

Ferienkurs Quantenmechanik - Aufgaben Sommersemester 2014

Fabian Jerzembeck und Christian Kathan
Fakultät für Physik
Technische Universität München
10. September 2014

Drehimpuls und Spin

Drehimpuls

Aufgabe 1 (*) *Beweise die Relationen*

$$[L_+, L_-] = 2\hbar L_z, \quad [L_z, L_\pm] = \pm\hbar L_\pm, \quad [L^2, L_\pm] = 0$$

mithilfe von den Vertauschungsrelationen für den Drehimpuls: $[L_i, L_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}L_k$

Aufgabe 2 (*) *Wir bezeichnen die simultanen Eigenkets von L^2 und L_z mit $|l, m\rangle$, $l \in \mathbb{N}$ und $-l \leq m \leq +l$. Für die Auf- und Absteigeoperatoren des Drehimpulses $L_\pm = L_x \pm iL_y$ gilt*

$$L_\pm |l, m\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)} |l, m \pm 1\rangle$$

Drücke L_x und L_y durch L_\pm aus und zeige die Relationen

$$\langle l, m | L_x L_y + L_y L_x | l, m \rangle = 0$$

$$\langle l, m | L_x^2 - L_y^2 | l, m \rangle = 0$$

Aufgabe 3 (*) Der Hamiltonoperator eines starren Rotators in einem Magnetfeld ist gegeben durch

$$H = \frac{L^2}{2\Theta} + \gamma \vec{L} \cdot \vec{B}.$$

Dabei ist \vec{L} und \vec{B} das angelegte Magnetfeld. Θ (das Trägheitsmoment) und γ (der gyromagnetische Faktor) sind Konstanten. Das Magnetfeld ist konstant in z -Richtung: $\vec{B} = B\vec{e}_z$.

Wie lauten Energieeigenzustände des Systems? Berechne die Energieeigenwerte.

Aufgabe 4 (**) Wir betrachten ein System in einem Eigenzustand zu \vec{L}^2 mit Eigenwert $2\hbar^2$, d.h. $l = 1$.

1. Bestimmen Sie, ausgehend von der bekannten Wirkung von Auf- und Absteigeroperatoren L_{\pm} , die Matrixdarstellung von L_x, L_y und L_z bezüglich der Standardbasis $|l, m\rangle$.
2. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeitsdichte, ausgedrückt in Kugelkoordinaten mit θ und φ , für ein System in einem Eigenzustand zu \vec{L}^2 und L_x mit den Quantenzahlen $l = 1$ und $m_x = 1$.

Probleme in 3 Dimensionen

Aufgabe 5 (*) Die normierten Wasserstoffeigenfunktionen für maximalen Bahndrehimpuls $l = n - 1$ sind von der Form:

$$\Psi_{n,n-1,m}(\vec{r}) = \frac{u_{n,n-1}(r)}{r} Y_{lm}(\vartheta, \varphi), \quad u_{n,n-1}(r) = \sqrt{\frac{2}{n(2n)!a_B}} \left(\frac{2r}{na_B}\right)^n e^{-\frac{r}{na_B}}$$

mit $a_B = \frac{\hbar}{m_e \alpha c}$.

- a) Bestimme den Abstand r_{max} an dem die radiale Wahrscheinlichkeitsdichte $P(r) = |u_{n,n-1}(r)|^2$ maximal wird und vergleiche r_{max} mit dem Mittelwert $\langle r \rangle$.
- b) Berechne $\Delta r = \sqrt{\langle r^2 \rangle - \langle r \rangle^2}$. Wie hängt die relative Abweichung $\frac{\Delta r}{\langle r \rangle}$ von der Hauptquantenzahl n ab? Das Ergebnis verdeutlicht, dass für große n die Vorstellung einer Kreisbahn zulässig ist.

Tipp: $\int_0^\infty dx x^q e^{-x} = q!$.

Aufgabe 6 (**) *Behandlung des dreidimensionalen harmonischen Oszillators in Kugelkoordinaten: Der Hamiltonoperator lautet*

$$H = -\frac{\hbar^2}{2M}\Delta + \frac{M}{2}\omega^2 r^2.$$

- Reduziere die stationäre Schrödingergleichung auf eine Radialgleichung mit dem üblichen Ansatz $\Psi(\vec{r}) = \frac{u(r)}{r} Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$. Vereinfache sie durch die Substitution mit den dimensionslosen Größen $y = r\sqrt{\frac{M\omega}{\hbar}}$ und $\epsilon = \frac{E}{\hbar\omega}$.
- Zeige, dass das asymptotische Verhalten durch den Ansatz $u(y) = y^{l+1} e^{-y^2/2} v(y^2)$ berücksichtigt wird und bestimme die verbleibende Differentialgleichung für $v(y^2)$.
- Schreibe die DGL aus b) um, in eine DGL für $v(\rho)$ mit der Variablen $\rho = y^2$.
- Setze eine Potenzreihe für $v(\rho)$ an. Die Abbruchbedingung liefert das Energiespektrum $E_{nl} = \hbar\omega(2n + l + \frac{3}{2})$ mit Quantenzahlen n, l .

Spin

Aufgabe 7 (**) *Wir betrachten den Spin eines Elektrons im magnetischen Feld \vec{B} . Der Hamiltonoperator lautet*

$$H = -\left(\frac{e}{m_e c}\right) \vec{S} \cdot \vec{B}$$

Wir wählen ein konstantes Magnetfeld in z -Richtung. Der Hamiltonoperator ist also gegeben durch

$$H = \omega S_z \quad \text{mit} \quad \omega = \frac{|e|B}{m_e c}.$$

- Was sind die Energieeigenwerte und Eigenzustände des Systems?
- Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich das System in dem Zustand

$$|\alpha; t = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |-\rangle$$

(dem $|S_x; +\rangle$ Eigenzustand der S_x -Komponente). Benutze die zeitabhängige Schrödingergleichung

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\alpha; t\rangle = H |\alpha; t\rangle$$

um $|\alpha; t\rangle$ zu bestimmen.

- Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich das Elektron zum Zeitpunkt t wieder im Zustand $|S_x; +\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |-\rangle$ befindet. Wie groß ist also $|\langle S_x; + | \alpha; t \rangle|^2$?

Aufgabe 8 (**)(Vgl. Vorlesung) Zeige, dass

$$|\vec{\Omega}, +\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\varphi/2} |+\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{+i\varphi/2} |-\rangle$$

einen Eigenzustand zum Projektionsoperator

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{\Omega}$$

darstellt.

Aufgabe 9 (*) Ein Elektron befinde sich in einem Spinzustand

$$\chi = A \begin{pmatrix} 1 - 2i \\ 2 \end{pmatrix} = A((1 - 2i) |+\rangle + 2 |-\rangle)$$

bezüglich zu den Eigenzuständen von S_z .

1. Bestimmen Sie die Konstante A , sodass χ korrekt normiert ist.
2. Messen Sie S_z bei diesem Elektron. Welche Werte können Sie prinzipiell erhalten? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für jeden dieser möglichen Werte? Was ist der Erwartungswert von S_z ?
3. Messen Sie S_x bei diesem Elektron. Welche Werte können Sie prinzipiell erhalten? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für jeden dieser möglichen Werte? Was ist der Erwartungswert von S_x ?

Aufgabe 10 (**) Wir koppeln zwei $1/2$ Spins und bezeichnen die Eigenzustände zum Gesamtspinoperator S^2 mit $|s = 0, 1, m\rangle$. Wir definieren analoge Auf- und Absteiger $S_{\pm} := S_{1\pm} + S_{2\pm}$.

1. Wenden Sie S_- auf den Triplet-Zustand $|s = 1, m = 0\rangle$ an und zeigen Sie damit, dass $\sqrt{2}\hbar |1, -1\rangle$ folgt.
2. Wenden Sie S_{\pm} auf den Singlet-Zustand $|s = 0, m = 0\rangle$ an und zeigen Sie damit, dass es keine weiteren Singlet-Zustände gibt.
3. Zeigen Sie, dass $|1, 1\rangle$ und $|1, -1\rangle$ Eigenzustände von S^2 mit den erwarteten Eigenwerten sind.