

FK Ex 4 - Musterlösung 10/09/2015

1 Entropie I

Am Boden einer Kiste befinden sich $N_1 = 1000$ schwarze Kugeln. Darüber liegt eine Schicht aus $N_2 = 250$ weißen Kugeln. Nun wird die Kiste geschüttelt und die Kugeln durchmischen sich. Berechnen Sie den Entropiezuwachs ΔS in Einheiten von k_B in Abhängigkeit von N_1 , N_2 und $N = N_1 + N_2$. Berechnen Sie die Zahlenwerte von $\Delta S/k_B$ und $\Delta S/k_B N$. **Hinweis:** Verwenden Sie die Stirling-Formel: $N! \approx N^N$.

Lösung:

$$N_1 = 1000, N_2 = 250, N = 1250$$

$$S = k_B \ln \Omega$$

$$\Omega \propto \frac{1}{W} \rightarrow \Omega = \frac{\text{const.}}{W}$$

$$S = k_B \ln \frac{\text{const.}}{W} = k_B \ln c - k_B \ln W$$

$$\Delta S = -k_B \ln \frac{N_1! N_2!}{N!} \approx -k_B (N_1 \ln N_1 + N_2 \ln N_2 - N \ln N)$$

$$\frac{\Delta S}{k_B} \approx 625$$

$$\frac{\Delta S}{k_B N} \approx 0.5$$

2 Entropie II

- (a) Ein Kilogramm Wasser bei 273 K wird in thermischen Kontakt mit einem Wärmereservoir bei 373 K gebracht, bis das Wasser die Temperatur 373 K erreicht hat. Wie groß ist die Entropieänderung des Wärmebades, des Wassers und des Gesamtsystems aus Wasser und Wärmebad?
- (b) Wie groß wäre die Entropieänderung des Gesamtsystems, wenn man das Wasser von 273 K auf 373 K heizt, indem man es zuerst mit einem Wärmereservoir bei 323 K und dann (nachdem sich das Gleichgewicht eingestellt hat) mit einem Wärmereservoir bei 373 K in Kontakt bringt?

Lösung:

- (a) Die Temperatur des Reservoirs bleibt konstant nach dem thermischen Kontakt.

$$\Delta S_R = -\frac{m_{H_2O} c_V \Delta T_{H_2O}}{T_R} = -1.12 \text{ kJ/K}$$

Diese ist negativ, da das Reservoir Wärme abgibt. Die Temperatur von Wasser ändert sich beim Kontakt mit dem Reservoir

$$\Delta S_W = \int_{T_{H_2O}}^T \frac{m_{H_2O} c_V dT_{H_2O}}{T_{H_2O}} = m_{H_2O} \cdot c_V \cdot \ln\left(\frac{T_R}{T_{H_2O}}\right) = 1.3 \text{ kJ/K}$$

Die Änderung der Gesamtentropie ist

$$\Delta S_a = \Delta S_R + \Delta S_W = 180 \text{ J/K}$$

- (b) In zwei Schritte, analog wie oben mit $T_0 = T_c = 273 \text{ K}$, $T_1 = 323 \text{ K}$, $T_2 = T_R = 373 \text{ K}$:

$$\Delta S_1 = -\frac{m_{H_2O} \cdot c_V \cdot (T_1 - T_0)}{T_1} + m_{H_2O} c_V \ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right) = 56 \text{ J/K}$$

$$\Delta S_2 = -\frac{m_{H_2O} \cdot c_V \cdot (T_R - T_1)}{T_1} + m_{H_2O} c_V \ln\left(\frac{T_R}{T_1}\right) = 41 \text{ J/K}$$

Insgesamt $\Delta S = 97 \text{ J/K}$

3 Entropie III

Zwei Mol eines idealen Gases haben zu Beginn eine Temperatur $T_1 = 400 \text{ K}$ und ein Volumen $V_1 = 40 \text{ l}$. Sie erfahren anschließend eine isotherme (d. h. $T = \text{const.}$) Expansion auf das doppelte Volumen. Wie hoch sind die Entropieänderungen des Gases und des Universums?

Lösung:

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T}$$

$$\Delta U = \Delta Q + \Delta W$$

Isotherm heißt, dass $\Delta U = 0$, damit:

$$\Delta Q = -\Delta W = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT}{V} dV = nRT \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T} = 11.5 \text{ J/K}$$

Die Entropieänderung ist gleich der Entropieänderung des idealen Gases.

4 Ideales Gas I

Ein Autofahrer pumpt die Reifen seines Autos auf einen Druck von 180 kPa auf, während die Temperatur bei $T_i = 265$ K liegt. Als er sein Fahrziel erreicht hat, ist der Reifendruck auf 245 kPa angestiegen. Wie hoch ist dann die Temperatur der Reifen, wenn diese

- (a) sich nicht ausgedehnt haben?
- (b) sich um 7 % ausgedehnt haben?

Lösung:

- (a) Wenn das Volumen eines idealen Gases konstant gehalten wird, so ist $T/P = \text{const.}$. Für die Größen vor und nach der Autofahrt gilt also:

$$\frac{T_i}{p_i} = \frac{T_f}{p_f}$$

$$T_f = \frac{p_f}{p_i} T_i \approx 360.9 \text{ K}$$

- (b)

$$\frac{p_i V_i}{T_i} = \frac{p_f \cdot 1.07 \cdot V_i}{T_{f,b}}$$

$$T_{f,b} = 1.07 \frac{p_f}{p_i} T_i = 386.2 \text{ K}$$

5 Ideales Gas II

Ein ideales Gas mit $V_1 = 20$ l und $p_1 = 20$ bar expandiert reversibel bei konstanter Temperatur auf $V_2 = 40$ l. Wie groß ist die Änderung der freien Energie bei diesem Prozess?

Lösung:

Freie Energie:

$$F = U - TS$$

$$dF = dU - TdS - SdT = -TdS$$

Es handelt sich um einen isothermen Prozess mit $dT = 0$ und $dU = 0$. Also:

$$dF = -\delta Q = -\delta W$$

Integration ergibt:

$$\int_1^2 dF = - \int_1^2 dW = - \int_{V_1}^{V_2} p dV$$

Mit der idealen Gasgleichung $pV = nRT = \text{const.}$ folgt:

$$\Delta F = F_2 - F_1 = -nRT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = nRT \ln \left(\frac{V_1}{V_2} \right) = -2.733 \text{ kJ}$$

6 Photonengas

In thermodynamischer Hinsicht verhält sich die in einem Hohlraum befindliche thermische Strahlung wie ein Gas mit der Zustandsgleichung

$$p = \frac{1}{3} b T^4 \quad (1)$$

und innerer Energie

$$U = b T^4 V \quad (2)$$

mit $b = 7.56 \cdot 10^{-16} \text{ J/m}^3\text{K}^4$. Bestimmen Sie die isochore ($V=\text{const.}$) Wärmekapazität und die Adiabatangleichung.

Lösung:

Für die isochore Wärmekapazität gilt:

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_V$$

Es ist also

$$U = b T^4 V \rightarrow C_V = 4b T^3 V$$

Die Adiabatangleichung erhält man, indem man im ersten Hauptsatz für das pVT -System

$$dU = \delta Q - p dV$$

das Wärmedifferential gleich 0 setzt:

$$dU = -pdV$$

Dies lässt sich mit Hilfe der Zustandsgleichung und der Gleichung für die innere Energie in eine Differentialgleichung für T und V übersetzen.

$$p = p(T, V) = \frac{1}{3}bT^4, \quad U = bT^4V$$

$$\rightarrow dU = 4bT^3VdT + bT^4dV$$

also

$$4bT^3VdT + bT^4dV = -\frac{1}{3}bT^4dV$$

oder

$$3\frac{dT}{T} + \frac{dV}{V} = 0$$

mit der Lösung:

$$3 \ln T + \ln V = \text{const.}$$

oder $T^3V = \text{const.}$

7 Gasvolumen

Ein Behälter sei mit 2 Mol idealem, 1-atomigen Gas gefüllt (Volumen V_i) und an ein Wärmereservoir mit Temperatur $T_R = 293$ K angeschlossen. Der Behälter sei oben mit einem beweglichen, masselosen Stempel der Fläche $A = 0.2$ m² abgeschlossen. Außerhalb des Behälter herrscht der Luftdruck $p_i = 10^5$ N/m². Auf den Stempel wird langsam Sand bis zu einer Gesamtmasse $m = 500$ kg gehäuft. Hierbei bedeutet langsam, dass die Temperatur des Gases konstant bleibt, da es mit dem Wärmereservoir in Verbindung steht.

- (a) Wie groß sind Volumen V_f und Druck p_f des Gases, wenn der gesamte Sand auf dem Stempel liegt?
- (b) Wie groß ist die Wärmemenge, die dabei zwischen Wärmereservoir und dem Gas ausgetauscht wurde?

- (c) Durch die Erwärmung des Gases soll der beladene Stempel nun auf die ursprüngliche Höhe gebracht werden. Welche Temperatur hat das Gas, wenn es das ursprüngliche Volumen einnimmt? Welche Wärmemenge wurde dem Gas hierfür zugefügt?

Lösung:

- (a) Isothermer Prozess:

$$p_i V_i = p_f V_f, \quad p_f = p_i + \frac{mg}{A} = 1196 \text{ hPa}$$

$$V_f = \frac{nRT_R}{p_i + \frac{mg}{A}} = 40.73 \text{ l}$$

- (b) Gesucht ist die Wärmemenge, die zur Volumenkompression verwendet wurde.

$$\Delta W_{\text{isotherm}} = - \int_{V_i}^{V_f} p dV = -nRT_R \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V} = nRT_R \ln \left(\frac{V_i}{V_f} \right)$$

$$\rightarrow \Delta Q = nRT_R \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right) = nRT_R \ln \left(\frac{p_i}{p_f} \right) = -872.9 \text{ J}$$

- (c) Isobarer Prozess:

$$\frac{T_f}{T_R} = \frac{V_i}{V_f} \rightarrow T_f = \frac{V_i}{V_f} T_R = \frac{nRT_R^2}{p_i V_f} = 350.5 \text{ K}$$

$$\Delta U = \Delta Q - p_f (V_i - V_f)$$

$$\rightarrow \Delta Q = \frac{3}{2} nR \Delta T + p_f (V_i - V_f) = \frac{5}{2} nR (T_{f,c} - T_R) = 2390 \text{ J}$$

8 Luftpumpe

Eine zylindrische Luftpumpe mit der Länge $L = 45 \text{ cm}$ und dem Durchmesser $d = 4 \text{ cm}$ ist bei dem Druck $p_1 = 1013 \text{ mbar}$ und der Temperatur $T_1 = 296 \text{ K}$ mit Helium (1atomig, ideales Gas) gefüllt.

- (a) Der Kolben wird um $x = 10 \text{ cm}$ in die Luftpumpe hineingedrückt, so dass ein Druck p_2 entsteht. Dieser Vorgang ist so schnell, dass dabei kein Wärmeaustausch mit der Umgebung stattfinden kann. Berechnen Sie die Temperatur T_2 am Ende des Vorgangs.

- (b) Der Kolben wird solange festgehalten, bis ein Temperatenausgleich mit der Umgebung stattgefunden hat. Berechnen Sie den Druck p_3 , der sich am Ende dieses Schrittes einstellt.
- (c) Der Kolben wird wieder losgelassen, so dass sich der Druck wieder dem Umgebungsdruck anpasst. Auch dieser Prozessschritt ist wieder so schnell, dass kein Wärmeaustausch mit der Umgebung stattfinden kann. Berechnen Sie die Temperatur T_4 und das Volumen V_4 am Ende des Schrittes
- (d) Der Kolben wird wieder losgelassen und es wird gewartet, bis ein Temperatenausgleich mit der Umgebung stattgefunden hat. Berechnen Sie das Volumen V_3 dieses Prozessschrittes.

Lösung:

(a)

$$V_1 = \frac{d}{2} \pi \cdot L = 566 \text{ cm}^3, \quad V_2 = \frac{d}{2} \pi \cdot (L - x) = 440 \text{ cm}^3$$

Adiabatische Kompression:

$$T_1 V_1^{\kappa-1} = T_2 V_2^{\kappa-1}$$

$$T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{2/3} = 350 \text{ K}$$

(b) $T_3 = T_1 = 296 \text{ K}$ und $V_2 = V_3$:

$$\frac{p_2 V_2}{T_2} = \frac{p_3 V_2}{T_3}, \quad \rightarrow p_3 = p_2 \frac{T_3}{T_2} = 1303 \text{ mbar}$$

(c) Adiabatische Expansion $p_4 = p_1$

$$p_3 V_3^{\kappa} = p_4 V_4^{\kappa}, \quad V_4 = V_3 \cdot \left(\frac{p_3}{p_4} \right)^{3/5} = 512 \text{ cm}^3$$

$$T_4 = T_3 \cdot \left(\frac{V_3}{V_4} \right)^{3/5} = 268 \text{ K}$$

(d) Isobare Expansion, $p = \text{const.}$, $T_5 = T_1 = 296 \text{ K}$

$$V_5 = V_4 \cdot \left(\frac{T_3}{T_4} \right) = 566 \text{ cm}^3$$

9 Fermi-Gas I

Ein System von N nicht wechselwirkenden identischen Fermionen befindet sich in einem eindimensionalen Potentialtopf der Breite a .

- (a) Wie groß ist im Grundzustand des Systems die Energie E_F des höchsten besetzten Einteilchenzustandes als Funktion der Teilchendichte $\rho = N/a$? Zur Vereinfachung sei N geradzahlig.
- (b) Wie groß ist die Gesamtenergie des Systems E als Funktion der Teilchendichte und als Funktion der Fermi-Energie ϵ_F ?
- (c) Die durch die Beziehung

$$E = \int_0^{\epsilon_F} d\epsilon \epsilon_F g(\epsilon) \quad (3)$$

definierte Funktion $g(\epsilon)$ heißt Zustandsdichte. Berechnen Sie diese Funktion für den Fall des eindimensionalen Potentialtopfs.

Lösung:

- (a) Die Energieniveaus in einem Rechteckpotentialtopf der Breite a sind gegeben durch

$$\epsilon_n = \frac{h^2}{8ma^2} n^2$$

Hat man N nicht wechselwirkende Fermionen, so füllen diese im Grundzustand die Energieniveaus von unten nach oben auf, wobei jedes Niveau von zwei Teilchen besetzt werden kann. Das höchste besetzte Niveau hat damit die Quantenzahl $n = N/2$ und die Fermienergie ist

$$\epsilon_F = \frac{h^2 N^2}{32ma^2} = \frac{h^2}{32m} \rho^2$$

- (b) Die Gesamtenergie erhält man durch Summation über die energien aller N Teilchen:

$$E = 2 \sum_{n=1}^{N/2} \epsilon_n = \frac{2h^2}{8hma^2} \sum_{n=1}^{N/2} n^2$$

Hier wird die Summenformel $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ verwendet. Man erhält schlussendlich

$$E = \frac{h^2}{96ma^2} N(N+1)(N+2) \approx \frac{h^2}{96ma^2} N^3$$

wobei die Näherung zustande kommt, dass man für große N nur den führenden N^3 - Term berücksichtigt. Ergebnis von Teilaufgabe (a) liefert dann

$$N = \sqrt{\frac{32ma^2\epsilon_F}{h^2}} = \frac{4a}{h} \sqrt{2m\epsilon_F}$$

Eingesetzt in den Ausdruck für die Gesamtenergie:

$$E = \frac{h^2}{96ma^2} \frac{128\sqrt{2a^3m^{3/2}}}{h^3} \epsilon_F^{3/2} = \frac{4a\sqrt{2m}}{3h} \epsilon_F^{3/2}$$

(c) Aus der Definitionsgleichung:

$$E = \int_0^{\epsilon_F} \epsilon_F g(\epsilon) d\epsilon$$

ergibt sich durch Differentiation nach ϵ_F

$$\frac{dE}{d\epsilon_F} = \epsilon_F g(\epsilon_F) \rightarrow g(\epsilon_F) = \frac{dE}{d\epsilon_F} \epsilon_F^{-1}$$

Andererseits mit Teilaufgabe (b)

$$\frac{dE}{d\epsilon_F} = \frac{3}{2} \frac{4a\sqrt{2m}}{3h} \cdot \epsilon_F^{1/2} = \frac{2a\sqrt{2m}}{h} \epsilon_F^{1/2}$$

und damit

$$g(\epsilon_F) = \frac{2a}{h} \sqrt{\frac{2m}{\epsilon_F}}$$

Da diese für beliebige Fermienergien gilt, erhält man allgemein für die Zustandsdichte

$$g(\epsilon_F) = \frac{2a}{h} \sqrt{\frac{2m}{\epsilon}}$$

Die Zustandsdichte hat die Dimension 1. Sie spielt in der Festkörperphysik eine große Rolle. Bei dreidimensionalen Fermionensystemen liegen die Energieniveaus der Einteilchenzustände mit wachsender Energie immer dichter, so dass ein Quasikontinuum von Zuständen entsteht und die Zustandsdichte ihre anschauliche Bedeutung erhält: $g(\epsilon)d\epsilon$ ist die Anzahl der Zustände im Energieintervall von ϵ bis $\epsilon + d\epsilon$. Im Eindimensionalen ist das jedoch offensichtlich nicht der Fall, da die Niveaus mit wachsendem n immer weiter auseinanderrücken.

10 Fermi-Gas II

Berechnen Sie die Fermi-Energie und die mittlere Elektronenenergie in einem eindimensionalen Elektronengas, das aus N Elektronen, eingeschlossen in einem Potentialtopf der Länge L besteht. **Hinweis:** $\sum_{i=1}^{\nu} i^2 = \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}$.

Lösung:

Die Energieeigenwerte sind

$$E_n = \frac{h^2}{8mL^2}n^2$$

wobei N Elektronen im Topf sind und jeden Zustand nur zweimal besetzen können. Pauli-Prinzip: Jeder Zustand darf nur durch ein Elektron besetzt werden. Wegen der beiden Einstellungsmöglichkeiten bedeutet jedes n genau genommen zwei Elektronenzustände; man besetzt also jedes n mit zwei Elektronen. Füllt man die Energiezustände von unten her auf, so ist das letzte, energiereichste Elektron im Zustand

$$n_{max} = \frac{N}{2}$$

Der so erreichte höchste besetzte Energiezustand ist die Fermi-Energie

$$E_F = \frac{h^2 N^2}{32mL^2}$$

Mittlere Energie

$$E_m = \frac{E_{gesamt}}{N} = \frac{1}{N} \frac{h^2}{8mL^2} 2 \sum_{n=1}^{N/2} n^2$$

für große N . Damit

$$E_m = \frac{h^2}{8mL^2} \frac{N^2}{12} = \frac{1}{3} E_F$$