega\times\frac{d}{dt}\vec{r}\right)=\vec{a}+\overbrace{\underbrace{2\vec{\omega}\times\vec{v}'}_{-\vec{a}_c}+\underbrace{\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})}_{-\vec{a}_{ZF}}}^{\text{Scheinkräfte}}$

$\vec{F}_c=2m(\vec{v}'\times\vec{\omega})$ → nach Osten (fällt das Teil)

$\vec{F}_{ZF}=m\vec{\omega}\times(\vec{r}\times\vec{\omega})$ (Kraft wirkt gegen Ursache, daher VZW)

Systeme von MP

SP: $\vec{r}_S=\frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{\sum_i m_i}=\frac{1}{M}\sum_i m_i\vec{r}_i$

$\vec{v}_S=\frac{d}{dt}\vec{r}_S=\frac{1}{M}\cdot\sum_i m_i\cdot\vec{v}_i$

$\frac{d}{dt}\vec{p}=F\Rightarrow$ zeitl. konst.

SPS

$\vec{r}_i=\vec{r}_{iS}+\vec{r}_S$

$E_{kin}=E_{kinS}+\frac{1}{2}Mv_S^2$ (bezgl. SP)

$\mu=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ $\frac{1}{\mu}=\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}$

Drehimpuls von Systemen

$\vec{L}=\sum_i\left[m_i(\vec{r}_{iS}+\vec{r}_S)\times(\vec{v}_{iS}+\vec{v}_S)\right]$
$=\underbrace{M(\vec{r}_S\times\vec{v}_S)}_{L \text{ vom SP bezgl. LS}}+\underbrace{\sum_i m_i(\vec{r}_{iS}\times\vec{v}_{iS})}_{\text{ges. }L\text{ d. Systems bezgl. SP}}$

für 2-Teilchen-System
$L_S=\vec{r}_{12}\times\mu\vec{v}_{12}$

Stöße zw. Teilchen

1) Energieerhaltung $E_{kin1}+E_{kin2}=E_{kin1}'+E_{kin2}'+Q$
2) Impulserhaltung $\vec{p}_1+\vec{p}_2=\vec{p}_1'+\vec{p}_2'$
3) Drehimpulserhaltung bzgl. eines Punktes

Elastisch: $Q=0$
auf Gerade

$v_1'=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v_1+\frac{2m_2v_2}{m_1+m_2}$

$v_2'=\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}v_2+\frac{2m_1v_1}{m_1+m_2}$

$\Delta E=E_1-E_1'=E_1\frac{4m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}$

$=4\frac{\mu}{m_1+m_2}E_1$

für $v_2=0$, max für $m_1=m_2$

dezentral: $v_2'=v_1\cos(\varphi)$

$\Delta E_1=4\frac{m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}\cos^2(\varphi)E_1$

Elastisch im SPS

$v_S=\frac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}$

$\vec{v}_i=\vec{u}_i+\vec{v}_S$, $\vec{v}_i'=\vec{u}_i'+\vec{v}_S$

$\vec{u}_1=\frac{m_2}{m_1+m_2}(\vec{v}_1-\vec{v}_2)$

$\vec{u}_2=-\frac{m_1}{m_1+m_2}(\vec{v}_1-\vec{v}_2)$

$|\vec{u}_1|=|\vec{u}_1'|$, $|\vec{u}_2|=|\vec{u}_2'|$

v_S bleibt unverändert

inelastisch (vollkommen)

$m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2=(m_1+m_2)\vec{v}'$

$\vec{v}'=\vec{v}_S$, Q ist Wärmeleistung

$Q=\Delta E_{kin}$, für $v_2=0$

$Q=\frac{m_2}{m_1+m_2}E_{kin1}^{\text{vorher}}$

$E_{kin1}'=\frac{m_1}{m_1+m_2}E_{kin1}^{\text{vorher}}$

E_{kinS} bleibt unverändert!!

Translation	Rotation
Weg $d\vec{s}$	Winkel $d\vec{\varphi}$
$\vec{v}=\frac{d\vec{s}}{dt}$ ↔	$\vec{\omega}=\frac{d\vec{\varphi}}{dt}$
$a=\ddot{s}$ ↔	$\alpha=\ddot{\varphi}$
$F=m\cdot a$ ↔	$\vec{D}=\vec{r}\times\vec{F}=I\cdot\vec{\beta}=\dot{\vec{L}}$
$\vec{p}=m\vec{v}$	$L=I\vec{\omega}$ ← $M\cdot\Delta t=\Delta L$
$E=\frac{1}{2}mv^2$	$E=\frac{1}{2}I\omega^2$
$dW=\vec{F}d\vec{s}$	$dW=\vec{D}d\vec{\varphi}$
$P=\vec{F}\cdot\vec{v}$	$P=\vec{D}\cdot\vec{\omega}$

$I=\int_V R_\perp^2\rho dV$

Mechanik starrer Körper

$V = \iiint_V d\vec{r}^3$; $M = \iiint \rho \, d\vec{r}^3$ $(d\vec{r}^3 = dV)$

$\vec{R}_S = \frac{1}{M} \iiint \vec{R} \rho(\vec{R}) dV$

$\vec{R}_{iS} = \vec{R}_i - \vec{R}_S$

$\vec{v}_{iS} = \vec{\omega} \times \vec{R}_{iS}$ einziger Freiheitsgrad bzg. SP

$\vec{v}_i = \vec{v}_S + (\vec{\omega} \times \vec{R}_{iS})$ Bew = Trans + Rot

$\vec{D} = \vec{R}_{iS} \times \vec{F}_1$

Gleichgewicht: $\Sigma_i \vec{F}_i = 0$; $\Sigma_i \vec{D}_i = 0$

$E_{kin}(\Delta m_i) = \frac{1}{2} \Delta m_i R_{i\perp}^2 \times \omega^2$

$E_{rot\,ges} = \frac{1}{2}\omega^2 \iiint R_\perp^2 \rho \, d r^3 = \frac{1}{2} I \omega^2$

$I_B = I_{sp} + a^2 M$

$I_v = \iiint R_\perp^2 dm$

$\vec{L}_i = \vec{R}_{i\perp} \times (\Delta m_i \vec{v}_i) = R_{i\perp}^2 \Delta m_i \vec{\omega}$

$\Rightarrow \vec{L} = I \vec{\omega}$

Deformation von Körpern

Zug senkrecht zur Fläche

$F = E \cdot q \cdot \frac{\Delta l}{l}$, $\sigma = \frac{F}{q}$, $\sigma = E \cdot \varepsilon$

E: Elastizitätsmodul, σ: Zugspannung

Querkontraktion: $\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta l}{l} + \frac{2\Delta d}{d}$

$\mu = -\frac{\Delta d / d}{\Delta l / l}$: $-\mu \frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta d}{d} = \frac{\Delta h}{h}$ (Poisson-Verhältnis)

hydrostatischer Druck

$\Delta L = -pL\left(\frac{1-2\mu}{E}\right)$, $\Delta d = -pd\left(\frac{1-2\mu}{E}\right)$

$\Delta p = -K \frac{\Delta V}{V}$ Kompressionsmodul

$\kappa = \frac{1}{K} = \frac{3}{E} \cdot (1-2\mu)$ Kompressibilität

Scherung

$\tau = \frac{F}{A} = G \cdot \alpha$ (G = Schubl/Schermodul)

Torsion

$D = \frac{\pi}{2} \cdot G \cdot \frac{R^4}{L} \varphi = D_R \cdot \varphi$

(Richtmoment D_r)

Biegung

$D_y = \frac{E \cdot d^3 b}{12 R}$

R: Krümmungsradius, b Breite, d Dicke

$\frac{E}{G} = 1+\mu$, $\frac{E}{3K} = 1-2\mu$, $\frac{2G}{3K} = \frac{1-2\mu}{1+\mu}$

Hydrostatischer Druck

Rotationsparaboloid

$\tan(\alpha) = \frac{m\omega^2 r}{mg} = \frac{\omega^2 r}{g}$

$z(r) = \frac{1}{2}\frac{\omega^2 r^2}{g} + z_0$

Druck: $p = \frac{F}{A}$

$F_x = F_1(x) - F_2(x) = (p - p + \frac{\partial p}{\partial x} dV)$

$F_x = -\frac{\partial p}{\partial x} dV$

$F_y = -\frac{\partial p}{\partial y} dV$

$F_z = -\frac{\partial p}{\partial z} dV$

Hydraulische Presse

$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \Rightarrow F_2 = \frac{A_2}{A_1} \cdot F_1 > F_1$

$\kappa = -\frac{1}{V}\frac{dV}{dp} = -\frac{\Delta V}{\Delta p \cdot V}$

Auftrieb

$p(z) = \rho \cdot g \cdot (h - z)$

Staumauer: $dF = p \cdot dz \cdot L$

$F = \frac{1}{2} \rho \cdot g \cdot L \cdot H^2$

$\Delta p = p_2 - p_1 = \rho \cdot g \cdot (h_2 - h_1)$

$F_A = \rho_F \cdot g \cdot V_K$

Gleichgewicht:

$\rho_F \cdot g \cdot V_K' = \rho_K \cdot g \cdot V_K$

Grenzflächen von Flüssigkeit

$\varepsilon = \frac{\Delta W}{\Delta A}$; $A = 2 \cdot L \cdot s \Rightarrow \tau = \frac{F}{2L} (= \varepsilon)$

Grenzflächenspannung, Haftspannung

Kräftegleichgewicht an Grenzfläche, Σ_x: $\tau_{12} + \tau_{23}\cos(\varphi) = \tau_{13}$ $\tau_{13} > \tau_{12} \Rightarrow \varphi < 90°$, benetzend; $\tau_{13} < \tau_{12} \Rightarrow \varphi > 90°$ nicht benetzend

Kapillare: $h = \frac{2\varepsilon \cos(\varphi)}{\rho g r}$, φ = Randwinkel

Ansatz: $E = \rho \cdot V \cdot g \cdot \frac{h}{2} - \sigma \cdot A$ (Volumen der aufsteigenden Fl hat E_{pot}, Oberfläche erzeugen hat ΔW)

$\frac{dE}{dr} = 0$

Strömende Flüssigkeiten und Gase

Änderung am Ort: $\frac{du}{dt}$ $\frac{d}{dt} u_x = \frac{\partial u_x}{\partial t} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u_x}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u_x}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right)$ Änderung durch Ortsänderung

$\Rightarrow \frac{d}{dt}(\vec{v}) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{v}$

Kontinuitätsgleichung $(dM = \rho dV = \rho A dx)$

$\frac{dM}{dt} = \rho_1 A_1 \frac{dx}{dt} = \rho_1 A_1 v_1 \Rightarrow v_1 \cdot A_1 = v_2 \cdot A_2$ für ρ = konst

$\mathrm{div}(\rho \vec{v}) \Rightarrow$ Quellstärke/pro Volumeneinheit (normaler Weise = 0)

Massenstromdichte $\vec{j} = \rho \cdot \vec{v}$ Rückstoßkraft $F_R = \frac{dp}{dt} = v_{su} \cdot I_{sw}$

Massenstromstärke $I = \rho \cdot \vec{v} \cdot \vec{A} \Rightarrow \frac{kg}{s}$

Viskos: $I = \frac{\pi \cdot \Delta p}{8\eta \cdot L} \cdot r^4$

Bernoulli: $\Delta V_1 = A_1 \cdot x_1$, $p_1 = \frac{F_1}{A_1}$, $\Delta W_1 = F_1 \cdot x_1 = p_1 \cdot \Delta V_1$

$\Rightarrow p_1 \cdot \Delta V_1 + \frac{1}{2}\rho_1 v_1^2 \Delta V_1 = p_2 \Delta V_2 + \frac{1}{2}\rho_2 v_2^2 \Delta V_2$

[bzw mit $E_{pot} = m \cdot g \cdot h = \rho \cdot g \cdot h \cdot \Delta V$]   für $\Delta V_1 = \Delta V_2$, $\rho_1 = \rho_2$

$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho \cdot g \cdot h_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho \cdot g \cdot h_2 = \text{konst.} = p_0$

$v_1 \cdot A_1 = v_2 \cdot A_2$ $\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$, $\frac{s_1}{s_2} = \frac{A_2}{A_1}$ F: Kraft, A: Fläche, s: Weg

$v = \frac{dV}{A \cdot dt}$

Gase

Barometrische Höhenformel

$p(h) = p_0 \cdot \exp\left(\frac{-\rho_0 g h}{p_0}\right)$

Druck in Gefäß

$p = \frac{2 N m v}{A \Delta t}$ $N \cdot mv$ Impulsübertrag

$F = \frac{2 Z m \Delta v_x}{\Delta t}$ $Z = n_x v_x A \Delta t$

Wellen

$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$ $\xi(x,t) = A \cdot \cos(\omega t - kx + \varphi)$

$= A \cdot \cos\left(2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi\right)$

$= A \cdot \cos\left(2\pi\left(f \cdot t - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi\right)$

$\left(= C \cdot e^{i(\omega t - kx)} \right)$

$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$

$v_{ph} = \lambda \cdot f = \frac{\omega}{k}$ $\left[v_{ph} = \sqrt{\frac{F}{\mu}}\right]$ $\mu = \frac{m}{L}$

$\rho_E = \frac{W}{\Delta V} = \frac{1}{2}\rho A^2 \omega^2$

$E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \Delta V A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kz)$

$E_{pot} = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \cos^2(\omega t - kz)$

$\frac{E_p}{\Delta V} = \frac{1}{4}\rho A^2 \omega^2 = \frac{E_{kin}}{\Delta V}$

$I = v_{ph} \cdot \rho_E = \frac{1}{2} v_{ph} \cdot \rho \cdot A^2 \cdot \omega^2$

intensität

Energien

Überlagerung

Einhüllende (Variation d. A)   schneller Frequenzanteil

$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2 \cdot A \cdot \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t - \frac{k_1 - k_2}{2} z\right)\left(\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \frac{k_1 + k_2}{2} x\right)\right)$

Max. der Einhüllenden: $v_g = \frac{d\omega}{dk} = v_{ph} + k \cdot \frac{dv_{ph}}{dk} = v_{ph} - \lambda \cdot \frac{dv_{ph}}{d\lambda}$

Stehende Wellen

offen-geschlossen → $f_n = (2n+1)\frac{v_{ph}}{4L}$, $L = (2n+1)\frac{\lambda_n}{4}$, $\lambda_n = \frac{4L}{(2n+1)}$

beide gleich → $f_n = (n+1)\frac{v_{ph}}{2L}$, $L = (n+1)\frac{\lambda_n}{2}$, $\lambda_n = \frac{2L}{n+1}$

Dopplereffekt

$\Delta x = (v_L - v_Q)\Delta t$

Bewegte Quelle, ruhender Beobachter

$\lambda_{vor} = \lambda_0\left(1 - \frac{v_Q}{c}\right)$ $\lambda_{nach} = \lambda_0\left(1 + \frac{v_Q}{c}\right)$, $f_{vor} = \frac{f_0}{1 - \frac{v_Q}{c}}$ $f_{nach} = \frac{f_0}{1 + \frac{v_Q}{c}}$

ruhende Quelle, bewegter Beobachter

$f_{zu} = f_0\left(1 + \frac{v_B}{c}\right) > f_0$ $f_{weg} = f_0\left(1 - \frac{v_B}{c}\right) < f_0$

Sender & Empfänger bewegt: $f_E = f_0 \frac{(c \pm v_E)}{(c \mp v_S)}$ v_E: + zu v_S: − zu

Machscher Kegel

$\sin(\beta) = \frac{v_c}{v_Q} = \frac{1}{M} \Rightarrow$ Kegel, "Wellenwand"   Schallgeschw.

Wellen in Flüssigkeiten

Teilchen an Oberfläche kreisbewegung, wenn $h > \lambda$

$v_K = \frac{2\pi R}{T} = \omega \cdot R$

Beobachtersicht $v_1 = v_W + \frac{2\pi R}{T} \Rightarrow$ Wellenberg

$v_2 = v_W - \frac{2\pi R}{T} \Rightarrow$ Wellental

$\Rightarrow \Delta E_{kin} = \frac{4\pi R v_W m}{T} = \Delta E_{pot} = mg2R \Rightarrow v_W = \frac{gT}{2\pi}$

$[G] = \frac{kg\, m^3}{kg\, s^2}$

$[L] = Nms = \frac{kg\, m^2}{s}$

$[D] = Nm = \frac{kg\, m^2}{s^2}$

$1 bar = 10^5 Pa = \left[\frac{N}{m^2}\right] = \left[\frac{kg}{m s^2}\right]$

$k = \frac{N}{m}$

Wenn etwas nicht passt

- wo genau setzen die Kräfte an
- vergiss bei einem Seil die Seilspannung nicht
- wo ist der Bezugs/Nullpunkt? → darf nicht bel. gewechselt werden
- welche resultierende Kraft ergibt sich?
- alles aufschreiben, was sicher gilt
- beim Umformen korrekt übertragen & nichts vergessen
- Ruhelage des Systems: $m\ddot{x} = 0$
- wie helfen geometrische Überlegungen?
- hat man einen Anfangs- und Endpunkt → Energien
- gelten mathematische Grundsätze in den Formeln? sin/cos/S.d. Pythagoras/...
- Zusammensetzung des Trägheitsmoments?
- was ist Zentrum der Bewegung

$p = m \cdot v = Ns$

DGLs lösen

ungedämpft, harmonisch

$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \Rightarrow x(t) = c \cdot e^{\lambda t}$

$\lambda^2 + \frac{k}{m} = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$

$x(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 e^{\lambda t} \Rightarrow c_1 = c_2^*$

Imaginärteile verschwinden, äquivalent zu

$x(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$

gedämpfte Schwingung

$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \Rightarrow x(t) = c \cdot e^{\lambda t}$

$\lambda^2 + \frac{b}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0$, $\lambda_{1,2} = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}$

$\gamma < \omega$

$x(t) = C \cdot e^{-\gamma t + i\sqrt{\ } t} + C^* e^{-\gamma t - i\sqrt{\ } t}$

$\hookrightarrow e^{-\gamma t}(A\sin(\sqrt{\ }t) + B\cos(\sqrt{\ }t))$

$\gamma > \omega$

$x(t) = e^{-\gamma t}(C e^{\sqrt{\ }t} + C^* e^{-\sqrt{\ }t})$

inhomogen:

Störfunktion vom Typ $b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n$

↳ Ansatz: Part. Lösung mit $B_0 + B_1 x + \ldots$

einsetzen für y (entsprechend abgeleitet)

→ B_i bestimmen

Störfkt. $g(x) = \sin(\omega x)$

part. Lsg $y = A\sin(\omega x) + B\cos(\omega x)$

einsetzen für y, auflösen

erzwungene Schwingung

$m\ddot{x} = -b\dot{x} - Dx + F_0\cos(\omega t)$

$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{D}{m}x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$

$x(t) = e^{-\gamma t}(A_1\cos(\omega t) + B_1\sin(\omega t)) + A_2\cos(\omega t) + B_2\sin(\omega t)$