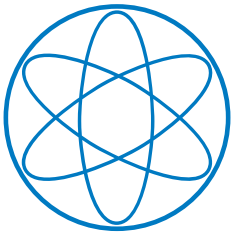

Physik-Department

Ferienkurs zur Experimentalphysik 3

Matthias Golibrzuch

17/03/16

Technische Universität München

Inhaltsverzeichnis

1 Eigenschaften von Licht **1**

2 Strahlungsgesetze **2**

2.1 Schwarzer Strahler 2

2.2 Plancksches Strahlungsgesetz 3

2.3 Stefan-Boltzmann-Gesetz 3

2.4 Wiensches Verschiebungsgesetz 4

2.5 Wiensches Strahlungsgesetz 4

2.6 Rayleigh-Jeans-Gesetz 4

3 Laser **5**

3.1 2-Niveau-System 5

3.2 Funktionsweise eines Lasers 6

4 Comptonstreuung **7**

5 Das Elektron **9**

6 Materiewellen **10**

6.1 Wellenpakete 10

6.2 Wahrscheinlichkeitsdarstellung 11

6.3 Heisenbergsche Unschärferelation 11

7 Optisches Spektrum des Wasserstoffs **12**

7.1 Serien des Wasserstoffs 12

7.2 Die Bohr'schen Postulate 13

7.3 Verallgemeinerung für Wasserstoffähnliche Atome 13

7.4 Quantensprünge durch Elektron-Stoßanregung 14

7.5 Sommerfeld'sche Erweiterung des Bohrschen Atommodells 14

8 Grundlagen der Quantenmechanik **15**

1 Eigenschaften von Licht

Mit dem Photoeffekt haben wir ein Experiment gesehen bei dem sich Licht wie ein Teilchen verhält. Beim Doppelspalt Experiment ist es jedoch als Welle identifiziert worden. Daher können wir Licht nicht eindeutig einer der beiden SSpeziesßuordnen. **Licht ist Welle und Teilchen.**

Weitere Eigenschaften im Überblick:

- **Photonen Energie und Lichtintensität:**

$$E_{ph} = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \hbar\omega$$
$$I = \frac{N_{ph}}{At} h\nu$$

- **Photonen Impuls und Ruhemasse:**
  Der Photonen Impuls lässt sich aus dem Strahlungsdruck P_s einer elektromagnetischen Welle berechnen. Es gilt:

$$P_s = \frac{I}{c} = \frac{N_{ph}}{At}\frac{h\nu}{c} = \frac{N_{ph}}{At} p_{ph}$$

$$\rightarrow p_{ph} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} = \hbar k$$

$$p_{ph} = \frac{\omega_{ph}}{c} \rightarrow \omega_{ph} p_{ph} c = \omega_{ph}$$

  Vergleiche mit relativistischer Energie-Impulsbeziehung:

$$\omega_{ph}^2 = (m_{0,ph}c^2)^2 + p_{ph}^2 c^2 \stackrel{!}{=} p_{ph}^2 c^2$$
$$\rightarrow m_{0,ph} = 0$$

  Ein Photon besitzt also keine Ruhe Masse.

- **Eigendrehimpuls oder Spin eines Photons:**
  Der Photonen Spin ist unabhängig von Frequenz oder Wellenlänge.

$$|\vec{S_{ph}}| = \hbar$$

2 Strahlungsgesetze

2.1 Schwarzer Strahler

Jeder Körper absorbiert und reflektiert einen bestimmten Bruchteil der einfallenden Strahlung, abhängig von der Wellenlänge der Strahlung und abhängig von der Temperatur des Körpers. Für den Absorptionsgrad $\alpha(\nu, T)$ und den Reflexionsgrad $\rho(\nu, T)$ gilt aufgrund der Energieerhaltung:

$$\alpha(\nu, T) + \rho(\nu, T) = 1$$

Zusätzlich emittiert der Körper noch Strahlung abhängig von seiner Temperatur mit dem Emissionsgrad $\epsilon(\nu, T)$. Das Kirchhoffsche Strahlungsgesetz besagt,dass für einen Körper im thermodynamischen Gleichgewicht gilt:

$$\epsilon(\nu, T) = \alpha(\nu, T)$$

Ein schwarzer Strahler besitzt nun einen Absorptionskoeffizienten von 1. Das heißt er absorbiert jegliche Strahlung und reflektiert keine. Zudem es der Emissionsgrad auch 1. Der schwarze Strahler ist eine ideale thermische Strahlungsquelle.

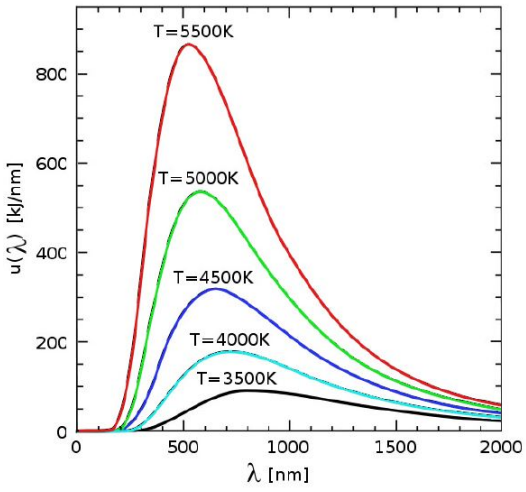

Abbildung 1: Spektrale Verteilung der Schwarzkörperstrahlung bei unterschiedlichen Temperaturen. $u(\lambda)$ ist die spektrale Energiedichte (Energie pro Wellenlänge und Volumen).

Diese Spektren betrachtet man unter anderem bei Sternen, welche näherungsweise schwarze Strahler sind.

2.2 Planckscher Strahlungsgesetz

Planck gelang es das empirisch gefundene Strahlungsspektrum durch eine analytische Funktion zu beschreiben.

$$u_\nu(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} \tag{1}$$

$u_\nu(\nu, T)$ ist die Energiedichte pro Frequenz. Um die abgestrahlte Energiedichte zu erhalten muss $u_\nu(\nu, T)$ über ein Frequenzintervall integriert werden.

$$u(T) = \int_{\nu_1}^{\nu_2} u_\nu(\nu, T) d\nu$$

Die abgestrahlte Intensität ist geben durch:

$$I(T) = \frac{1}{4} c u(T)$$

Bei der Umrechnung in die Wellenlängendarstellung muss der nicht-lineare Zusammenhang zwischen Frequenz und Wellenlänge beachtet werden.

$$u_\nu(\nu, T) d\nu = u_\lambda(\lambda, T) d\lambda$$

$$u_\lambda(\lambda, T) = u_\nu(\frac{c}{\lambda}, T) \left| \frac{d\nu}{d\lambda} \right| = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1} \tag{2}$$

2.3 Stefan-Boltzmann-Gesetz

Die gesamte abgestrahlte Leistung ergibt sich als das Integral der Planckschen Strahlungsdichte über alle Frequenzen $\nu \in [0.\infty]$. Um das Integral ausrechnen zu können, verwendet man folgende Substitution:

$$x = \frac{h\nu}{k_B T} \Rightarrow dx = \frac{h}{k_B T} d\nu$$

Für das Integral gilt folgende Identität

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}$$

So erhält man aus Gleichung () das Stefan-Boltzmann-Gesetz:

$$I(T) = \frac{2\pi {k_B}^4}{c^2 h^3} T^4 \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} = \frac{2\pi^5 {k_B}^4}{15 c^2 h^3} T^4$$

$$I(T) = \sigma T^4 \quad \text{mit } \sigma = \frac{2\pi^5 {k_B}^4}{15 c^2 h^3} = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2 K^4}} \tag{3}$$

2.4 Wiensches Verschiebungsgesetz

Wie in Abbildung (1) gezeigt, verschiebt sich das Maximum des Strahlungsspektrums mit steigender Temperatur zu höheren Wellenlängen. Der Zusammenhang zwischen Position des Maximums λ_{max} und der Temperatur T heißt Wiensches Verschiebungsgesetz:

$$\lambda_{max} = \frac{0.2898 \text{ cm K}}{T} \tag{4}$$

2.5 Wiensches Strahlungsgesetz

Das Wiensche Strahlungsgesetz ist eine Näherung des Planckschen Strahlungsgesetzes für hohe Frequenzen. Denn für **hohe Frequenzen** gilt:

$$e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1 \approx e^{\frac{h\nu}{k_B T}}$$

Eingesetzt in (1) erhält man das Wiensche Strahlungsgesetz:

$$u_\nu(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \nu^3 e^{-\frac{h\nu}{k_B T}} \tag{5}$$

2.6 Rayleigh-Jeans-Gesetz

Für **niedrige Frequenzen** kann mit der Näherung

$$e^{\frac{h\nu}{k_B T}} \approx 1 + \frac{h\nu}{k_B T}$$

das Rayleigh-Jeans-Gesetz hergeleitet werden:

$$u_\nu(\nu, T) = \frac{8\pi k_B T}{c^3} \nu^2 \tag{6}$$

Diese Gleichung entspricht der klassischen Lösung des schwarzen Strahlers, die vor er quantenmechanischen Interpretation von Planck postuliert wurde. Nur bis

Wellenlängen im Infraroten funktioniert die klassische Lösung genau.

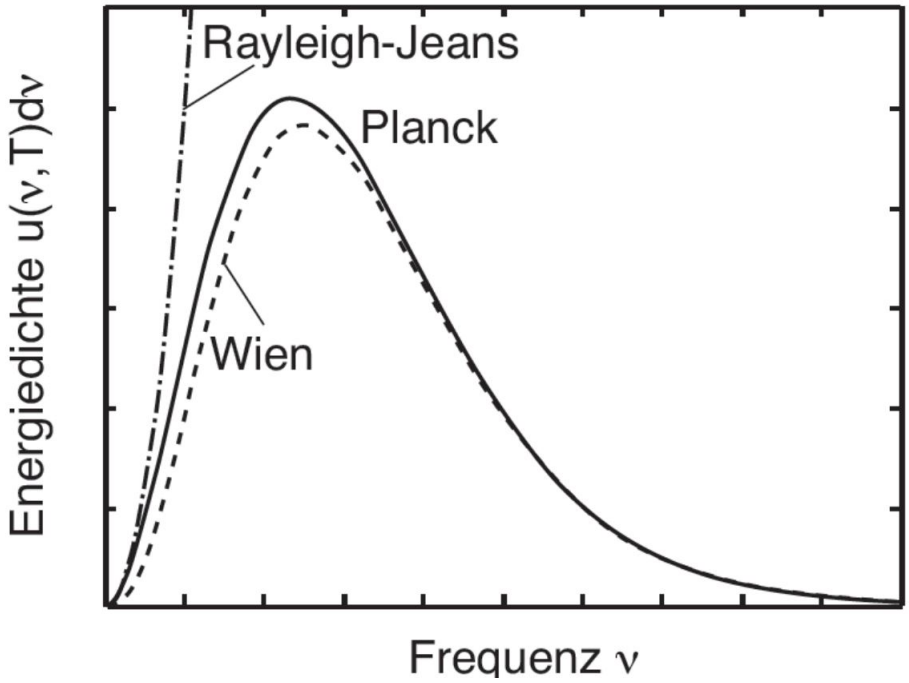

Abbildung 2: Vergleich der hoch- und niederfrequent Näherungen mit der Planckschen Strahlungsverteilung.

3 Laser

Ein Laser macht sich die Eigenschaften stimulierter Emission zu nutze, um monochromatisches und kohärentes Licht auszusenden.

3.1 2-Niveau-System

Ein 2-Niveau-System kann auf 3 verschiedene Arten mit Licht interagieren:

- **Absorption:**
  Trifft ein Photon mit Energie $E_\gamma = E_2 - E_1$ auf das System so kann die Photonenenergie absorbiert werden und ein Elektron vom unteren in den oberen Zustand gehoben werden.

- **Spontane Emission:**
  Befindet sich ein Elektron im angeregten Zustand wird nach einer Verweilzeit bzw. Lebensdauer τ ein Photon emittiert. Das Elektron fällt in den Grundzustand zurück und gibt so die Photonenenergie frei.

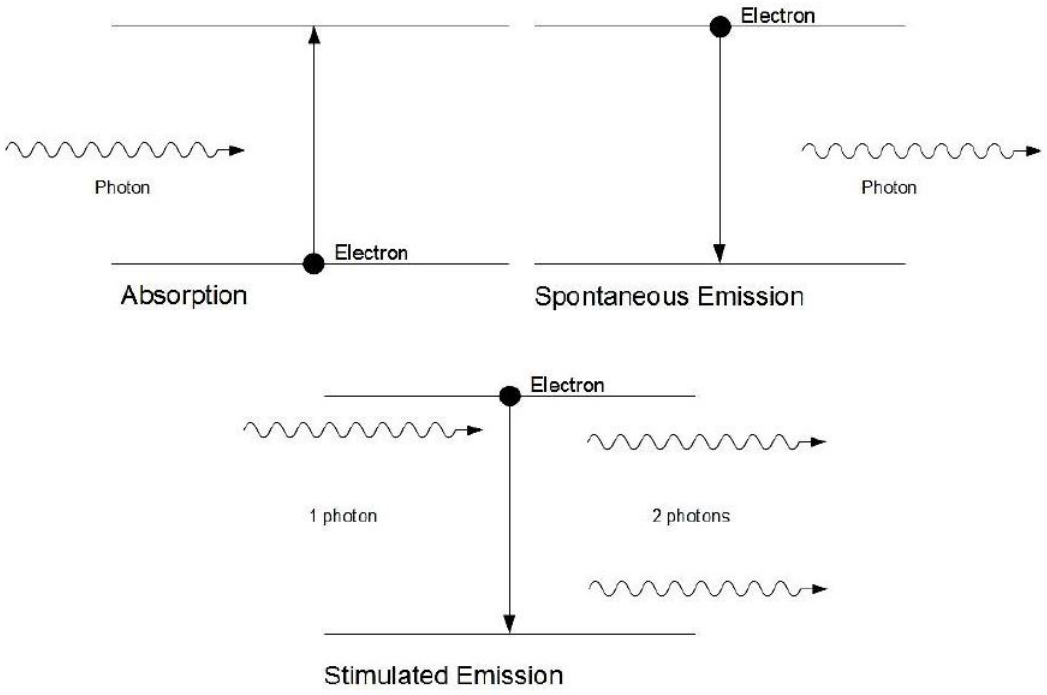

Abbildung 3: Die dominierenden Übergänge im 2-Niveau-System

- **Stimulierte Emission:** Anders als bei der spontanen Emission wird die stimulierte von einem zweiten Photon ausgelöst. Trifft ein Photon auf das System mit einem Elektron im angeregten Zustand so wird ein zweites Photon mit gleicher Energie, Phase, Richtung und Polarisation emittiert.

3.2 Funktionsweise eines Lasers

Um eine Photonenmultiplikation zu erhalten ist es notwendig mehr Elektronen im angeregten Zustand als im Grundzustand zu haben, weil Absorption und stimulierte Emission gleich wahrscheinlich sind. Ist dies der Fall kann der Prozess der stimulierten Emission durch Rückkopplung der Photonen in das System (z.B. halb durchlässiger Spiegel) wiederholt werden bis die gewünschte Lichtleistung vorhanden ist.
Eine Besetzungszahlinversion kann nicht durch ein 2-Niveau-System erreicht werden. Daher werden für Laser 3- oder 4-Niveau Systeme verwendet.
Hierbei wird ein Pumplaser verwendet um die Elektronen in das höchste Niveau zu befördern. Von dort aus relaxieren sie auf sehr kurzen Zeitskalen strahlungsfrei in den angeregten Zustand. Die Lebensdauer in diesem Zustand ist vergleichsweise groß und

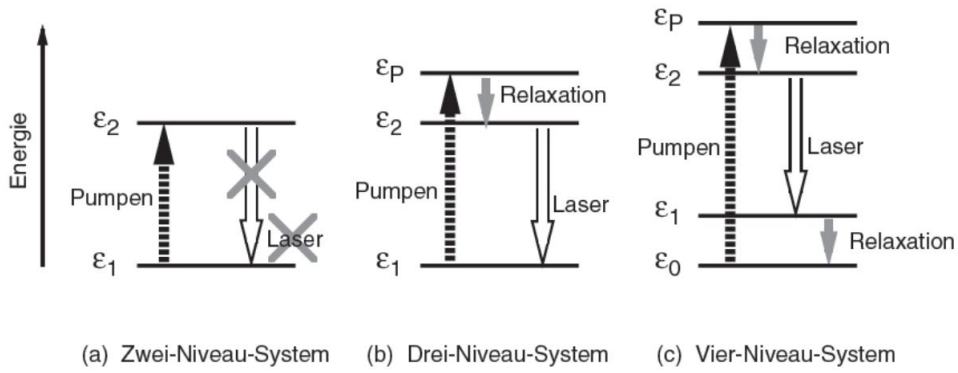

Abbildung 4: Energieniveaus verschiedener Lasertypen

so sammeln sich die Elektronen und wir erhalten die benötigte Besetzungsinversion. Die Energieniveaus eines 3- bzw. 4-Niveau-Lasers sind in Abbildung (4) verdeutlicht.

4 Comptonstreuung

Wir beobachten die Streuung von Photonen an freien Elektronen. Für hohe Photonenenergien (> 100keV) können auch gebundene Elektronen als frei genähert werden.

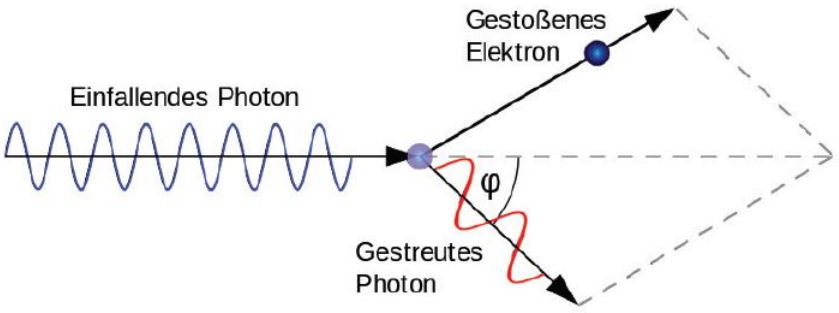

Abbildung 5: Comptonstreuung

Wir wollen E_γ die Energie des Photons nach der Streuung bestimmen. Es gelten Energie- und Impulserhaltung:

$$E_\gamma + E_e = E'_\gamma + E'_e \tag{7}$$

$$\vec{p}_\gamma + \vec{p}_e = \vec{p}'_\gamma + \vec{p}'_e \tag{8}$$

Bei solch großen Energien muss relativistisch gerechnet werden:

$$E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4 \tag{9}$$

Zur Vereinfachung wechseln wir ins Ruhesystem des Elektrons ($p_e = 0$). Wir setzen die relativistischen Energien des Elektrons in (7) ein.

$$E_\gamma + m_e^2c^4 = E'_\gamma + \sqrt{p_e'^2c^2 + m_e^2c^4} \tag{10}$$

Die Impulserhaltungs-Gleichung kann durch den Kosinusstz in in eine Skalare Gleichung überführt werden.

$$p_e^2 = (\vec{p}_\gamma^2 - \vec{p}_\gamma'^2) = p_\gamma^2 + p_\gamma'^2 - 2p_\gamma p'_\gamma \cos(\theta) \tag{11}$$

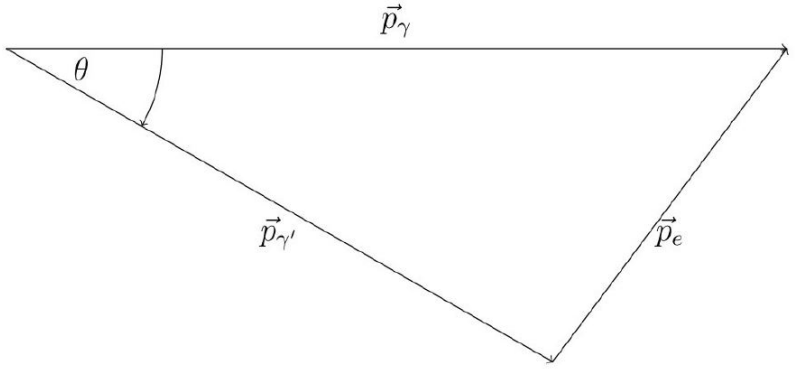

Abbildung 6: Impulsvektoren von Photon und Elektron

Dies wird nun in (10) eingesetzt und man erhält für E_γ:

$$E'_\gamma = E_\gamma \cdot \frac{m_e c^2}{m_e c^2 + E_\gamma(1 - \cos(\theta))} \tag{12}$$

Dieser Ausdruck kann umgeformt werden, um die Verschiebung in der Wellenlänge zu berechnen:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos(\theta)) = \lambda_c(1 - \cos(\theta))$$
$$\text{mit der Copmton-Wellenlänge } \lambda_c = \frac{h}{m_e c} \tag{13}$$

Der Impulsübertrag sowie der Energieübertrag werden maximal für $\theta = 180°$ (Rückwärtsstreuung).

5 Das Elektron

- **Größe:**
  Das Elektron ist ein punktförmiges Teilchen ohne Struktur

- **Spezifische Ladung:**
  Durch die Ablenkung eines Elektrons im Magnetfeld lässt sich die spezifische Ladung bestimmen. Im Magnetfeld gilt:

  $$\frac{m_e v^2}{r} = evB$$

  Mit dem Bahnradius r, Magnetfeld B, und Geschwindigkeit v. Die Beschleunigung des Elektrons erfolgt mit Hilfe einer Spannung daher gilt $v = \sqrt{\frac{2eU}{m_e}}$. Damit lässt sich eine Gleichung für die spezifische Ladung finden:

  $$\frac{e}{m_e} = \frac{2U}{r^2 B^2} = 1{,}758 \cdot 10^{-11} \frac{\text{C}}{\text{kg}} \tag{14}$$

- **Elektron als Teilchen und Welle:** Ähnlich wie das Licht auch Teilchen ist, ist zeigt das Elektron auch Welleneigenschaften. De Broglie hat den Impuls und die Wellenlänge von Teilchen verknüpft.

  $$p = \frac{h}{\lambda} \tag{15}$$

6 Materiewellen

6.1 Wellenpakete

Analog zu Licht können auch Materiewellen mit ebenen Wellen der Form

$$\psi(\mathbf{r},t) = \psi_0 \exp[i(\mathbf{kr} - \omega t)] = \psi_0 \exp\left[\frac{i}{\hbar}(\mathbf{pr} - Et)\right] \tag{16}$$

beschrieben werden. Diese Darstellung kann jedoch nicht normiert werden, da die Welle unendlich ausgedehnt ist. Die Teilchen sind nicht lokalisiert. Daher führen wir ein Wellenpaket bestehend aus der Überlagerung mehrerer ebenen Wellen ein.

$$\psi(x,t) = \int_{k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} c(k)\psi_0 \exp[i(kx - \omega(k)t)]dk \tag{17}$$

Mit Lösung der Form

$$\psi(x,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} a(k_0) exp[i(k_0 x - wt)] \frac{\sin(\Delta k(\omega_0 t - x))}{\omega_0 t - x} \tag{18}$$

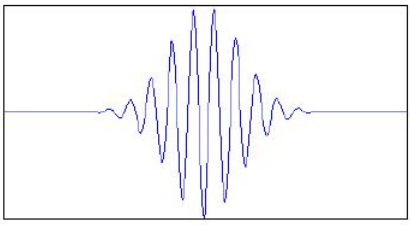

Abbildung 7: Darstellung eines Wellenpakets; Überlagerung ebener Wellen

Das Maximum bewegt sich mit der Gruppengeschwindigkeit v_g

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{dE}{dp} \tag{19}$$

Die Gruppengeschwindigkeit ist identisch mit der Geschwindigkeit der Teilchen. Die Ausdehnung des Wellenpakets berechnet sich zu

$$\Delta x = \frac{2\pi}{\Delta k}$$

6.2 Wahrscheinlichkeitsdarstellung

Das Betragsquadrat der Wellenfunktion eines Teilchens kann als Wahrscheinlichkeit aufgefasst werden das Teilchen vorzufinden. Im Speziellen gilt:

$|\psi(x,y,z,t)|^2 dxdydz$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Elektron im Volumenelement $dV(dxdydz)$ am Ort x,y,z angetroffen wird.

Dies bezeichnet man auch als statistische Deutung der Quantenmechanik. Normierung der Wellenfunktion $\int |\psi(x,y,z,t)|^2 dxdydz = 1$ Gesamtwahrscheinlichkeit Teilchen anzutreffen identisch 1.

6.3 Heisenbergsche Unschärferelation

Die Heisenbergsche Unschärferelation besagt, dass die Eigenschaften Impuls und Ort, sowie Energie und Zeit (z.B. Lebensdauer eines Zustands) nicht gleichzeitig exakt bestimmt werden können. Dies folgt direkt aus den Eigenschaften eines Wellenpakets.

Ort-Impuls-Unschärfe $\Delta x \Delta p > h$
Energie-Zeit-Unschärfe $\Delta E \Delta t > h$

Direkte Konsequenz aus der Unschärferelation ist zum Beispiel die Nullpunktenergie eines Harmonischen Oszillators.

7 Optisches Spektrum des Wasserstoffs

7.1 Serien des Wasserstoffs

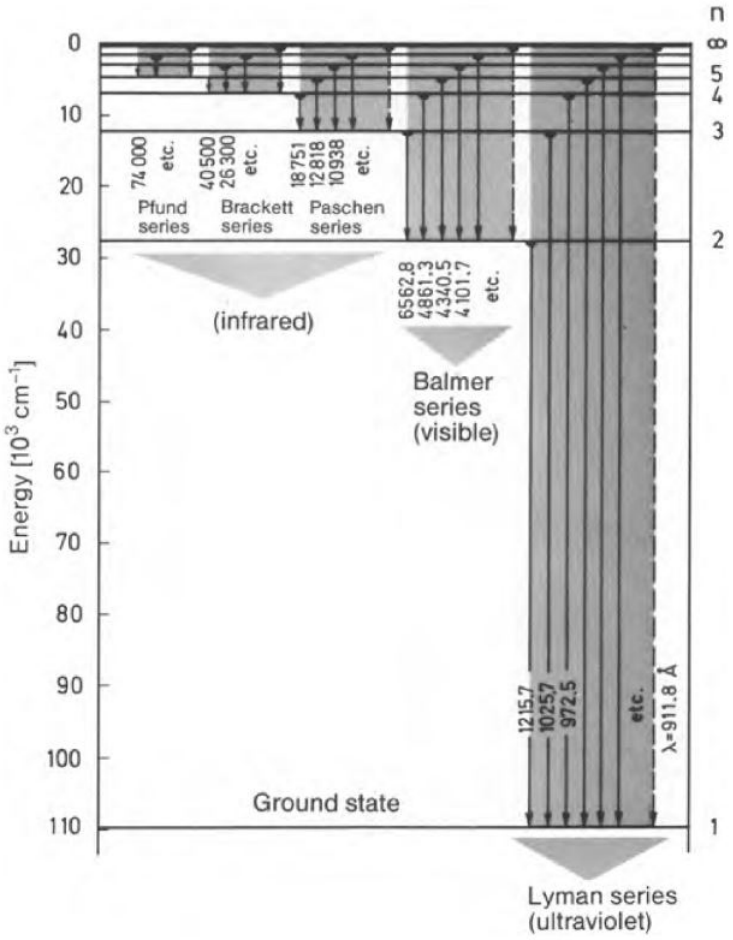

Abbildung 8: Serien des Wasserstoffs

Optische Übergänge im Wasserstoffatom werden in Serien aufgeteilt. Die Serien unterscheiden sich jeweils durch das Energieniveau, auf das das Elektron fällt. Die Balmer Serie ist die einzige im sichtbaren Bereich des Lichts und wurde daher als erste entdeckt. Alle weiteren Serien können Abbildung (8) entnommen werden. Für die Energie $E_{n,n'}$ bzw. die Wellenzahl $\bar{\nu}$ eines Übergangs gilt:

$$E_{n,n'} = 13,6\text{eV}\left(\frac{1}{n'} - \frac{1}{n}\right) \tag{20}$$

$$\bar{\nu} = \frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{n'} - \frac{1}{n}\right) \text{ mit } R_H = 109677,5810\ \text{cm}^{-1} \tag{21}$$

7.2 Die Bohr'schen Postulate

- Klassische Bewegungsgleichung sollen für Elektronen im Atom gelten, allerdings **nur diskrete** Bahnen mit Energien E_n sind erlaubt
- Die Bewegung auf Bahnen erfolgt **strahlungslos**. Elektron kann von einer Bahn auf die andere Wechseln unter Emission/Absorption von Strahlung mit Energie $E_n - E_{n'} = h\nu$
- Der Bahndrehimpuls eines Elektrons ist immer ein Vielfachs des Planschen Wirkungsquantums
- Berechnung der Rydberg-Konstante aus atomaren Größen unter der Annahme, dass Frequenz der emittierten Strahlung identisch mit der Umlauffrequenz ist.

$$R_{H,Bohr} = \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0 h^3 c} \approx R_H$$

Aus Bohrs-Postulaten konnten für die Niveau-Energien E_n und deren Bahnradien gezogen werden.

$$E_n = -\frac{Z^2 e^4 m_e}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2} \tag{22}$$

$$r_n = \frac{n^2 \hbar^2 4\pi\epsilon_0}{Z e^2 m_e} = a_B \cdot \frac{n^2}{Z} \tag{23}$$

Mit Kernladungszahl Z, Elektronen Masse m_0 und Bohrradius $a_B = 5,29$ nm.

7.3 Verallgemeinerung für Wasserstoffähnliche Atome

Diese Formel lassen sich für wasserstoffähnliche Atome erweitern.
Bisher haben wir die Kernbewegung vernachlässigt. Allgemein wird bei Berücksichtigung der Kernbewegung das Massenzentrum verschoben und daher muss mit der reduzierten Masse μ gerechnet werden.

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Es gibt auch Atome, die statt Elektronen Myonen besitzen. Das Myon hat neben der Masse ($m_\mu = 207 m_e$) die gleichen Eigenschaften wie ein Elektron.
Allgemein gilt für Energie und Radius:

$$m_e \to m'(\mu, m_\mu, ...) \quad E_n \to E_n \frac{m'}{m_e} \text{ und } r_n \to r_n \frac{m_e}{m'} \tag{24}$$

7.4 Quantensprünge durch Elektron-Stoßanregung

Im Gegensatz zu Photonen können Elektronen ihre Energie in mehreren Portionen abgeben. So kann ein Elektron beim Stoß mit einem Atom einen Teil seiner kinetischen Energie abgeben um ein Elektron auf ein höheres Energieniveau zu heben. Jedoch gilt auch hier, dass die Energie nicht von zwei Elektronen aufgebracht werden kann. So kann kein Elektron angehoben werden, wenn die freien Elektronen eine kleiner kinetische Energie als die Übergangsenergie besitzen. (vgl Frank-Hertz-Versuch)

7.5 Sommerfeld'sche Erweiterung des Bohrschen Atommodells

Sommerfeld beobachtete, dass bei hoher Auflösung die Linien einer Serie nicht Linien, sondern bestehen aus mehreren Komponenten. Sommerfeld führte dies auf verschiedene Drehimpulse der entarteten Bahnen zurück. Daher führte er eine neue Quantenzahl l für den Drehimpuls ein. Es gilt:

$$|\vec{l}| = \sqrt{l(l+1)}\hbar \text{ mit } l = 0, 1, 2, ..., n-1 \tag{25}$$

Nach Sommerfeld führt dies zur Aufhebung der Energieentartung:

$$E_{n,k} = -R_H hc \frac{Z^2}{n^2} \left[1 + \frac{\alpha^2 Z^2}{n^2} \left(\frac{n}{l} - \frac{3}{4}\right) + \text{höhere Terme}\right] \qquad \alpha = \frac{e^2}{2\epsilon_0 hc} = \frac{1}{137} \tag{26}$$

8 Grundlagen der Quantenmechanik

Die Quantenmechanik stützt sich im wesentlichen auf die Lösung der Schrödingergleichung für bestimmte Systeme. Die zeitabhängige Schrödingergleichung hat die folgende Form:

$$H\psi(\mathbf{r},t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{r},t) \tag{27}$$

$$\text{mit Hamiltonoperator } H = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\mathbf{r})\right)$$

Wenn $V(\mathbf{r})$ nicht von der Zeit abhängt vereinfacht sich die Schrödingergleichung zu stationären Form.

$$H\psi(\mathbf{r},t) = E\psi(\mathbf{r},t) \tag{28}$$

$$\text{mit Zeitentwicklung } \psi(\mathbf{r},t) = e^{-\frac{E}{\hbar}t}\psi(\mathbf{r})$$