1 Mechanik starrer Körper

1.1 Einführung

Bisher war die Mechanik auf Massepunkte beschränkt. Nun gehen wir den Schritt zu starren Körpern. Ein starrer Körper ist ein System aus Massepunkten, welche nicht gegeneinader verschiebbar sind. Dies bedeutet für beliebige Massepunkte an den Orten r_i und r_k:

$$|r_i - r_k| = konst \tag{1}$$

während des gesamten Mechanischen Vorgangs. Der erste Unterschied zu Massepunkten besteht in der Anzahl der Freiheitsgrade. Ein Massepunkt im $\mathbb{R}^3$ hat 3 Freiheitsgrade, nämlich die Raumkoordinaten. Bei einem System aus n freien Massepunkten im $\mathbb{R}^3$ hat man $3n$ Freiheitsgrade. Bei einem Starren Körper ist es, durch die oben genannte Zusatzbedingung, egal aus wievielen Massepunkten er besteht, er hatt im $\mathbb{R}^3$ 6 Freiheitsgrade, welche natürlich durch Zwangsbedingungen weiter eingeschränkt werden können. Die Freiheitsgrade setzen sich Zusammen aus den Ortskoordinaten im $\mathbb{R}^3$ und der Drehung im $\mathbb{R}^3$. Die mathematische Herleitung der 6 Freiheitsgrade können sie im Vorlesungsskript nachlesen.

1.2 Schwerpunkt

Eine wichtige Größe bei starren Körpern ist der Schwerpunkt, da man viele Größen wie z.B die Translationsenergie (siehe weiter unten) dadurch berechnen kann, in dem man den starren Körper als Massepunkt am Schwerpunkt annimmt. Der Ort des Schwerpunktes r_s eines starren Körpers bestehend aus n Massepunkten an den Orten $\vec{r}_i$ mit Masse m_i berechnet sich wie folgt:

$$\vec{r}_s = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \vec{r}_i \tag{2}$$

1.3 Trägheitstensor

Da wir nun von Ausgedehnten Massen sprechen, muss bei der kinetischen Energie zusätzlich die Rotationsenergie berücksichtigt werden :

$$T = T_{trans} + T_{rot} \tag{3}$$

Wobei T_{trans} die Translationsenergie ist. Die Translationsenergie berechnet sich wie die kinetische Energie eines Massepunktes am Schwerpunkt des Starren Körpers. Der neue Teil ist nun die Rotationsenergie. Diese erechnet sich wie folgt:

$$T_{rot} = \sum_{i,j}^{3} \Theta_{ij} \omega_i \omega_j \tag{4}$$

Θ_{ij} nennt man Trägheitstensor. Anschaulich gewichtet der Trägheitstensor die Massepunkte mit ihrer Entfernung zur Drehachse. Er berechnet sich für n Massepunkte wie folgt:

$$\Theta_{ij} = \sum_{k=1}^{n} m_k(\vec{r}_k^2 \delta_{ij} - x_{ki}x_{kj}) \tag{5}$$

wobei x_{kj} die j-Ortskomponente vom Massepunkt k ist. Der Trägheitstensor hängt bei starren Körpern nicht von der Zeit ab, da die $\vec{r}_k$ per Definition zeitunabhängig sind. Außerdem ist der Trägheitstensor symmetrisch, es gilt also: $\Theta_{ij} = \Theta_{ji}$

1.4 kontinuierliche Masseverteilung

Wir betrachten weiterhin Starre Körper. Diese bestehen nun allerdings nicht mehr aus diskreten Massepunkten, sondern aus einer über den Körper verteilten Gesamtmasse. Um anzugeben wie die Masse verteilt ist benutzt man die sog. Massendichte ρ. ρ ist wie folgt definiert:

$$\rho(\vec{r}) = \frac{\Delta m}{\Delta V} \tag{6}$$

Die benötigten Größen erhält man, indem man die vorkommenden Summen in Integrale überführt:

1.4.1 Gesamtmasse

$$M = \int d^3\rho(\vec{r}) \tag{7}$$

1.4.2 Schwerpunkt

$$\vec{r}_s = \frac{1}{M}\int d^3\rho(\vec{r})\vec{r} \tag{8}$$

1.4.3 Trägheitstensor

$$\Theta_{ij} = \int d^3r\rho(\vec{r})[\vec{r}^2\delta_{ij} - x_ix_j] \tag{9}$$

Bei richtiger mathematischer Formulierung ergeben sich die Integralsgrenzen aus ρ, da die Dichte überall außerhalb des Körpers verschwindet. Dank des Trägheitstensors lässt sich das Trägheitsmoment bezüglich einer beliebigen Drehachse sehr leicht berechnen. Man benötigt einen Normierten Vektor($\vec{n}$) in Richtung der Drehachse:

$$\Theta_a = \vec{n}^T\Theta\vec{n} \tag{10}$$

1.4.4 Beispiel Würfel

Trägheitstensor eines Würfels der Kantenlänge k und der homogenen Dichte ρ_0. Die Ecke des Würfels liegt im Ursprung.

$$\rho(\vec{r}) = \Theta(k-x)\Theta(x)\Theta(k-y)\Theta(y)\Theta(k-z)\Theta(z)\rho_0 \tag{11}$$

$\Theta(x)$ ist die sogenannte Thetafunktion. Sie ist wie folgt definiert:

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \tag{12}$$

Einsetzen in die Formel für das kontinuierliche Trägheitsmoment:

$$\Theta_{xx} = \int_{\infty}^{\infty} d^3r\Theta(k-x)\Theta(x)\Theta(k-y)\Theta(y)\Theta(k-z)\Theta(z)\rho_0(\vec{r})[y^2+z^2] = \tag{13}$$

$$= \int_0^k \int_0^k \int_0^k \rho_0[y^2+z^2]dxdydz = \frac{2}{3}a^5\rho_0 \tag{14}$$

1.5 Satz von Steiner

Die oben genannte Formel zur berechnung des Trägheitstensors gilt nur, falls der Bezugspunkt für den Trägheitstensors gleich dem Schwerpunkt ist, da der Trägheitstensor nicht invariant gegenüber der Wahl des Bezugspunktes ist. Verschiebt man den Bezugspunkt um den (konstanten) Vektor $\vec{a}$, so verändert sich der Trägheitstensor wie folgt:

$$\Theta_{ij}^{(a)} = \Theta_{ij}^{(s)} + M(\delta_{ij}\vec{a}^2 - a_i a_j) \tag{15}$$

$\Theta_{ij}^{(s)}$ Ist der Trägheitstensor mit Bezugspunkt gleich dem Schwerpunkt und $\Theta_{ij}^{(a)}$ ist der Trägheitstensor mit neuem Bezugspunkt der um $\vec{a}$ verschoben ist.

1.6 Hauptträgheitsachsen

Da der Trägheitstensor eine reelle symmetrische 3x3-Matrix ist, lässt er sich diagonalisieren. Die Achsen des Orthonormalsystems, in welchem der Trägheitstensor eine Diagonalmatrix ist, nennt man Hauptträgheitsachsen. Die dazugehörigen Trägheitsmomente nennt man Hauptträgheitsmomente. Wie aus der linearen Algebra bekannt, sind die Hauptträgheitsmomente die Nullstellen des charakteristischen Polynoms. Des weiteren erfüllen die Hauptträgheitsmomente Θ'_x folgende Gleichungen:

$$\Theta'_x \geq 0 \tag{16}$$

$$\Theta'_1 + \Theta'_2 \geq \Theta'_3 \tag{17}$$

$$\Theta'_1 + \Theta'_3 \geq \Theta'_2 \tag{18}$$

$$\Theta'_2 + \Theta'_3 \geq \Theta'_1 \tag{19}$$

Die Hauptträgheitsachsen sind die Eigenvektoren des Trägheitstensors.

1.7 Drehimpuls

Eine weitere wichtige größe ist der Drehimpuls. Diesen benötigt man, da er in vielen fällen eine Erhaltungsgröße ist. Er berechnet sich wie folgt:

$$\vec{L} = \sum_{i,j=1}^{3} \Theta_{ij}\omega_j \vec{e}_i \tag{20}$$

Durch einen vergleich mit der Formel (4) sieht man, dass man die Rotationsenergie auch wie folgt berechnen kann:

$$T_{rot} = \frac{1}{2}\vec{\omega}\vec{L} \tag{21}$$

1.8 Trägheitsellipsoid

Um das Trägheitsellipsoid zu erhalten, ordnet man dem Trägheitsmoment eine Fläche im Raum zu:

$$1 = \sum_{j,i}^{3} \theta_{j,i} x_j x_i \tag{22}$$

Benutzt man als Koordinatensystem die Hauptträgheitsachsen, vereinfacht sich (22) zu:

$$1 = \sum_{i}^{3} \theta_i x_i^2 \tag{23}$$

Sei nun der Vektor $\vec{n}$ die Drehachse des Starren Körpers, und r der Abstand vom Bezugspunkt zum Schnittpunkt von $\vec{n}$ mit dem Trägheitsellipsoid, dann gilt:

$$r = \frac{1}{\sqrt{\Theta_n}} \tag{24}$$

1.9 Euler'sche Kreiselgleichungen

Um auf die euler'schen Kreiselgleichungen zu kommen, gehen wir zuerst vom raumfesten in ein Körperfestes Koordinatensystem über. Tut man dies, rgeben sich die Euler'schen Kreiselgleichungen:

$$\Theta_1\dot{\omega}_1 + (\Theta_3 - \Theta_2)\omega_3\omega_2 = M_1(t) \tag{25}$$

$$\Theta_2\dot{\omega}_2 + (\Theta_1 - \Theta_3)\omega_1\omega_3 = M_2(t) \tag{26}$$

$$\Theta_3\dot{\omega}_3 + (\Theta_2 - \Theta_1)\omega_2\omega_1 = M_3(t) \tag{27}$$

Nun hat man noch das Problem, dass alle Größen der Gleichungen im körperfesten koordinatensystem sind. Zur Transformation der raumfesten(x,y,z-Achse) in die körperfesten(x',y',z'-Achse) Koordinaten benutzt man die Eulerwinkel. Da auch das Körperfeste System ein Orthonormalsystem ist, lässt sich das körperfeste durch maximal 3 Drehungen mit dem raumfesten zur Deckung bringen. Diese 3 Drehwinkel sind die Eulerwinkel. Hierzu definiert man zuerst den Winkel ϕ. Dieser dreht das System um die z'-Achse. Durch ϕ bringt man die x'-Achse mit der sog. Knotenlinie, also der Schnittkante der x'-y'-Ebene mit der x-y-Ebene, zur Deckung. Der Winkel θ bringt dann die z' mit der z-Achse zur Deckung, und dreht das körperfeste System um die Knotenlinie. Zuletzt dreht noch der Winkel ψ um die z-Achse und bringt die x'-Achse und die y'-Achse mit der x bzw y Achse zur Deckung. Um die Koordinaten vom Raumfesten ins Körperfeste System

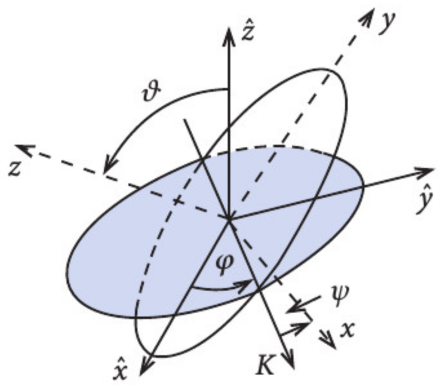

Abbildung 1: Eulerwinkel

zu Transformieren, benötigt man die sog. Drehmatrizen:

$$M = \begin{pmatrix} cos\phi cos\psi - sin\phi cos\theta sin\psi & sin\phi cos\psi + cos\phi cos\theta sin\psi & sin\theta sin\psi \\ -cos\phi sin\psi - sin\phi cos\theta cos\psi & -sin\phi sin\psi + cos\phi cos\theta cos\psi & sin\theta cos\psi \\ sin\phi sin\theta & -sin\theta cos\phi & cos\theta \end{pmatrix} \tag{28}$$

Natürlich sind die Eulerwinkel zeitlich nicht konstant, außer bei dem trivialen Fall, in dem sich der Körper nicht dreht. Sind nun aus den Euler'schen Kreiselgleichungen die Größen ω_1,ω_2 und ω_3 bekannt, lassen sich die Eulerwinkel mit folgenden Relationen berechnen:

$$\omega_1 = \dot{\phi} sin\theta sin\psi + \dot{\theta} cos\psi \tag{29}$$

$$\omega_2 = \dot{\phi} sin\theta cos\psi - \dot{\theta} sin\psi \tag{30}$$

$$\omega_3 = \dot{\phi} cos\theta + \dot{\psi} \tag{31}$$

Durch die Eulerwinkel ist nun die Lage des starren Körpers im Raum zu jeder Zeit bestimmt.

1.10 Beispiel 2

Es wirke das Drehmoment $\vec{M} = M_0\vec{e}_z$ auf einen Symmetrischen Kreisel ($\Theta_{11} = \Theta_{22}$) Lösen Sie die Bewegungsgleichung für die Anfangsbedingungen $\omega(0) = 0$ und $\vec{e}_3(0) = \vec{e}_z$. Geben sie Die Eulerwinkel an.

Ansatz: Drehimpuls:

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = \vec{M} = M_0\vec{e}_z \tag{32}$$

Hieraus folgt:

$$\vec{L}(t) = \sum_{i=0}^{3} \Theta_i\omega_i(t)\vec{e}_i(t) = tM_0\vec{e}_z \tag{33}$$

Wendet man (28) auf $\vec{e}_z$ an, erhält man den $\vec{e}_z$ Ausgedrückt durch die Eulerwinkel.

$$(L_1, L_2, L_3) = (\Theta_1\omega_1, \Theta_1\omega_2, \Theta_3\omega_3) = M_0\vec{e}_z = M_0t(sin\theta sin\psi, sin\theta cos\psi, cos\theta) \tag{34}$$

Dies sind 3 gekoppelte Differentialgleichungen. Die DGL für die x und die y Komponente ergeben, dass $\dot{\theta} = 0 => \theta(t) = konst.$. Aus der Anfangsbedingung folgt: $\theta(0) = 0 = \theta(t)$.Setzen wir das in die z-Komponente ein, erhalten wir als letzte Gleichung:

$$\Theta_3(\dot{\phi} + \dot{\psi}) = M_0t \tag{35}$$

Nun beschreiben beide Verbleibenden Winkel die Drehung um die Gleiche Achse, da $\theta = 0$. Hierdurch können wir Ohne beschränkung der Allgemeinheit einen der beiden Winkel 0 setzen:

$$\phi(t) = 0 \tag{36}$$

Nun folgt aus (35):

$$\dot{\psi}(t) = \frac{M_0}{\Theta_3}t \tag{37}$$

Hieraus folgt schließlich:

$$\psi(t) = \frac{M_0}{2\Theta_3}t^2 \tag{38}$$

Dieses Ergebniss passt sehr gut zu den Erwartungen, da es sich um eine beschleunigte Rotation um die Drehachse handelt, was bei konstantem Drehmoment zu erwarten ist(vgl Massepunkt mit konstanter Krafteinwirkung)