Ferienkurs Experimentalphysik 2

Sommersemester 2015

Gabriele Semino, Alexander Wolf, Thomas Maier

Vorlesung 1

Elektrostatik

Nach dem Skript "Konzepte der Experimentalphysik 2: Elektromagnetismus"
von Abel Perera, Andrea Meraner, Gabriele Semino und Adonia Siegmann

Inhaltsverzeichnis

1 Elektrostatik **1**

1.1 Coulomb-Gesetz, elektrisches Feld und Potential . . . 1

1.1.1 Coulomb-Gesetz . . . 1

1.1.2 Elektrisches Feld . . . 1

1.1.3 Elektrischer Fluss und Gauß'sches Gesetz . . . 2

1.1.4 Gauß'scher Satz . . . 2

1.1.5 Elektrostatisches Potential . . . 3

1.1.6 Poisson-Gleichung . . . 3

1.1.7 Elektrische Spannung . . . 4

1.1.8 Superpositionsprinzip . . . 4

1.2 Elektrische Multipole . . . 5

1.2.1 Elektrischer Dipol . . . 5

1.2.2 Multipolentwicklung . . . 6

1.3 Kondensatoren und Kapazität . . . 7

1.3.1 Oberflächenladungsdichte . . . 7

1.3.2 Kapazität . . . 7

1.3.3 Plattenkondensator . . . 8

1.3.4 Kugelkondensator . . . 8

1.3.5 Energie geladener Kondensatoren . . . 8

1.3.6 Kondensatorenschaltungen . . . 8

1.4 Dielektrika im elektrischen Feld . . . 9

1.4.1 Polarisation . . . 9

1.4.2 Feldgleichungen in Materie . . . 10

1.4.3 Die dielektrische Verschiebung . . . 11

1.4.4 Kapazität eines Kondensators mit Dielektrikum . . . 11

1.4.5 Feldenergie im Dielektrikum . . . 11

Abbildungsquellen **12**

1 Elektrostatik

1.1 Coulomb-Gesetz, elektrisches Feld und Potential

1.1.1 Coulomb-Gesetz

Das Coulomb-Gesetz beschreibt die Kraft, die von einer Punktladung Q auf eine Punktladung q ausgeübt wird ($[Q] = 1\,\mathrm{C} = 1\,\mathrm{A\,s}$). Befindet sich die Ladung Q im Nullpunkt des Koordinatensystems und die Ladung q im Punkt $\vec{r}$ des Raums (und im Abstand $|\vec{r}| = r$ von der Ladung Q), ergibt sich für die Kraft der folgende Ausdruck

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q \cdot Q}{r^2}\vec{e}_r \tag{1.1.1}$$

wobei ε_0 die **Dielektrizitätskonstante** ist mit dem Wert

$$\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{A^2 s^4}}{\mathrm{kg\,m^3}}$$

Die Einheit kann auch folgendermaßen vereinfacht werden: $[\varepsilon_0] = \frac{\mathrm{A\,s}}{\mathrm{V\,m}}$.
Befindet sich im Allgemeinen die Ladung q_1 im Punkt $\vec{r}_1$ und die Ladung q_2 im Punkt $\vec{r}_2$, ergibt sich für die Kraft auf die Ladung in $\vec{r}_1$

Coulomb-Gesetz

$$\vec{F}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \tag{1.1.2}$$

Bemerkung: Folgende Schreibweisen sind äquivalent

$$\frac{1}{r^2}\vec{e}_r = \frac{1}{|\vec{r}\,|^2}\vec{e}_r = \frac{1}{|\vec{r}\,|^2}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}\,|} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}\,|^3} \tag{1.1.3}$$

1.1.2 Elektrisches Feld

Für das elektrische Feld gilt folgende Eigenschaft:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}}{q} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{für eine Punktladung } Q \text{ in } \vec{r}_1}}{=} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} \tag{1.1.4}$$

$$[E] = [F/q] = 1\,\mathrm{N/C} = 1\,\mathrm{N/As} = 1\,\mathrm{V/m}$$

Die Richtung des Feldes wird durch die Kraft auf eine positive Probeladung q definiert. Die Feldlinien zeigen von positiven Feldladungen weg und zu negativen hin.

1.1.3 Elektrischer Fluss und Gauß'sches Gesetz

Als gesamten elektrischen (Kraft-)Fluss durch die Fläche A definiert man

$$\Phi_{el} = \iint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} \tag{1.1.5}$$

mit dem Flächennormalenvektor $\mathrm{d}\vec{A}$.

Für eine geschlossene Fläche A, welche die Ladung Q_{in} einschließt, gilt das sogenannte **Gauß'sche Gesetz**

$$\Phi_{el} = \oiint_A \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \frac{Q_{in}}{\varepsilon_0} \tag{\textbf{1.1.6}}$$

Bei einer ausgedehnten Ladungsdichte $\varrho(\vec{r})$ kann die innere Ladung auch wie folgt bestimmt werden:

$$Q_{in} = \iiint_{V(A)} \varrho(\vec{r})\,\mathrm{d}V \tag{1.1.7}$$

Die allgemeine Formulierung des Gauß'schen Gesetzes ist also:

Integralform des Gauß'sches Gesetz

$$\oiint_{A=\partial V} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \varrho(\vec{r})\,\mathrm{d}V \tag{\textbf{1.1.8}}$$

Bemerkung: Der elektrische Fluss durch eine geschlossene Oberfläche hängt somit nur von der gesamten enthaltenen Ladung ab (und nicht von der Form der Oberfläche oder der Ladungsverteilung).

1.1.4 Gauß'scher Satz

Der Fluss eines differenzierbaren Verktorfeldes $\vec{E}$ durch eine geschlossene Fläche ist gleich dem Volumenintegral über dessen Quelldichte $\operatorname{div}\vec{E}$.

$$\oiint_{\partial V} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \iiint_V \operatorname{div}\vec{E}\,\mathrm{d}V \tag{1.1.9}$$

Dies ist ein allgemeiner mathematischer Integralsatz und ist als **Gauß'scher Satz** bekannt.
Im Vergleich mit 1.1.8 ergibt sich

Differentielle Form des Gauß'schen Gesetzes

$$\operatorname{div}\vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0} \tag{\textbf{1.1.10}}$$

1.1.5 Elektrostatisches Potential

Da es sich in der Elektrostatik beim elektrischen Feld um ein konservatives Feld handelt, gilt

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0 \tag{1.1.11}$$

Bewegt man eine Ladung q im elektrischen Feld $\vec{E}$, verrichtet man i.A. Arbeit. Diese hängt nur vom Anfangs- und Endpunkt der Bewegung ab.

$$W = q \cdot \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} \tag{1.1.12}$$

Man definiert somit das elektrostatische Potential im Punkt $\vec{r}$ durch

Elektrostatisches Potential

$$\phi(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\vec{r}_{\mathrm{ref}}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} \tag{1.1.13}$$

Der Referenzpunkt $\vec{r}_{\mathrm{ref}}$, d.h. der Punkt, an dem das Potential gleich 0 ist, kann beliebig gewählt werden. Meistens wird dieser zweckmäßig bei $\phi(\vec{r}_{\mathrm{ref}} = \infty) = 0$ gesetzt. Bei besonderen Symmetrien (z.B. bei zylindrischen Ladungsverteilungen) kann es aber günstiger sein, den Referenzpunkt anders zu setzen.

Bemerkung: Die Arbeit $W = q\phi(\vec{r})$ muss somit aufgewendet werden (bzw. wird gewonnen), um die Ladung q vom Punkt $\vec{r}$ zum Referenzpunkt zu bringen.

Aus der Definition des Potentials folgt, dass

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\ \phi(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi \tag{1.1.14}$$

Für eine Punktladung Q in $\vec{r}_1$ erhält man also für das Potential im Punkt $\vec{r}$,

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} \tag{1.1.15}$$

wenn man den Referenzpunkt ins Unendliche setzt. Darüber hinaus ist die elektrische potentielle Energie einer Ladung definiert durch

$$E_{pot} = q\phi \tag{1.1.16}$$

1.1.6 Poisson-Gleichung

Aus den obigen Gleichungen erhalten wir die sog. Poisson-Gleichung.

$$\Delta\phi = \operatorname{div} \operatorname{grad}\ \phi = -\operatorname{div} \vec{E} = -\varrho/\varepsilon_0 \tag{1.1.17}$$

Im ladungsfreien Raum $\varrho = 0$ ergibt sich daraus die **Laplace-Gleichung**.

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \phi = 0 \tag{1.1.18}$$

Für den oben benutzen Laplace-Operator gilt

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{1.1.19}$$

1.1.7 Elektrische Spannung (Potentialdifferenz)

Die elektrische Spannung gibt an, wie viel Energie nötig ist, um eine Probeladung q von einem Punkt $\vec{r}_1$ zu einem Punkt $\vec{r}_2$ innerhalb eines elektrischen Potentials zu bewegen.

$$\boxed{U = \phi(\vec{r}_1) - \phi(\vec{r}_2) = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot \mathrm{d}s \qquad \textbf{(1.1.20)}}$$

$$[U] = [E/q] = 1\,\mathrm{V} = 1\,\frac{\mathrm{N\,m}}{\mathrm{A\,s}}$$

Analog zu 1.1.12, gilt für eine Ladung q, die eine Potentialdifferenz U durchläuft

$$\Delta E_{pot} = W = -qU \tag{\textbf{1.1.21}}$$

1.1.8 Superpositionsprinzip (Linearität der Elektrodynamik)

Die von einzelnen Punktladungen erzeugten elektrischen Felder können vektoriell addiert werden, um das gesamte elektrische Feld zu erhalten.
Das elektrische Feld von N Punktladungen lässt sich darstellen als

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \tag{1.1.22}$$

Das zugehörige elektrostatische Potential lautet

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \tag{1.1.23}$$

wobei $\vec{r}_i$ jeweils die Lage der verschiedenen Ladungen und $\vec{r}$ die Stelle ist, von der man das elektrische Feld bzw. Potential bestimmen will.

1.2 Elektrische Multipole

1.2.1 Elektrischer Dipol

Ein elektrischer Dipol besteht aus zwei gleichen, entgegengesetzten Punktladungen $Q_1 = -Q_2 = Q$ in einem (kleinen) Abstand d.

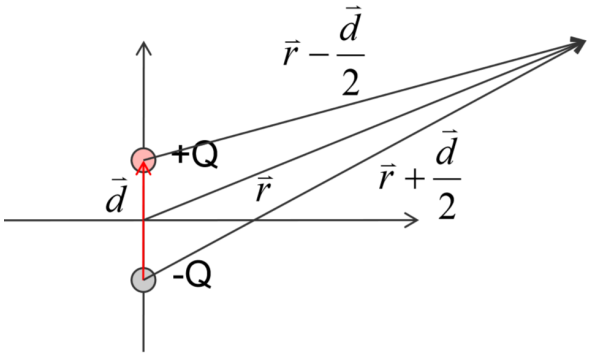

Abbildung 1.1: Schematische Darstellung eines Dipols[(1)]

- **Dipolmoment**
  Definiert man den Verbindungsvektor $\vec{d}$ so, dass er von der negativen zur positiven Ladung ($|\vec{d}| = d$) zeigt, so ergibt sich für das sogenannte Dipolmoment

$$\boxed{\vec{p} = Q \cdot \vec{d} \qquad (\mathbf{1.2.1})}$$

- **Elektrisches Potential**
  Setzt man den Koordinatenursprung in die Mitte zwischen die zwei Ladungen (siehe Abbildung 1.1), erhält man für das Potential am Ort $\vec{r}$ durch Superpositionsprinzip

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{|\vec{r} - \vec{d}/2|} + \frac{-Q}{|\vec{r} + \vec{d}/2|}\right) \qquad (\mathbf{1.2.2})$$

  Ist man am Potential an einem Punkt weit weg vom Dipol interessiert (also sei $r \gg d$), so ergibt sich die folgende Näherung

$$\phi(\vec{r}) \approx \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}\cdot\vec{d}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3} = \frac{p\cdot\cos\vartheta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad (1.2.3)$$

  mit $\vec{p}\cdot\vec{r} = |\vec{p}||\vec{r}|\cos\vartheta = pr\cos\vartheta$, wobei also ϑ der Winkel zwischen $\vec{p}$ und $\vec{r}$ ist. Eine solche Näherung wird wegen der Annahme $r \gg d$ Fernfeldnäherung bezeichnet.

- **Elektrisches Feld**
  In der Fernfeldnäherung ergibt sich für das elektrische Feld

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3\vec{r}(\vec{p}\cdot\vec{r})}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(3p\cos\vartheta\vec{e}_r - \vec{p}\right) \qquad (1.2.4)$$

- **Dipol im homogenen Feld**
  Befindet sich der Dipol in einem homogenen Feld, wirkt auf beide Ladungen die selbe, entgegengesetzte Kraft; somit gibt es **keine resultierende Kraft**.

$$\vec{F}_{\text{ges}} = +Q\vec{E} - Q\vec{E} = 0 \tag{1.2.5}$$

  Die zwei Kräfte bewirken jedoch ein **Drehmoment**

$$\vec{D} = \vec{p} \times \vec{E} \tag{\textbf{1.2.6}}$$

  Die **potentielle Energie des Dipols** lautet somit

$$E_{\text{pot}} = \int \vec{D}\,\mathrm{d}\vartheta = -\vec{p} \cdot \vec{E} \tag{\textbf{1.2.7}}$$

  Aus den letzten zwei Gleichungen ergibt sich, dass der Dipol sich selbständig dreht, bis $\vec{p} \parallel \vec{E}$ gilt. In dieser Lage ist die potentielle Energie minimal.

- **Dipol im inhomogenen Feld**
  Für die Kraft auf einen Dipol in einem inhomogenen Feld gilt

$$\vec{F} = (\vec{p} \cdot \vec{\nabla})\vec{E} = \begin{pmatrix} p_x \cdot \partial_x E_x + p_y \cdot \partial_y E_x + p_z \cdot \partial_z E_x \\ p_x \cdot \partial_x E_y + p_y \cdot \partial_y E_y + p_z \cdot \partial_z E_y \\ p_x \cdot \partial_x E_z + p_y \cdot \partial_y E_z + p_z \cdot \partial_z E_z \end{pmatrix} \tag{1.2.8}$$

  Darüber hinaus wirkt wie im Fall eines homogenen Feldes ein Drehmoment auf den Dipol. Anders als im obigen Fall gibt es in einem solchen Feld aber keine stabile Lage, wo sowohl das Drehmoment als auch die Kraft verschwinden. Der Dipol wird im Feld orientiert und dabei entweder angezogen oder abgestoßen.

1.2.2 Multipolentwicklung

Für räumlich ausgedehnte Ladungsverteilungen ist die analytische Bestimmung der Feldeigenschaften oft nicht möglich. Eine Approximierung wird durchgeführt, in dem man z.B. das Potential der Ladungsverteilung in Summanden zerlegt, die mit verschiedenen Potenzen bei wachsender Entfernung vom Ladungsschwerpunkt $\vec{r}$ abfallen.

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\underbrace{\frac{q}{r}}_{\sim\frac{1}{r}} + \underbrace{\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}}_{\sim\frac{1}{r^2}} + ...\right] \tag{1.2.9}$$

Der erste Term beschreibt das Potential einer Punktladung, der zweite das eines elektrischen Dipols. Höhere Potenzen werden hier vernachlässigt.

1.3 Kondensatoren und Kapazität

1.3.1 Oberflächenladungsdichte

Die Oberflächenladungsdichte σ ist definiert als

$$\sigma = \frac{Q}{A} \tag{1.3.1}$$

Bei einem geladenen, leitenden (realen) Körper verteilen sich spontan die Ladungen auf der Körperoberfläche, und im Inneren ist die elektrische Feldstärke gleich Null (Faraday'scher Käfig). Außerhalb und in unmittelbarer Nähe des Körpers stehen hingegen die Feldlinien senkrecht zur Oberfläche. Unter Verwendung des Gauß'schen Gesetzes erhält man somit das elektrische Feld an der Oberfläche eines leitenden Körpers.

$$\oiint_{\partial V} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = E \cdot A = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \tag{1.3.2}$$

Bemerkung: Diese Gleichung gilt jedoch nicht für unendlich dünne geladene Flächen. In diesem Fall ergibt sich aus der linken Seite des Gaußschen Gesetzes $E \cdot 2A$ (auf beiden Seiten der Oberfläche herrscht nun ein senkrechtes elektrisches Feld) und es gilt

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

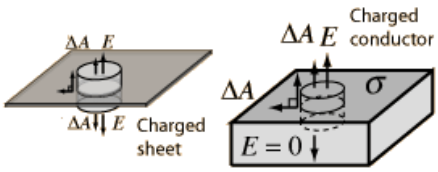

Abbildung 1.2: Elektrische Felder an Oberflächen[2]

1.3.2 Kapazität

Zwei entgegengesetzt geladene Leiterflächen bilden einen sogenannten **Kondensator**. Für die Ladung auf den Platten ($+Q$ auf der positiven Platte, $-Q$ auf der negativen) und die Spannung zwischen diesen gilt folgende Beziehung

$$\boxed{Q = C \cdot U} \tag{1.3.3}$$

Die Proportionalitätkonstante C wird Kapazität des Kondensators genannt.

$$[C] = 1\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{V}} = 1\,\mathrm{F} = 1 \text{ Farad}$$

1.3.3 Plattenkondensator

Für die Kapazität eines Plattenkondensators mit Plattenfläche A und Plattenabstand d gilt

$$C = \varepsilon_0 \cdot \frac{A}{d} \tag{1.3.4}$$

Für das (homogene) elektrische Feld zwischen den Platten gilt

$$E = \frac{U}{d} \tag{1.3.5}$$

1.3.4 Kugelkondensator

Lädt man zwei konzentrische Kugelflächen mit den Radien R_1, R_2 mit den Ladungen $+Q$ bzw. $-Q$, erhält man einen sogenannten Kugelkondensator. Für die Spannung zwischen den Platten gilt

$$U = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{R_2 - R_1}{R_1 \cdot R_2} \tag{1.3.6}$$

Für die Kapazität gilt somit

$$C = \frac{Q}{U} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 \cdot R_2}{R_2 - R_1} \tag{1.3.7}$$

Lässt man darüber hinaus R_2 gegen unendlich laufen, so erhält man die **Kapazität einer geladenenen, leitenden Kugel** (mit Radius r und $\phi(\infty) = 0$)

$$C = 4\pi\varepsilon_0 r \tag{1.3.8}$$

1.3.5 Energie geladener Kondensatoren

Für die Arbeit (Energie), die nötig ist, um die Ladung eines Kondensators von 0 auf Q zu bringen (bzw. um die Spannung auf einen Wert U aufzuladen), gilt folgende Gleichung

$$\boxed{W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2} \qquad (\mathbf{1.3.9})}$$

Im Fall von Plattenkondensatoren ist die Energiedichte, definiert als Energie pro Volumeneinheit

$$w_{el} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \tag{1.3.10}$$

1.3.6 Kondensatorenschaltungen

Für ein Netz an Kondensatoren kann man eine sog. äquivalente (gesamte) Kapazität ausrechnen. Würde man die gesamte Kondensatorschaltung mit einem einzigen Kondensator ersetzen, und dabei die (von einer Ladungsquelle) aufgenommene Ladung der ersetzten Kapazitäten gleich groß halten, müsste der Ersatzkondensator die Kapazität C_{ges} haben.

- **Parallelschaltung**

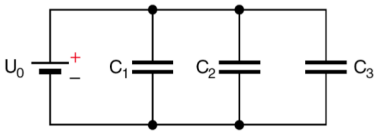

Abbildung 1.3: Schaltbild einer Parallelschaltung von Kondensatoren[1]

$$U_1 = U_2 = U_3 = U_0$$
$$Q_{ges} = Q_1 + Q_2 + Q_3 \tag{1.3.11}$$

$$\boxed{C_{ges} = \frac{Q_{ges}}{U_0} = \sum_i C_i \qquad \textbf{(1.3.12)}}$$

- **Serienschaltung**

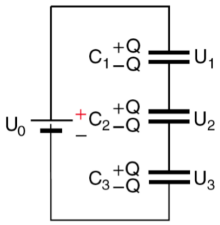

Abbildung 1.4: Schaltbild einer Serienschaltung von Kondensatoren[1]

$$Q = Q_1 = Q_2 = Q_3$$
$$U_0 = U_1 + U_2 + U_3 \tag{1.3.13}$$

$$\boxed{\frac{1}{C_{ges}} = \frac{U_0}{Q} = \sum_i \frac{1}{C_i} \qquad \textbf{(1.3.14)}}$$

1.4 Dielektrika im elektrischen Feld

1.4.1 Polarisation

Wird ein elektrischer Isolator, den man in diesem Fall als Dielektrikum bezeichnet, in ein elektrisches Feld eingeführt, so richten sich die Partialladungen innerhalb der einzelnen Moleküle gemäß des elektrischen Feldes aus.

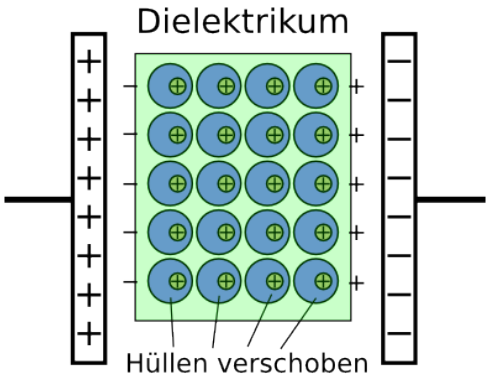

Abbildung 1.5: Ausrichtung der Moleküle[16]

Aus diesem Grund verhalten sich die Moleküle wie kleine Dipole, die durch die übliche Formel $\vec{p} = q\vec{d}$ beschrieben werden, wobei d der Abstand und q die Stärke der Partialladungen ist. Da eine Betrachtung der einzelnen Dipole für unsere makroskopische Beschreibung nicht nötig ist, mitteln wir die Wirkung der Ladung bzw. der Dipole im

Material über das Volumen. Die Summe der Dipole pro Volumen wird als Polarisierung $\vec{P}$ bezeichnet und ist wie folgt definiert.

$$\vec{P} = \frac{1}{V} \sum_i \vec{p_i} \tag{1.4.1}$$

Es zeigt sich, dass diese Polarisierung direkt proportional zum elektrischen Feld im Dielektrikum $\vec{E}_D$ ist.

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}_D \tag{1.4.2}$$

wobei χ elektrische Suszeptibilität genannt wird. In den von uns betrachteten Fällen entspricht diese einem Skalar. Es gilt außerdem, mit der relativen (materialabhängigen) Dielektrizitätskonstante:

$$\chi = \varepsilon_r - 1 \quad \Rightarrow \quad \vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E}_D \tag{\textbf{1.4.3}}$$

Im Fall von inhomogenen Feldern ist dementsprechend auch $\vec{P}$ ortsabhängig. Genauso wie die freien Ladungen im Vakuum die Ursache und somit die Quelle (Divergenz) des elektrischen Feldes sind, sind die polarisierten Ladungen die Quelle der Polarisierung. Man kann also analog zur differentiellen Form des Gauß'schen Gesetzes den Zusammenhang

$$\operatorname{div} \vec{P} = \varrho_{pol} \tag{1.4.4}$$

schreiben. Mit dem Gauß'schen Gesetz lässt sich zeigen, dass die auf den Oberflächen des Dielektrikums erzeugte Flächenladungsdichte mit dem Betrag der Polarisierung übereinstimmt.

$$\sigma_{pol} = |\vec{P}| \tag{1.4.5}$$

1.4.2 Feldgleichungen in Materie

Im Dielektrikum sind die Dipole dem äußeren elektrischen Feld $\vec{E}_V$, wie in Abbildung 1.5 zu sehen, entgegengerichtet. Demnach baut sich dort ein ebenfalls entgegengerichtetes elektrischen Feld $\vec{E}_P$ auf. Dieses ist proportional zur Polarisierung.

$$\vec{E}_P = -\frac{\vec{P}}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad |\vec{E}_P| = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \tag{1.4.6}$$

Für das resultierende Feld innerhalb des Dielektrikums gilt dann:

$$\vec{E}_D = \vec{E}_V + \vec{E}_P = E_V - \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0} \tag{1.4.7}$$

Es folgt mithilfe von Gleichung 1.4.2 die Beziehung zwischen elektrischen Feld im Vakuum und im Dielektrikum:

$$\boxed{\vec{E}_D = \frac{1}{1+\chi}\vec{E}_V = \frac{\vec{E}_V}{\varepsilon_r} \qquad (\textbf{1.4.8})}$$

Da ε_r im Allgemeinen größer als 1 ist, ist das elektrischen Feld im Dielektrikum schwächer als im Vakuum. Dies lässt sich leicht mithilfe des oben besprochenen Feldes im Dielektrikum, das durch die Polarisierung aufgebaut wird und dem äußeren Feld entgegenrichtet ist, erklären.

1.4.3 Die dielektrische Verschiebung

Die Hilfsgröße, die zur Beschreibung von elektrischen Feldern in Materie ist, wird dielektrische Verschiebung $\vec{D}$ genannt und ist wie folgt definiert.

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}_D + \vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E}_D + \varepsilon_0 \chi \vec{E}_D = \varepsilon_0 (1+\chi) \vec{E}_D = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}_D \qquad \textbf{(1.4.9)}}$$

$$[D] = [\epsilon_0 E] = 1\,\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{m}^2} = 1\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}$$

Die zur Grenzfläche des Dielektrikums parallele Komponente der dielektrischen Verschiebung springt um den Faktor ε_r an den Grenzflächen.

$$\vec{D}_{||,V} = \frac{1}{\varepsilon_r} \vec{D}_{||,D} \qquad \textbf{(1.4.10)}$$

1.4.4 Kapazität eines Kondensators mit Dielektrikum

Die Kapazität eines mit Dielektrikum gefüllten Kondensators ist um einen Faktor ε_r größer als die eines leeren.

$$E_D = \frac{U}{d} \qquad \text{und} \qquad E_D = \frac{E_V}{\varepsilon_r} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{Q/A}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

$$\Rightarrow \quad C = \frac{Q}{U} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{A}{d} = \varepsilon_r C_V \qquad \textbf{(1.4.11)}$$

1.4.5 Feldenergie im Dielektrikum

Um die gespeicherte Energie in einem Plattenkondensator mit Dielektrikum zu erhalten, setzen wir die Formel $U = Ed$ sowie $C = \varepsilon_0 \varepsilon_r A/d$ in die Energieformel ein.

$$W_{el} = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_r \varepsilon_0 A d E^2 \qquad \textbf{(1.4.12)}$$

Der Kondensator hat ein Innenvolumen von $V = Ad$, also folgt für die Energiedichte:

$$\omega_{el} = \frac{W_{el}}{V} = \frac{1}{2} \varepsilon_r \varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} E D \qquad \textbf{(1.4.13)}$$

Dies weist darauf hin, dass nun mehr Energie im Kondensator gespeichert wird, denn nun werden nicht nur die Ladungen auf der Kondensatoroberfläche gehalten, sondern auch die Partialladungen in ihrem verschobenen Zustand.

Abbildungsquellen

(1) Hugel, Thorsten (2013): Vorlesungsskript Experimentalphysik 2, München

(2) hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/electric/gausur.html

(16) schule.promathika.de/index.php?n=PhysikSkript.Kapitel12