

FK Ex 4 08/09/2015

1 Rydberg-Atome

Wird in einem freien Atom ein Elektron in einen Zustand mit sehr kleiner Bindungsenergie gebracht, so nimmt die Wellenfunktion einen sehr großen Raum ein und die Struktur des restlichen Atoms spielt fast keine Rolle mehr. Man spricht dann von Rydberg-Zuständen.

- (a) Zur Anregung der Rydberg-Zustände von Wasserstoff-Atomen werden zwei Laser benutzt. Ein Laser hat die feste Frequenz zur Photonenenergie $E = 11.5 \text{ eV}$, der andere Laser ist durchstimmbar. Welche Wellenlängen muss man an diesem einstellen, um die Zustände mit $n = 20, 30, 40, 50, 100$ anzuregen?
- (b) Wie groß sind die Radien und die Bindungsenergien dieser Zustände?
- (c) Welche Änderung dieser Werte erwarten Sie qualitativ für Natrium-Atome, insbesondere für die Entartung der Drehimpuls-Unterstufen?

2 Kugelpotential

Gegeben sei ein kugelförmiger Potentialtopf mit $V(r) = 0$ für $r < r_0$ und $V(r) = \infty$ für $r > r_0$.

- (a) Zeigen Sie, dass die Wellenfunktion

$$\psi(r, t) = a \cdot \frac{\sin kr}{kr}$$

eine Lösung der Schrödingergleichung dieses Systems ist. Bestimmen Sie die Werte für k und E in diesem System.

- (b) Wie groß ist der Drehimpuls des Teilchens?

3 Wasserstoffatom

Zeigen Sie, dass die Grundzustands-Wasserstoff-Wellenfunktion

$$\psi_{100}(r, \phi, \theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{Z}{a_0} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot \exp \left[-\frac{Zr}{a_0} \right]$$

eine Lösung der Schrödinger-Gleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2mr^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) - \frac{\hbar^2}{2mr^2} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \right] + U(r)\psi = E\psi$$

mit

$$U(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

ist und bestimmen Sie den Ausdruck für E_{100} .

4 Energiezustände im Heliumatom

- Die gesamte Abtrennarbeit für beide Elektronen beträgt für den Grundzustand des Heliums 79 eV. Berechnen Sie die Abtrennarbeit des zweiten Elektrons (Ionisation des einfach geladenen He^+ -Ions zum zweifach geladenen He^{++}) aus derjenigen des Elektrons im Wasserstoff-Atom und folgern Sie die Bindungsenergie des ersten (Leucht-)Elektrons.
- Skizzieren Sie das Energiespektrum von Para- und Ortho-Helium. Erklären sie die Nomenklatur der vorkommenden Zustände. Welche Feinstruktur beobachtet man beim Para-Helium und welche Spinkopplung kann man folgern?
- Welche Hauptquantenzahl hat der niedrigste Energiezustand der beiden Konfigurationen? In welchen Wellenlängenbereichen erwartet man entsprechend die Übergänge in den Grundzustand?

5 Spin-Bahn-Kopplung

Ein Elektron sei in einem Zustand mit Bahndrehimpuls \mathbf{L} und Spinvektor \mathbf{S} . Diese koppeln zu einem Gesamtdrehimpuls \mathbf{J} .

- Wie ergeben sich die verschiedenen Vektoren auseinander?
- Welche möglichen Gesamtlängen haben die Vektoren? Was sind ihre möglichen Komponenten in einer gemeinsam ausgezeichneten Richtung? Verwenden Sie hierzu die nötigen Quantenzahlen. Welche Werte können diese im Wasserstoffatom annehmen?
- Berechnen Sie für die Bahndrehimpulsquantenzahl $l = 1$ und die Spinquantenzahl $s = 1/2$ die Vektorlängen. Berechnen Sie den Winkel zwischen \mathbf{L} und \mathbf{S}

6 Hyperfeinstruktur

Schätzen Sie zunächst das Verhältnis der Energien der Hyperfeinaufspaltung zur Aufspaltung durch die Spin-Bahn-Kopplung $\frac{\Delta E_{HFS}}{\Delta E_{LS}}$ ab. Betrachten Sie dann den Grundzustand des Deuteriums, der in zwei HF-Niveaus $F = 1/2$ und $F = 3/2$ aufgespalten ist. Welchen Wert muss die Spinquantenzahl I des Deuterons haben und was bedeutet das insbesondere für die Orientierung der Spins des Protons und Neutrons? In welche Hyperfeinzustände spaltet dann das $p_{3/2}$ -Niveau auf?

7 Wasserstoffatom im Magnetfeld

Skizzieren Sie die Aufspaltung des $3d$ und des $2p$ - Niveaus im Wasserstoffatom zunächst nach L - S -Kopplung, sowie nach induzieren eines externen Magnetfelds der Größen im (a) Zeeman-Bereich und (b) Paschen-Back-Bereich. Zeichnen Sie alle erlaubten optischen Übergänge ein. Die Auswahlregeln sind $\Delta j = 0, \pm 1$, $\Delta m_j = 0, \pm 1$ und $\Delta l = \pm 1$ bzw. $\Delta l = \pm 1$, $\Delta m_l = 0, \pm 1$ und $\Delta m_s = 0$.

8 Hundsche Regeln

Bestimmen Sie mit Hilfe der Hundschen Regeln das spektroskopische Symbol für folgende Grundzustandskonfigurationen:

(a) Cobalt: $[Ar]3d^74s^2$

(b) Gold: $[Xe]4f^{14}5d^{10}6s^1$

(c) Technetium: $[Kr]4d^55s^2$

9 Dipolübergänge

Das Dipolmatrixelement ist gegeben durch $\mathcal{M} = \int \psi_f^* \mathbf{p} \psi_i d\tau$. Berechnen Sie dieses Matrixelement für den Übergang $1s$ nach $2s$.