

Ferienkurs Quantenmechanik - Aufgaben

Sommersemester 2015

Fabian Jerzembeck und Sebastian Steinbeisser

Fakultät für Physik

Technische Universität München

18. September 2015

Zeitabhängige Schrödingergleichung und der harmonische Oszillator

1 Zeitentwicklung im Schrödinger- und Heisenberg-Bild

Aufgabe 1 (*)

Betrachten Sie die kräftefreie, eindimensionale Bewegung eines Teilchens der Masse m :

$$H = \frac{1}{2m}p^2$$

1. Lösen Sie die Bewegungsgleichung für den Operator $x_H(t)$ und den Impulsoperator $p_H(t)$ im Heisenberg-Bild.
2. Berechnen Sie die Kommutatoren:

$$[x_H(t_1), x_H(t_2)]; \quad [p_H(t_1), p_H(t_2)]; \quad [x_H(t_1), p_H(t_2)];$$

Lösung:

Es gilt

$$H = \frac{1}{2m}p^2; \quad \frac{\partial H}{\partial t} = 0; \quad \Rightarrow H_H = e^{\frac{i}{\hbar}E(t-t_0)} H e^{-\frac{i}{\hbar}E(t-t_0)} = H$$

da der Hamilton-Operator nicht explizit von der Zeit abhängt.

1) Bewegungsgleichung

$$i\hbar\dot{x}(t) = [x_H(t), H_H] = e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}[x, H]e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}$$

$$[x, H] = \frac{1}{2m}[x, p^2] = \frac{1}{2m}(p[x, p] + [x, p]p) = \frac{i\hbar}{m}p$$

$$\Rightarrow \dot{x}_H(t) = \frac{1}{m}p_H(t),$$

$$i\hbar\dot{p}_H(t) = [p_H(t), H_H] = 0$$

$\Rightarrow p_H(t) = \text{const} = p(0) = p$ Konstante der Bewegung

$$\Rightarrow x_H(t) = x_H(0) + \frac{1}{m}pt = x + \frac{p}{m}t$$

2) Kommutatoren

$$[x_H(t_1), x_H(t_2)] = [x + \frac{p}{m}t_1, x + \frac{p}{m}t_2] = [x, x] + \frac{1}{m^2}t_1t_2[p, p] + \frac{t_1}{m}[p, x] + \frac{t_2}{m}[x, p] = \frac{i\hbar}{m}(t_2 - t_1)$$

$$[p_H(t_1), p_H(t_2)] = [p, p] = 0$$

$$[x_H(t_1), p_H(t_2)] = [x + \frac{p}{m}t_1, p] = [x, p] + \frac{t_1}{m}[p, p] = i\hbar$$

Aufgabe 2 (**)

Bei $t = 0$ sei ein Wellenpaket

$$\Psi(x, 0) = C e^{ik_0x} e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$$

gegeben.

1. Berechnen Sie unter Verwendung des Zeitentwicklungsoperators

$$U(x, x', t) = \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar it}} e^{\frac{im(x-x')^2}{2\hbar t}}$$

die zeitliche Entwicklung des Wellenpaketes $\Psi(x, t)$ für $t \geq 0$.

2. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\rho(x, t) = \Psi^*(x, t)\Psi(x, t)$$

Wie verändert sich $\langle x \rangle$, Δx , Δp und $\Delta x \cdot \Delta p$ mit der Zeit?

Hinweis: $\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp[-(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)] = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \exp\left[\frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha}\right]$

Lösung:

(1) Mit dem Propagator $U(x, x', t)$ erhält man

$$\begin{aligned}\Psi(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx' U(x, x', t) \Psi(x', 0) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx' U(x, x', t) C \exp(ik_0 x') \exp\left(-\frac{x'^2}{2a^2}\right) \\ &= C \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar it}} \exp\left(\frac{imx^2}{2\hbar t}\right) \int_{-\infty}^{\infty} dx' \exp\left[x'^2\left(\frac{im}{2\hbar t} - \frac{1}{2a^2}\right) + ix'\left(k_0 - \frac{mx}{\hbar t}\right)\right]\end{aligned}$$

Verwendet man nun

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp[-(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)] = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \exp\left[\frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha}\right]$$

für

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{2a^2} - \frac{im}{2\hbar t} \\ \beta &= \frac{imx}{\hbar t} - ik_0 \\ \gamma &= 0\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\Psi(x, t) = \frac{C}{\sqrt{1 + i\frac{\hbar t}{ma^2}}} \exp\left[-\frac{x^2 - 2a^2 ik_0 x + i\frac{\hbar a^2 k_0^2 t}{m}}{2a^2\left(1 + i\frac{\hbar t}{ma^2}\right)}\right]$$

(2) Die Wahrscheinlichkeitsdichte ist gegeben durch

$$\rho(x, t) = \Psi^*(x, t)\Psi(x, t) = \frac{|C|^2}{\sqrt{1 + \left(\frac{\hbar t}{ma^2}\right)^2}} \exp\left[-\frac{\left(x - \frac{\hbar k_0 t}{m}\right)^2}{a^2\left(1 + \frac{\hbar t}{ma^2}\right)^2}\right]$$

Da die Normierung erhalten bleibt, folgt

$$\Delta x = \frac{a}{\sqrt{2}} \left[1 + \left(\frac{\hbar t}{ma^2}\right)^2\right]^{1/2}$$

Für $t = 0$ gilt

$$\Delta p(0) = \hbar \frac{1}{\sqrt{2}a}$$

Δp ist für ein freies Wellenpaket zeitlich konstant und somit gilt

$$\Delta p(t) = \Delta p(0)$$

Zur Begründung: Δp ist die Breite der Impulsverteilung $\rho(k, t) = \Psi^*(k, t)\Psi(k, t)$. Es gilt dabei

$$\Psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} \phi(k) e^{i(kx - \omega(k)t)}$$

eines freien Wellenpaketes. Damit gilt

$$\Psi(k, t) = \phi(k) e^{-i\omega(k)t} \Rightarrow \rho(k, t) = |\phi(k)|^2 = \mathbf{konstant}$$

Damit ist auch die Breite konstant.

Die Unschärfe Relation ist gegeben durch

$$\Delta x \cdot \Delta p = \frac{\hbar}{2} \left[1 + \left(\frac{\hbar t}{ma^2} \right)^2 \right]^{1/2}$$

Weiterhin erhält man

$$\langle x \rangle = \frac{\hbar k_0}{m} t \quad \left(\Rightarrow \langle \dot{x} \rangle = \frac{\hbar k_0}{m} \right)$$

Aufgabe 3 (*)

Der lineare harmonische Oszillator wird beschrieben durch den Hamilton-Operator:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2$$

Zeigen Sie, dass Impulsoperatoren p und Ortsoperatoren q im Heisenberg-Bild die folgenden Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} q_H(t) + \omega^2 q_H(t) &= 0 \\ \frac{d}{dt} p_H(t) + \omega^2 p_H(t) &= 0 \end{aligned}$$

Lösung:

1. Die Bewegungsgleichung für nicht explizit zeitabhängige Observablen ist:

$$i\hbar \frac{d}{dt} q_H(t) = [q_H(t), H_H] = e^{\frac{i}{\hbar} H t} [q, H] e^{-\frac{i}{\hbar} H t}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow H_H = H$$

$$[q, H] = \frac{1}{2m} [q, p^2] = \frac{1}{2m} \left([q, p]p + p[q, p] \right) = \frac{i\hbar}{m} p$$

Zwischenergebnis

$$\frac{d}{dt} q_H(t) = \frac{1}{m} p_H(t)$$

2.

$$i\hbar \frac{d}{dt} p_H(t) = [p_H(t), H] = e^{\frac{i}{\hbar} H t} [p, H] e^{-\frac{i}{\hbar} H t}$$

$$[p, H] = \frac{1}{2} m \omega^2 [p, q^2] = \frac{1}{2} m^2 \left(q [p, q] + [p, q] q \right) = -i\hbar m \omega^2 q$$

Zwischenergebnis:

$$\frac{d}{dt} p_H(t) = -m \omega^2 q_H(t)$$

3. Kombination der beiden Zwischenergebnisse:

$$\frac{d}{dt^2} q_H(t) = \frac{1}{m} \frac{d}{dt} p_H(t) = -\omega^2 q_H(t)$$

$$\frac{d}{dt^2} p_H(t) = -m \omega^2 \frac{d}{dt} q_H(t)$$

2 Ehrenfest Theorem

Aufgabe 4 ()** Wir betrachten ein Teilchen in einem zeitlich konstanten Potential $V(\vec{r})$. Der Hamiltonoperator für dieses Teilchen ist dementsprechend $\hat{H} = \hat{p}^2/2m + V(\vec{r})$. Wenden Sie das Ehrenfesttheorem auf den Ortsoperator \hat{r} und Impulsoperator \hat{p} an. Kommt Ihnen etwas aus der klassischen Mechanik bekannt vor? Definieren Sie hierzu im zweiten Fall geschickt eine Kraft. Kombinieren Sie schließlich beide Resultate.

Lösung:

Zunächst setzen wir für den allgemein betrachteten Operator \hat{A} den Ortsoperator \hat{r} des Systems. Der Ortsoperator ist offenbar explizit zeitunabhängig, so dass dessen partielle Zeitableitung verschwindet. Weiterhin ist bekannt, dass der Kommutator des

Impulsoperators \hat{p} mit den Ortsoperator \hat{r} gerade $[\hat{p}, \hat{r}] = -i\hbar$ ist. Ferner kommutiert das Potential $V(\hat{r})$ mit \hat{r} , da es nur vom Ortsoperator abhängt. Daher ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \hat{r} \rangle &= \frac{i}{\hbar} \langle [\hat{H}, \hat{r}] \rangle + \left\langle \frac{\partial \hat{r}}{\partial t} \right\rangle \\ &= \frac{i}{\hbar} \left\langle \left[\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{r}), \hat{r} \right] \right\rangle \\ &= \frac{i}{2m\hbar} \langle \hat{p}[\hat{p}, \hat{x}] + [\hat{p}, \hat{x}]\hat{p} \rangle = \frac{\langle \hat{p} \rangle}{m} \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist analog der klassischen Definition des Impulses. Darüber hinaus kann man die gleiche Rechnung für $\hat{A} = \hat{p}$ durchführen. Auch der Impulsoperator ist explizit zeitunabhängig, so dass die partielle Zeitableitung verschwindet. Zu berechnen bleibt daher noch der Kommutator des Hamiltonoperators und des Impulsoperators.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \hat{p} \rangle &= \frac{i}{\hbar} \langle [\hat{H}, \hat{p}] \rangle + \left\langle \frac{\partial \hat{p}}{\partial t} \right\rangle \\ &= \frac{i}{\hbar} \left\langle \left[\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{r}), \hat{p} \right] \right\rangle \end{aligned}$$

Offenbar kommutiert der Impulsoperator mit sich selbst. Es bleibt also der Kommutator des Potentials $V(\hat{r})$ und des Impulsoperators \hat{p} zu bestimmen. Dazu schreibt man den Impulsoperator in der Form $\hat{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$ und erhält

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \hat{p} \rangle &= \dots = \frac{i}{\hbar} \left\langle \left[V(\hat{r}), \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} \right] \right\rangle \\ &= \left\langle \left[V(\hat{r}), \vec{\nabla} \right] \right\rangle = - \left\langle \vec{\nabla} V(\hat{r}) \right\rangle = \left\langle \vec{F}(\hat{r}) \right\rangle \end{aligned}$$

Hierbei wurde ausgenutzt, dass ein Operator wie der Kommutator stets auf eine Funktion wirken muss. Nach dieser Rechnung sehen wir, dass auch dieser Fall in einer klassischen Gleichung resultiert. Kombination beider Resultate führt zu

$$m \cdot \frac{d^2}{dt^2} \langle \hat{r} \rangle = m \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\langle \hat{p} \rangle}{m} \right) = \left\langle \vec{F}(\hat{r}) \right\rangle,$$

was genau der *Newtonschen* Bewegungsgleichung entspricht.

Anhand des Beispiels haben wir gesehen, dass die Erwartungswerte einer klassischen Bewegungsgleichung genügen. Beachtet werden muss allerdings, dass die Mittelwerte $\langle \hat{r} \rangle$ und $\langle \hat{p} \rangle$ *nicht* notwendigerweise die klassischen Trajektorien erfüllen müssen. Dazu müsste $\left\langle \vec{F}(\hat{r}) \right\rangle = \vec{F}(\langle \hat{r} \rangle)$ gelten.

3 Kontinuitätsgleichung

Aufgabe 5 (*)

Ein Teilchen der Masse m werde durch die folgende Wellenfunktion beschrieben

$$\Psi(r, t) = A \cdot r \exp\left(-\frac{r}{2a} + i\frac{\hbar}{8ma^2} \cdot t + i\phi\right) \sin\theta$$

1. Berechnen Sie die reelle Normierungskonstante A .
2. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsstromdichte $j(r, t)$.
3. Geben Sie die Energieeigenwerte E an.

Hinweis: $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}\right)$

Die Gammafunktion $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt = x!$.

Lösung:

1. Berechnen Sie die reelle Normierungskonstante A .

$$|\Psi(r, t)|^2 = A^2 \cdot r^2 e^{-r/a} \sin^2 \theta$$

Normierungsbedingung

$$\begin{aligned} 1 &= \int d^3r |\Psi(r, t)|^2 = 2\pi A^2 \int_0^\infty r^4 e^{-r/a} \underbrace{\int_{-1}^{+1} d \cos \theta (1 - \cos^2 \theta)}_{2-2/3=4/3} \\ &= \frac{8\pi}{3} A^2 a^5 \int_0^\infty dx x^4 e^{-x} = 64\pi A^2 a^5 A = \frac{1}{8\sqrt{\pi a^5}} \end{aligned}$$

2. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsstromdichte $j(r, t)$.

Die Wahrscheinlichkeitsstromdichte ist

$$j(r, t) = \frac{\hbar}{2mi} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) = \frac{\hbar}{m} \Im \left(\Psi^*(\vec{r}, t) \nabla \Psi(\vec{r}, t) \right)$$

in Kugelkoordinaten

$$\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}\right) \rightarrow j_r = \frac{\hbar}{m} \underbrace{\Im \left(A^2 \sin^2 \theta \left(r e^{-\frac{r}{2a}} \frac{\partial}{\partial r} r e^{-\frac{r}{2a}} \right) \right)}_{\text{reell}} = 0$$

analog: $j_\theta = 0$

$$j_\phi(\vec{r}, t) = \frac{\hbar}{m} A^2 r^2 \sin^2 \theta e^{-r/a} \Im \left(e^{-i\phi} \frac{1}{\partial r \sin \theta} \frac{1}{\partial \phi} e^{i\phi} \right) = \frac{\hbar}{m} A^2 r \sin \theta e^{-r/a}$$

3. Geben Sie die Energieeigenwerte E an. Die zeitabhängige Schrödingergleichung lautet

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) = E \Psi(\vec{r}, t) \rightarrow E = -\frac{\hbar^2}{8ma^2}$$

4 Matrixdarstellung

Aufgabe 6 (*)

In einem dreidimensionalen Hilbertraum sind folgende Vektorzustände gegeben:

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &= i|1\rangle - 2|2\rangle - i|3\rangle \\ |\beta\rangle &= i|1\rangle + 2|3\rangle \end{aligned}$$

Hierbei sind $|1\rangle$, $|2\rangle$ und $|3\rangle$ die orthonormierten Basiszustände.

1. Berechnen Sie die Skalarprodukte $\langle\alpha|\beta\rangle$ und $\langle\beta|\alpha\rangle$ explizit und zeigen Sie, dass $\langle\beta|\alpha\rangle = \langle\alpha|\beta\rangle^*$.
2. Finden Sie alle Matrixelemente von $\hat{A} = |\alpha\rangle\langle\beta|$ und geben Sie die Matrixdarstellung von \hat{A} an.
3. Ist der Operator \hat{A} hermitesch? Begründung?

Lösung:

1. Zu beachten ist die komplexe Konjugation für das erste Argument.

$$\langle\alpha|\beta\rangle = -ii\langle 1|1\rangle - 2i\langle 1|3\rangle - 2i\langle 2|1\rangle - 4\langle 2|3\rangle + ii\langle 3|1\rangle + 2i\langle 3|3\rangle = 1 + 2i$$

$$\langle\beta|\alpha\rangle = -ii\langle 1|1\rangle + 2i\langle 1|2\rangle + ii\langle 1|3\rangle + 2i\langle 3|1\rangle - 4\langle 3|2\rangle - 2i\langle 3|3\rangle = 1 - 2i$$

$$\langle\alpha|\beta\rangle^* = (1 + 2i)^* = 1 - 2i = \langle\beta|\alpha\rangle$$

2. Durch Anwendung von \hat{A} auf die Basiszustände folgt:

$$\hat{A}|1\rangle = |\alpha\rangle\langle\beta|1\rangle = -i|\alpha\rangle = |1\rangle + 2i|2\rangle - |3\rangle$$

$$\hat{A}|2\rangle = |\alpha\rangle\langle\beta|2\rangle = 0$$

$$\hat{A}|3\rangle = |\alpha\rangle\langle\beta|3\rangle = 2|\alpha\rangle = 2i|1\rangle - 4|2\rangle - 2i|3\rangle$$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2i \\ 2i & 0 & -4 \\ -1 & 0 & -2i \end{pmatrix} \quad \hat{A}^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & -2i & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2i & -4 & 2i \end{pmatrix}$$

3. $\hat{A} \neq \hat{A}^\dagger \Rightarrow \hat{A}$ ist nicht hermitesch

Aufgabe 7 (*)

Der Hamilton-Operator eines Zwei-Niveau-Systems lautet:

$$\hat{\mathcal{H}} = \epsilon (|1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2| + |1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|)$$

Hierbei sind $|1\rangle$ und $|2\rangle$ die orthonormierten Basiszustände. Der Parameter ϵ hat Energieeinheiten.

1. Wie lautet die Matrixdarstellung des Operators $\hat{\mathcal{H}}$ in dieser Basis?
2. Finden Sie die Energieeigenwerte und die zugehörigen Eigenzustände des Operators $\hat{\mathcal{H}}$.

Lösung:

1. Durch Anwendung von $\hat{\mathcal{H}}$ auf die Basiszustände folgt:

$$\hat{\mathcal{H}}|1\rangle = \epsilon [|1\rangle\langle 1|1\rangle - |2\rangle\langle 2|1\rangle + |1\rangle\langle 2|1\rangle + |2\rangle\langle 1|1\rangle] = \epsilon [|1\rangle + |2\rangle]$$

$$\hat{\mathcal{H}}|2\rangle = \epsilon [|1\rangle\langle 1|2\rangle - |2\rangle\langle 2|2\rangle + |1\rangle\langle 2|2\rangle + |2\rangle\langle 1|2\rangle] = \epsilon [|1\rangle - |2\rangle]$$

$$\hat{\mathcal{H}} = \epsilon \hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Zum Finden der Eigenwerte gilt es das Eigenwertproblem $(\hat{\mathcal{H}} - \lambda \mathbb{1}) \mathbf{v} = 0$ zu lösen:

$$\det(\hat{\mathcal{H}} - \lambda \mathbb{1}) = 0$$

$$-(\epsilon - \lambda)(\epsilon + \lambda) - \epsilon^2 = 0$$

$$\lambda^2 = 2\epsilon^2$$

$$\lambda_{1/2} = \pm\sqrt{2}\epsilon$$

Durch Einsetzen der Eigenwerte in das Eigenwertproblem lassen sich folgende Eigenvektoren finden:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{\epsilon}{\sqrt{2\epsilon+\epsilon}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\epsilon}{\sqrt{2\epsilon+\epsilon}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

5 Eindimensionaler harmonischer Oszillator

Aufgabe 8 (*) Zeigen Sie: Wenn Ψ_ν Eigenfunktion von $n = a^\dagger a$ zum Eigenwert ν ist, so ist $a^\dagger \Psi_\nu$ Eigenfunktion von n mit Eigenwert $\nu + 1$.

Lösung:

Um diese Aussage zu zeigen, kann man den Kommutator der beiden Auf- und Absteigeoperatoren a^\dagger und a betrachten. Wie man durch Nachrechnen verifizieren kann, gilt

$$[a, a^\dagger] = 1$$

Damit kann man nun auch den Kommutator des Teilchenzahloperators mit dem Aufsteigeoperator bestimmen. Es ist

$$[n, a^\dagger] = [a^\dagger a, a^\dagger] = a^\dagger a a^\dagger - a^\dagger a^\dagger a = a^\dagger \underbrace{[a, a^\dagger]}_{=1} = a^\dagger$$

Mit dieser Aussage folgt unmittelbar

$$n a^\dagger \Psi_\nu = (a^\dagger n + a^\dagger) \Psi_\nu = a^\dagger (\nu + 1) \Psi_\nu = (\nu + 1) a^\dagger \Psi_\nu$$

womit die Behauptung gezeigt ist.

Aufgabe 9 ()**

Wir betrachten einen eindimensionalen harmonischen Oszillator mit dem Hamiltonoperator

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}$$

mit den Eigenzuständen $|n\rangle$. Zur Zeit $t = 0$ sei der Zustand durch

$$|\Psi(t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + i\frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

gegeben.

(1) Man gebe die Zeitentwicklung $|\Psi(t)\rangle$ an.

(2) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird jeweils die Energie E_0, E_1 oder E_2 gemessen?

(3) Berechnen Sie den Erwartungswert von x und p Hinweis: überlegen Sie, welche Darstellung des Oszillators am besten geeignet ist und welche Sätze für Erwartungswerte existieren.

Lösung:

1) Die Zeitentwicklung lautet

$$|\Psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{iE_0 t}{\hbar}}|0\rangle - i\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}}|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{i\omega t}{2}}|0\rangle - i\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{3i\omega t}{2}}|1\rangle$$

2)

$$P_0(t) = |\langle 0|\Psi(t)\rangle|^2 = 1/2$$

$$P_1(t) = |\langle 1|\Psi(t)\rangle|^2 = 1/2$$

$$P_2(t) = |\langle 2|\Psi(t)\rangle|^2 = 0$$

3) Am besten löst man diese Aufgabe mit der algebraischen Methode. Der Ortsoperator lautet dann

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a^\dagger + a)$$

und weiter gilt

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$$

Damit folgt für den Erwartungswert

$$\langle x \rangle = \langle \Psi(t)|x|\Psi(t)\rangle = -\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \sin[\omega t]$$

und für den Impuls

$$\langle p \rangle = m \frac{d}{dt} \langle x \rangle = -\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}} \cos[\omega t]$$

Aufgabe 10 (**)

Ein Teilchen befindet sich im Grundzustand eines harmonischen Oszillators mit der Frequenz ω , wobei sich plötzlich die Federkonstante vervierfacht, so dass $\omega' = 2\omega$. Während dieses unendlich schnellen Vorganges ändert sich die Wellenfunktion des Teilchen nicht. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit bei einer Energiemessung den Wert $\hbar\omega/2$ ($\hbar\omega$) zu erhalten?

Lösung:

Die Energien, die nun nach der Vervielfachung der Federkonstante erlaubt sind, sind folgende

$$E'_n = \hbar\omega' \left(n + \frac{1}{2} \right) = \hbar\omega (2n + 1) = \hbar\omega, 3\hbar\omega, 5\hbar\omega, \dots$$

Demnach ist die Wahrscheinlichkeit, den Wert $\hbar\omega/2$ gleich Null. Um die Wahrscheinlichkeit für den Energiewert $\hbar\omega$ zu berechnen, muss man die Wellenfunktion des Teilchens, also den Grundzustand des alten Systems, auf den Grundzustand des neuen Systems projizieren, da diese Energie gerade dem Grundzustand des neuen Systems entspricht. Die Wahrscheinlichkeit ist also $P_0 = |c_0|^2$, wobei

$$c_0 = \int \Psi(x, 0) \Psi' dx$$

wobei $\Psi(x, 0)$ den Grundzustand des alten Systems indiziert und Ψ' der Grundzustand des neuen Systems ist.

$$\Psi(x, 0) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \quad \text{und} \quad \Psi'_0(x) = \left(\frac{2m\omega}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{2m\omega}{2\hbar}x^2}$$

Damit ist

$$c_0 = 2^{1/4} \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{3m\omega}{2\hbar}x^2} dx = 2^{1/4} \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Die Wahrscheinlichkeit ist damit $P_0 = \sqrt{2} \cdot \frac{2}{3} \approx 0.9428$

6 Mehrdimensionaler Harmonischer Oszillator

Aufgabe 11 (**)

Betrachten Sie die dreidimensionale zeitunabhängige Schrödingergleichung mit einem Potential

$$V(x, y, z) = \begin{cases} \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2) & \text{für } 0 \leq z \leq D \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Lösen Sie die Schrödingergleichung indem Sie mit dem Ansatz

$$\Psi(\vec{r}) = \Psi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$$

eine Separation der partiellen Differentialgleichung vornehmen. Beachten Sie, dass $V(x, y, z)$ in $V_x(x) + V_y(y) + V_z(z)$ separiert. Wie lautet $V(z)$?

(b) Wie lauten die Energie-Eigenwerte des betrachteten Systems?

Lösung:

(a) Eine Separation der Variablen liefert

$$\begin{aligned} H &= H_x + H_y + H_z \\ H_x &= \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \\ H_y &= \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 y^2 \end{aligned}$$

und in z-Richtung

$$H_z = \frac{p_z^2}{2m} + V(z), \quad V(z) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq z \leq D \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

(b) Aus dem Ansatz

$$\hat{H}|n_x, n_y, n_z\rangle = E_{n_x, n_y, n_z}|n_x, n_y, n_z\rangle$$

mit $|n_x, n_y, n_z\rangle = |n_x\rangle|n_y\rangle|n_z\rangle$ folgt wegen

$$\begin{aligned} H_x|n_x\rangle &= E_{n_x}|n_x\rangle \\ H_y|n_y\rangle &= E_{n_y}|n_y\rangle \\ H_z|n_z\rangle &= E_{n_z}|n_z\rangle \end{aligned}$$

wieder

$$E_{n_x, n_y, n_z} = E_{n_x} + E_{n_y} + E_{n_z}$$

Verwendet man den eindimensionalen harmonischen Oszillator

$$E_{n_x} = \hbar\omega \left(n_x + \frac{1}{2} \right), \quad n_x = 0, 1, 2, \dots$$

$$E_{n_y} = \hbar\omega \left(n_y + \frac{1}{2} \right), \quad n_y = 0, 1, 2, \dots$$

und der eindimensionale unendliche Potentialtopf in z-Richtung

$$E_{n_z} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mD^2} n_z^2, \quad n_z = 0, 1, 2, \dots$$

Damit lautet das Endergebnis

$$E_{n_x, n_y, n_z} = \hbar\omega \left(n_x + n_y + 1 \right) + \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mD^2} n_z^2$$

Aufgabe 12 (**)

Die zeitunabhängige Schrödingergleichung für den dreidimensionalen harmonischen Oszillator lautet

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{2} m \omega^2 (x^2 + y^2 + z^2) - E \right] \Psi(x, y, z) = 0$$

(a) Lösen Sie die Schrödingergleichung indem Sie mit dem Ansatz

$$\Psi(\vec{r}) = \Psi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$$

eine Separation der partiellen Differentialgleichung in drei gewöhnliche Differentialgleichung für $X(x)$, $Y(y)$, $Z(z)$ vornehmen.

(b) Wie lauten die Energie-Eigenfunktionen und die Energie-Eigenwerte des betrachteten Systems?

Lösung:

Die Schrödingergleichung des Problems lautet

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{2} m \omega^2 (x^2 + y^2 + z^2) - E \right] \Psi(x, y, z) = 0$$

(a) Wir verwenden die sogenannte Separation der Variablen, d.h. den Ansatz $\Psi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$. Einsetzen liefert:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left(X''(x)Y(y)Z(z) + X(x)Y''(y)Z(z) + X(x)Y(y)Z''(z) \right) + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2 + z^2)X(x)Y(y)Z(z) - EX(x)Y(y)Z(z) \right] = 0$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{X''}{X} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \beta_x \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{Y''}{Y} + \frac{1}{2}m\omega^2 y^2 \beta_y \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{Z''}{Z} + \frac{1}{2}m\omega^2 z^2 \beta_z \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \beta_x + \beta_y + \beta_z$$

Nun ist das Problem auf drei eindimensionale Oszillator reduziert und wir können die Ergebnisse für das eindimensionale Problem verwenden.

(b) Die Lösung des eindimensionalen Problems lautet:

$$X_{n_x}(x) = \sqrt{\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar\pi}} \frac{1}{2^{n_x} n_x!}} H_{n_x} \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \right) \exp \left(-\frac{m\omega x^2}{2\hbar} \right)$$

mit $\beta_x = \hbar\omega \left(n_x + \frac{1}{2} \right)$ mit $n_x = 0, 1, 2, \dots$

Hieraus folgt für die Energie-Eigenfunktionen:

$$\Psi_{n_x n_y n_z} = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi} \right)^{3/4} \frac{H_{n_x} \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \right) H_{n_y} \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} y \right) H_{n_z} \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} z \right)}{\sqrt{2^{n_x+n_y+n_z} n_x! n_y! n_z!}} \exp \left(-\frac{m\omega r^2}{2\hbar} \right)$$

mit

$$E_{n_x n_y n_z} = \beta_x + \beta_y + \beta_z = \hbar\omega \left(n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2} \right)$$