

Ferienkurs Experimentalphysik IV

Übung 3

Michael Mittermair und Daniel Jost

03.09.14

Aufgabe 1

Wie groß ist das Magnetfeld, das im Wasserstoff durch ein 1s-Elektron am Ort des Protons erzeugt wird? Die Hyperfeinstruktur ($\lambda = 21\text{cm}$) des 1s-Niveaus wird durch die unterschiedlichen Spineinstellungen verursacht. Das magnetische Moment eines Protons beträgt das 2,79-fache des Kernmagnetons.

Hinweis: Kernmagneton entspricht Bohrschem Magneton mit Protonen- statt Elektronenmasse

Lösung 1

Energie des magnetischen Moments im B-Feld

$$-\mu B = E \quad (1)$$

Energieabstand der Niveaus beträgt damit das Doppelte

$$\Delta E = 2\mu_P B = \frac{hc}{\lambda} \quad (2)$$

Das Magnetfeld ist dann gegeben durch

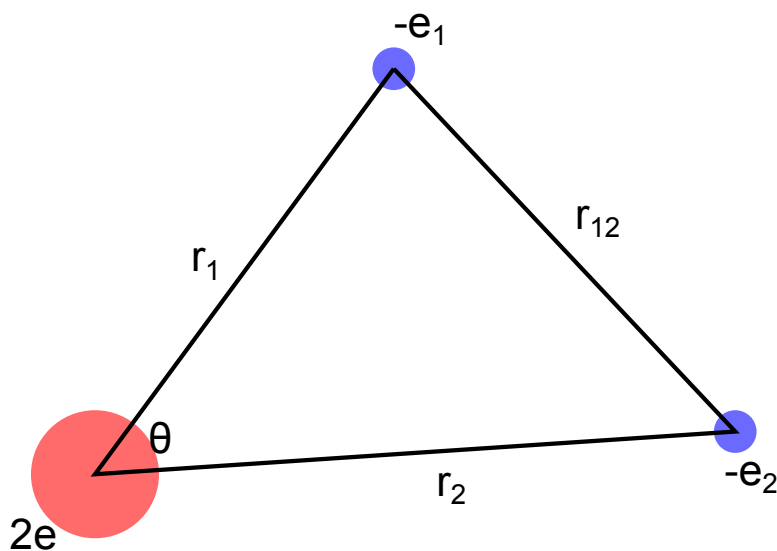
$$B = \frac{hc}{2\mu_P \lambda} = 33,5\text{T} \quad (3)$$

Aufgabe 2

Wie sieht das Potential für das zweite Elektron im He-Atom aus, wenn das erste Elektron durch eine 1s-Wellenfunktion beschrieben werden kann. Dabei soll die Wechselwirkung zwischen den beiden Elektronen nur summarisch berücksichtigt werden.

Hinweis: $\left(\Psi_{1s} = \frac{Z^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}a_0^{\frac{3}{2}}} e^{-Z\frac{r_1}{a_0}} \right)$

Lösung 2



Das Potential für das zweite Elektron im He-Atom ist:

$$\Phi(\vec{r}_2) = -\frac{Z \cdot e}{4\pi\epsilon_0 r_2} + \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{|\Psi_{1s}(r_1)|^2}{r_{12}} d\tau \quad (4)$$

Für die Integration über das Kugelvolumen gilt

$$d\tau = r_1^2 dr_1 \sin\Theta d\Phi \quad (5)$$

So lässt sich das Integral umformen zu

$$I = \int \frac{|\Psi_{1s}|^2}{r_{12}} r_1^2 \sin\Theta dr_1 d\Theta d\Phi \quad (6)$$

Und über Substitution mit den Relationen

$$r_{12}^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos\Theta \quad (7)$$

$$\Rightarrow r_{12}dr_{12} = r_1r_2\sin\Theta d\Theta \quad (8)$$

$$I = \frac{Z^3\pi}{\pi a_0} \left[\int_0^{r_2} dr_1 \frac{e^{-2Z\frac{r_1}{a_0}} r_1^2}{r_1 r_2} \int_{r_2-r_1}^{r_1+r_2} dr_{12} + \int_{r_2}^{\infty} dr_1 \frac{e^{-2Z\frac{r_1}{a_0}} r_1^2}{r_1 r_2} \int_{r_1-r_2}^{r_1+r_2} dr_{12} \right] \quad (9)$$

Dabei wurde beachtet, dass verschiedene Fälle für $r_1 < r_2$ und $r_1 > r_2$ gelten. Das Abstandsdifferential (dr_{12} muss für jeden dieser Fälle vom minimalen Wert $r_2 - r_1$ für $r_1 < r_2$ bzw. $r_1 - r_2$ für $r_1 > r_2$ bei $\Theta = 0$ bis zum Maximalwert $r_1 + r_2$ bei $\Theta = \pi$ integriert werden.

$$I = \frac{Z^3\pi}{\pi a_0} \left[\int_0^{r_2} dr_1 \frac{e^{-2Z\frac{r_1}{a_0}} r_1^2}{r_1 r_2} 2r_1 + \int_{r_2}^{\infty} dr_1 \frac{e^{-2Z\frac{r_1}{a_0}} r_1^2}{r_1 r_2} 2r_2 \right] \quad (10)$$

$$I = \frac{2Z^3}{a_0} \left[\int_0^{r_2} \frac{e^{-2Z\frac{r_1}{a_0}} r_1^2}{r_2} dr_1 + \int_{r_2}^{\infty} e^{-2Z\frac{r_1}{a_0}} r_1 dr_1 \right] \quad (11)$$

Ausgeführt ergibt sich

$$I_1 = \left(-\frac{r_2 a_0}{Z} - \frac{a_0^2}{Z^2} - \frac{a_0^3}{2r_2 Z^3} \right) e^{-2Z\frac{r_2}{a_0}} \quad (12)$$

und

$$I_2 = \left(\frac{a_0 r_2}{Z} + \frac{a_0^2}{2Z^2} \right) e^{-2Z\frac{r_2}{a_0}} \quad (13)$$

Als Potential erhält man mit $r = r_2$

$$\Phi(r) = -\frac{(Z-1)e}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Z}{a_0} + \frac{1}{r} \right) e^{-2Z\frac{r}{a_0}} \quad (14)$$

Für das Heliumatom gilt natürlich $Z = 2$.

Aufgabe 3

In wie viele Zustände spalten die angeregten 2P -Zustände des Natriums beim Anlegen schwacher bzw. starker Magnetfelder auf? Skizzieren Sie die Zustände und bezeichnen Sie sie mit ihren Drehimpuls und Spin-Quantenzahlen.

Lösung 3

Bei schwachen Magnetfeldern tritt der Zeeman-Effekt auf. Er spaltet die die 3P -Zustände in insgesamt 6 Zustände auf.

$^2P_{\frac{1}{2}}$ spaltet in $2j + 1 = 2$ Zustände auf mit den Quantenzahlen $m_j = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ und der Energie $\Delta E = \frac{2}{3}\mu_B B$

$^2P_{\frac{3}{2}}$ spaltet in $2j + 1 = 4$ Zustände auf mit den Quantenzahlen $m_j = -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ und der Energie $\Delta E = \frac{4}{3}\mu_B B$

Bei starken Magnetfeldern tritt der Paschen-Back Effekt auf. Die Energieaufspaltung geht mit der Formel $\Delta E = (m_l + 2 \cdot m_s) \cdot \mu_B B$

m_l	m_s	$\Delta E[\mu_B B]$
-1	$-\frac{1}{2}$	-2
-1	$+\frac{1}{2}$	0
0	$-\frac{1}{2}$	-1
0	$+\frac{1}{2}$	1
+1	$-\frac{1}{2}$	0
+1	$+\frac{1}{2}$	+2

Wir bekommen also zweimal die selbe Energie und somit insgesamt nur 5 Aufspaltungen.

Aufgabe 4

Bestimmen Sie mit Hilfe der Hundschen Regeln das $^{2S+1}L_J$ -Symbol für folgende Grundzustandskonfigurationen

- Kobalt mit $[Ar]3d^7 4s^2$
- Bor das 5 Elektronen hat
- Silizium $[Ne]3s^2 3p^2$
- Gold mit $[Xe]4f^{14} 5d^{10} 6s^1$
- Jod mit $[Kr]4d^{10} 5s^2 5p^5$
- Technetium $[Kr]4d^5 5s^2$

Lösung 4

a) Kobalt

2	1	0	-1	-2
$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$	\uparrow	\uparrow	\uparrow

Man sieht sofort:

$$S = \frac{3}{2} \quad L = 3$$

Schale ist mehr als halb voll $\rightarrow J = L + S = \frac{9}{2}$
wir erhalten insgesamt als Grundzustand ${}^4F_{\frac{9}{2}}$

b) Bor

1	0	-1
\uparrow		

$$S = \frac{1}{2} \quad L = 1 \quad J = L - S = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow {}^2P_{\frac{1}{2}}$$

c) Silizium

1	0	-1
\uparrow	\uparrow	

$$S = 1 \quad L = 1 \quad J = L - S = 2$$

$$\Rightarrow {}^3P_0$$

d) Gold

0
\uparrow

$$S = \frac{1}{2} \quad L = 0 \quad J = L - S = |0 - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow {}^2S_{\frac{1}{2}}$$

e) Jod

1	0	-1
$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$	\uparrow

$$S = \frac{1}{2} \quad L = 1 \quad J = L + S = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow {}^2 P_{\frac{3}{2}}$$

f) Technetium

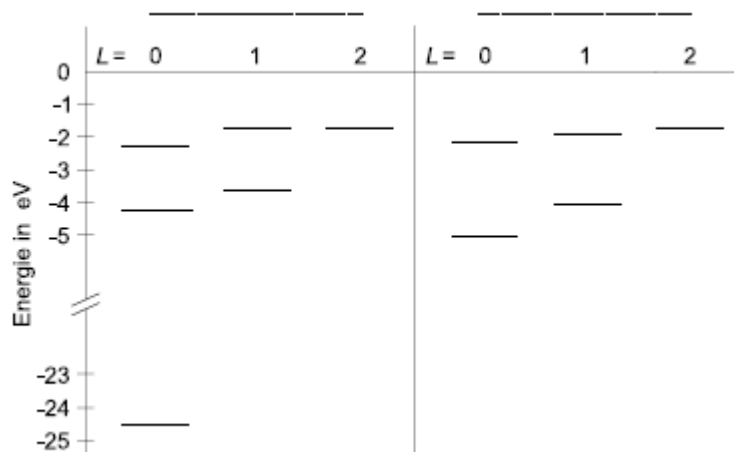
2	1	0	-1	-2
\uparrow	\uparrow	\uparrow	\uparrow	\uparrow

$$S = \frac{5}{2} \quad L = 0 \quad J = L - S = |0 - \frac{5}{2}| = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow {}^6 S_{\frac{5}{2}}$$

Aufgabe 5

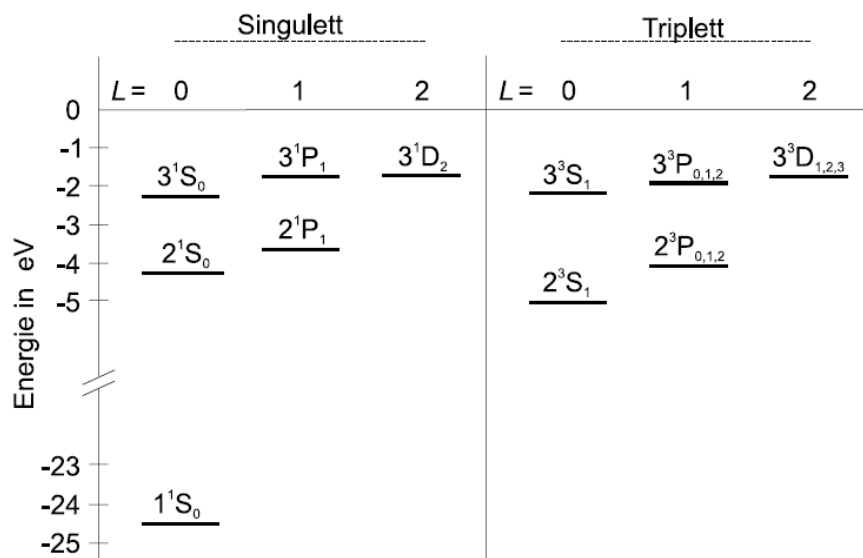
Die folgende Abbildung zeigt die niedrigsten Energieniveaus aus dem Termschema von Helium.



Gegeben sind Energien und Drehimpuls der Niveaus. Feinstruktur und weitere Korrekturen wurden nicht eingezeichnet.

- a) Beschriften Sie die Energieniveaus mit all ihren entsprechenden spektroskopischen Symbolen. Welches der beiden Schemata gehört zum Triplet und welches zum Singulett-Helium?
- b) Erläutern Sie den Unterschied zwischen dem Triplet- und Singulett-System des Helium-Atoms. Welches der beiden Systeme weist für $L \neq 0$ Feinstrukturaufspaltung auf? Begründen Sie Ihre Antwort.
- c) Warum gibt es keinen 1^3S_1 -Zustand? Geben Sie für diesen hypothetischen Zustand für beide Elektronen alle relevanten Quantenzahlen an.
- d) Warum werden die Übergänge $2^1S_0 \rightarrow 1^1S_0$ und $2^3S_1 \rightarrow 1^1S_0$ nicht beobachtet?

Lösung 5



- a)
- b) Singulett-System(links): Spins der beiden Elektronen koppeln zu $S = 0$, d.h. Spins der Elektronen sind antiparallel. Alle Terme im Parahelium sind einfach.
Triplet-System(rechts): Spins koppeln zu $S = 1$, d.h. Spins der beiden Elektronen sind parallel. Durch die LS-Kopplung kommt es im

Orthohelium zur Feinstrukturaufspaltung. Die Terme sind 3 fach aufgespalten.

- c) Es gilt $S = 1$, also $m_{s1} = m_{s2} = \frac{1}{2}$ Die Quantenzahlen für den 1^3S_1 -Zustand wären daher

	n	l	m_l	m_s
Elektron1	1	0	0	$+\frac{1}{2}$
Elektron2	1	0	0	$+\frac{1}{2}$

Das Pauliprinzip besagt jedoch dass keine zwei Fermionen in einem geschlossenen System einen identischen Satz von Quantenzahlen haben dürfen. Der Zustand ist somit verboten.

- d) $2^1S_0 \rightarrow 1^1S_0$:

Übergänge mit $J = 0 \rightarrow J = 0$ sind verboten.

$2^3S_1 \rightarrow 1^1S_0$:

Spinflips sind verboten, weil $\Delta S = 0$ verletzt würde. Interkombinationsverbot

Aufgabe 6

Radioaktives Tritium (3H) im Grundzustand wandelt sich durch β -Zerfall in ein $^3He^+$ -Atom um. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich das entstandene Helium im 1s-Zustand befindet. Die Grundzustandswellenfunktion von wasserstoffähnlichen Atomen ist gegeben durch

$$\Psi_{100} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{Z}{a_0} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{Zr}{a_0}} \quad (15)$$

Lösung 6

Die Wahrscheinlichkeit für einen Übergang auf Helium im Grundzustand ist durch das Quadrat des Überlapps der Wellenfunktionen gegeben.

$$W_{1s} = |\langle \Psi_{100}^Z, \Psi_{100}^{Z_0} \rangle|^2 \quad (16)$$

Wir bekommen

$$\langle \Psi_{100}^Z, \Psi_{100}^{Z_0} \rangle = \quad (17)$$

$$= \int_{R^3} d^3x (\Psi_{100}^Z)^* \Psi_{100}^{Z_0} = \quad (18)$$

$$= \frac{(ZZ_0)^{3/2}}{\pi a_0^3} \int_{R^3} d^3x e^{-(Z+Z_0)\frac{r}{a_0}} = \quad (19)$$

$$= \frac{4\pi(ZZ_0)^{3/2}}{\pi a_0^3} \underbrace{\int_0^\infty dr e^{-(Z+Z_0)\frac{r}{a_0}} r^2}_{\frac{2a_0^3}{(Z+Z_0)^3}} = \quad (20)$$

$$= \frac{8(ZZ_0)^{3/2}}{(Z+Z_0)^3} \quad (21)$$

Damit bekommen wir

$$W_{1s} = \frac{512}{729} \approx 0,702 \quad (22)$$

Aufgabe 7

- Wie groß ist die Dopplerbreite der Lyman- α -Linie des Wasserstoffatoms bei 300K?
- Ein kollimierter Strahl aus H-Atomen (Düsendurchmesser sei $50\mu m$, Abstand zur Kollimationsblende sei $d = 10cm$, Breite der Blende sei $b = 1mm$) wird hinter der Blende senkrecht mit einem monochromatischen durchstimmbaren Laser bestrahlt. Wie groß ist die restliche Dopplerbreite der Absorptionslinie?
- Man vergleiche die restliche Dopplerbreite mit der natürlichen Linienbreite ($\tau(2p) \approx 1,2ns$). Kann man damit die Hyperfeinstruktur des $1^2S_{\frac{1}{2}}$ Grundzustandes¹ auflösen?

Lösung 7

a)

$$\delta\nu_D = 7,16 \cdot 10^{-7} \nu_0 \cdot \sqrt{\frac{T}{M}} \cdot \sqrt{\frac{mol}{gK}} \quad (23)$$

Mit $T = 300K$, $M = 1\frac{g}{mol}$, $\nu_0 = 2,47 \cdot 10^{15}\frac{1}{s}$ folgt $\nu_D = 3,06 \cdot 10^{10}\frac{1}{s}$

$$\Rightarrow |\Delta\lambda_D| = \frac{c}{\nu^2} \delta\nu_D = 1,5 \cdot 10^{-3} nm \quad (24)$$

¹siehe Aufgabe 1

- b) Kollimationsverhältnis $\epsilon = \frac{b}{2d} = \frac{1}{200}$. Es passieren nur H-Atome die Blende, bei denen maximal 0,5% des Impulses senkrecht zur Hauptstrahlrichtung² und somit in Richtung unsres Lasers verlaufen. Die Dopplerverbreiterung wird damit stark reduziert.

$$\delta\nu_D = \frac{1}{200} 3,06 \cdot 10^{10} \frac{1}{s} = 1,5 \cdot 10^8 \frac{1}{s} = 150 MHz \quad (25)$$

- c) Die natürliche Linienbreite ist

$$\delta\nu_n = \frac{1}{2\pi\tau} = \frac{10^9}{2\pi \cdot 1,2 s} = 132 MHz \quad (26)$$

Die Hyperfeinaufspaltung beträgt $\lambda = 21 cm$ in der Wellenlänge und somit $\delta\nu_{HFS}(1s) = 1,4 GHz$. Sie ist also Energetisch um einen Faktor 5 größer als die Summe von natürlicher Linienbreite und Dopplerverbreiterung und kann somit gut aufgelöst werden.

Aufgabe 8

Man zeige durch Rechnung, dass das Dipolmatrixelement $M_{ik} = \int \Psi_i^* \mathbf{p} \Psi_k d\tau$ für einen Übergang von $1s \rightarrow 2s$ gleich Null ist.

Lösung 8

Es gilt mit $\vec{p} = e\vec{r}$

$$\begin{aligned} M_{ik} &= e \int \Psi_i^* \mathbf{r} \Psi_k d\tau = \\ &= \frac{e}{4\pi\sqrt{2}a_0^3} \cdot \int \left(2 - \frac{r}{a_0}\right) e^{-r/(2a_0)} \mathbf{r} e^{-r/(a_0)} d\tau = \\ &= a \int \int \int \left(2 - \frac{r}{a_0}\right) e^{-3r/(2a_0)} \mathbf{r} \cdot r^2 \sin\vartheta d\varphi d\vartheta dr \end{aligned}$$

Da \mathbf{r} immer noch als Vektor vorkommt müssen wir die Rechnung für die einzelnen Raumrichtungen durchführen. Wir bekommen für $x = r \sin\vartheta \cos\varphi$ und für $y = r \sin\vartheta \sin\varphi$ jeweils

$$M_{ik} \propto \int_0^{2\pi} \sin\varphi d\varphi = 0 \quad (27)$$

Für die z-Richtung erhalten wir mit $z = r \cos\vartheta$

$$M_{ik} \propto \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \sin\vartheta \cos\vartheta d\vartheta = 0 \quad (28)$$

²eigentlich mit $\sin\epsilon$, aber Kleinwinkelnäherung

³ weil symmetrisches Integral über antiymmetrische Funktion

Damit ist das Integral in jeder Raumrichtung Null und somit auch das Matrixelement