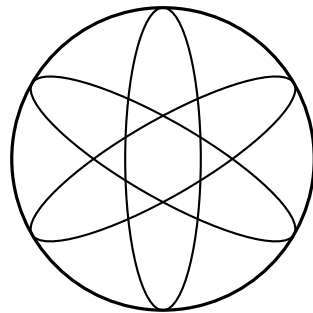


# Ferienkurs Analysis 3 für Physiker



Übung: Integration im  $\mathbb{R}^n$

Autor: Benjamin R uth, Maximilian Jokel  
Stand: 7. März 2016

---

**Aufgabe 1** (Schraubenfläche) Man berechne den Flächeninhalt der Schraubenfläche

$$\phi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ \varphi \end{pmatrix}, \quad r \in [0, 1], \varphi \in [0, 2\pi].$$

**Aufgabe 2** (Schnitt zweier Zylinder) Man berechne den Flächeninhalt der Oberfläche des Schnitts der beiden Zylinder  $x^2 + z^2 \leq a^2$  und  $y^2 + z^2 \leq a^2$ . Fertige eine Skizze an und nutze die Symmetrie des Problems aus!

**Aufgabe 3** (Integral) Seien  $D$  das Dreieck mit den Ecken  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  und  $(1, 1)$  sowie  $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}$  mit  $a > 0$ . Man berechne:

**3.1**  $\iint_D e^{-x^2} dx dy$

**3.2**  $\iint_K e^{-x^2-y^2} dx dy$

**Aufgabe 4** (Integral) Gegeben ist das Doppelintegral

$$\int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 f(x, y) dy dx$$

**4.1** Skizzieren Sie das Integrationsgebiet.

**4.2** Geben Sie das Doppelintegral mit vertauschter Integrationsreihenfolge an.

**4.3** Berechnen Sie das Integral für  $f(x, y) = 2x \sin x^2$ .

**Aufgabe 5** (Doppelintegral, Klausuraufgabe 15/16) Bestimmen Sie

$$\int_{0 < y < x} e^{-x} d(x, y).$$

**Aufgabe 6** (Integral) Seien  $D$  das Dreieck mit den Ecken  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  und  $(1, 1)$  sowie  $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}$  mit  $a > 0$ . Man berechne:

**6.1**  $\iint_D xy dx dy$

---

6.2  $\iint_K \frac{dx dy}{1 + x^2 + y^2}$

6.3  $\iint_D \frac{2y}{x+1} dx dy$

6.4  $\iint_K \sin(x^2 + y^2) dx dy$

**Aufgabe 7** (Transformationsformel) Zu bestimmen ist das Bereichsintegral

$$\int_D \arctan \frac{x-y}{x+y} dx dy, \quad \text{wobei } D = \{(x, y)^\top \mid x^2 + y^2 \leq 2\}.$$

7.1 Führen Sie die Koordinatentransformation

$$x = s(\cos t + \sin t), \quad y = s(\cos t - \sin t) \quad \text{mit } s \in [0, \infty[, \quad t \in [0, 2\pi[$$

im gegebenen Integral durch und geben Sie das Bereichsintegral in den neuen Koordinaten an.

7.2 Berechnen Sie das Bereichsintegral.

**Aufgabe 8** (Transformationsformel) Man berechne das Bereichsintegral

$$\int_D e^{(x+y)/(x-y)} dx dy,$$

wobei  $D$  der trapezförmige Bereich mit den Eckpunkten  $(1, 0)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(0, -2)$  und  $(0, -1)$  sei.

*Hinweis:* Man führe die Koordinatentransformation  $s = x + y$ ,  $t = x - y$  durch.

**Aufgabe 9** (Transformationsformel) Es seien  $R$  und  $\alpha$  positiv. Die kreisförmige Platte  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$  eines Kondensators werde durch Elektronen aufgeladen, welche sich gemäß der Flächenladungsdichte  $\varrho(x, y) = -\alpha(R^2 - x^2 - y^2)$  auf  $B$  verteilen.

9.1 Berechnen Sie die Gesamtladung  $Q = \iint_B \varrho dF$  der Platte direkt.

9.2 Benutzen Sie Polarkoordinaten, um die Rechnung zu vereinfachen.

**Aufgabe 10** (Transformationsformel) Bestimmen Sie den Schwerpunkt der Nordhalbkugel  $D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \text{ mit } z \geq 0\}$  mit der Dichte  $\rho(x, y, z) = z$ .

---

**Aufgabe 11** (Transformationsformel) Man betrachte den Kegel  $K$  im  $\mathbb{R}^3$  mit der Spitze  $(0, 0, 3)^\top$  und der Grundfläche  $x^2 + y^2 \leq 1$  in der Ebene  $z = 0$ . Die (inhomogene) Massendichte  $\rho$  von  $K$  sei gegeben durch  $\rho(x, y, z) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ .

**11.1** Veranschaulichen Sie sich die Situation durch eine geeignete Skizze des Kegels.

**11.2** Bestimmen Sie mithilfe von Zylinderkoordinaten das Volumen  $V$  und die Gesamtmasse  $M$  von  $K$ .

Zur Kontrolle:  $V(K) = \pi$ ,  $M(K) = \frac{\pi}{2}$ .

**11.3** Bestimmen Sie den Massenschwerpunkt des Kegels.

Zur Kontrolle:  $(x_s, y_s, z_s)^T = (0, 0, \frac{9}{10})^T$ .

**Aufgabe 12** (Gramsche Determinante) Eine Parkhausauffahrt  $P$  habe die Gestalt eines Wendelflächenstücks:

$$P = \{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid (x_1, x_2, x_3)^T = (u_2 \cos u_1, u_2 \sin u_1, u_1)^T, 0 \leq u_1 \leq 2\pi, 5 \leq u_2 \leq 9\}.$$

Berechnen Sie den Flächeninhalt  $F$  von  $P$  und vergleichen Sie ihn mit dem Flächeninhalt  $F$  des Kreisrings  $R$ , der den Grundriss von  $P$  bestimmt. (Hinweis: Eine Stammfunktion von  $\sqrt{1+x^2}$  lautet  $\frac{1}{2}(x\sqrt{1+x^2} + \ln(x + \sqrt{1+x^2}))$ ).

**Aufgabe 13** (Volumen, Klausuraufgabe WS 15/16) Berechnen Sie das Volumen der Menge

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 \leq e^{y^2+z^2}, y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

**Aufgabe 14** (Volumen, Klausuraufgabe WS 13/14) Berechnen Sie das Volumen der Menge

$$S = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \geq x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq 0\}$$