

Lagrange und Hamilton Mechanik

Übungen, die mit einem Stern \star markiert sind, werden als besonders wichtig erachtet.

2.1 3D Fadenpendel \star

Betrachten Sie ein Fadenpendel der Länge d , das in drei Raumrichtungen unter Einfluss der Schwerkraft frei schwingen kann. Die Masse des Pendelkörpers sei m , die Masse des Fadens zu vernachlässigen.

- Stellen Sie die Lagrangefunktion in Kugelkoordinaten auf.
- Ermitteln Sie die Symmetrien des Systems und die entsprechenden Erhaltungsgrößen.
- Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf.

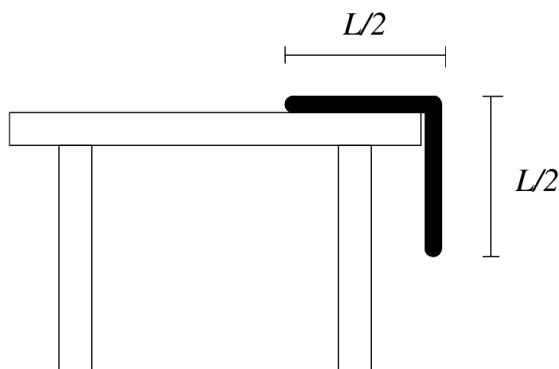
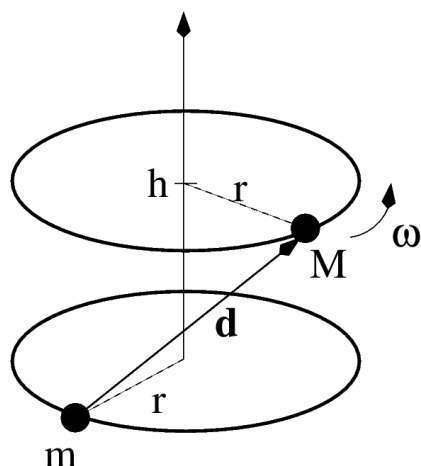
2.2 Teilchen im Kreiskegel \star

Eine Punktmasse m rollt reibungsfrei auf der Innenseite eines Kreiskegels unter dem Einfluss der Schwerkraft.

- Geben Sie explizit die Zwangsbedingungen an.
- Geben Sie die Lagrangefunktion an und stellen Sie die Bewegungsgleichung auf.

2.3 Punktmasse auf rotierendem Ring

Eine Punktmasse m kann sich reibungsfrei auf einem horizontalen Ring mit Radius r bewegen. Auf einem identischen horizontalen Ring, der sich oberhalb des ersten Ringes mit der Höhendifferenz h befindet, bewege sich eine weitere Punktmasse M mit einer (durch einen äußeren Zwang vorgegebenen) konstanten Winkelgeschwindigkeit ω . Zwischen den beiden Massen wirke eine durch ein Potential $V(d)$ definierte Kraft (d sei der Betrag des Abstandsvektors \mathbf{d} der beiden rotierenden Massen). Geben Sie die (explizit zeitabhängige!) Lagrangefunktion für die Punktmasse m an.



2.4 Rutschendes Seil*

Ein homogenes Seil der Länge L liegt zur Hälfte auf einem Tisch, die andere Hälfte hängt über der Tischkante. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird das Seil losgelassen und beginnt reibungsfrei hinunterzurutschen. Die lineare Massendichte sei μ .

- Bestimmen Sie die Lagrangefunktion.
- Stellen Sie die Bewegungsgleichung auf und integrieren Sie diese.

2.5 Perle auf Draht

Eine Perle gleite reibungsfrei und ohne äußere Kräfte auf einem Stab, der sich in der xy -Ebene mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um den Ursprung dreht. Stellen Sie die Bewegungsgleichung mit Hilfe der Lagrange-Gleichungen erster Art auf. Lösen Sie die Bewegungsgleichung. Führen Sie die Rechnungen in Zylinderkoordinaten durch. Wie lautet die Zwangskraft? Welche Bedeutung hat sie? Ist die Energie erhalten?