Merlin Mitschek, Verena Walbrecht

Ferienkurs

Experimentalphysik 2

Sommer 2014

Vorlesung 1

Thema: Elektrostatik

PHYSIK
DEPARTMENT

Inhaltsverzeichnis

1 Elektrostatik **3**

1.1 Elektrische Ladungen und Coulomb-Gesetz 3

1.2 Das elektrische Feld 3

1.3 Elektrostatisches Potential 6

1.4 Multipole 8

1.5 Leiter im elektrischen Feld 9

1.6 Dielektrika im elektrischen Feld 11

1 Elektrostatik

1.1 Elektrische Ladungen und Coulomb-Gesetz

Grundlagen:

- Es gibt zwei verschiedene Arten von Ladungen: **Positive** und **negative**;
  Unterschied durch ...
  ... Krafteinwirkung aufeinander.
  ... Ablenkung in elektrischen und magnetischen Feldern.
- Ladungen mit gleichem Vorzeichen stoßen sich ab, solche mit entgegengesetzten Vorzeichen ziehen sich an.
- Ladungen sind **immer** an **massive Teilchen** gebunden.
- Alle in der Natur vorkommende Ladungen Q sind ganzzahlige Vielfache der **Elektronenladung**[1].
- Die Maßeinheit der Ladung: [Q] = 1Coulomb = 1C = 1A s
- In einem abgeschlossenen System bleibt die Gesamtladung zeitlich konstant.
- Ein Ladungstransport stellt einen elektrischen Strom dar. Ein Ladungstransport ist immer mit einem Massentransport verbunden.

Coulomb-Gesetz:

Die Kraft, die zwischen zwei Ladungen wirkt, wird mit dem Coulomb-Gesetz beschrieben:

$$\boxed{\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}} \tag{1}$$

Hierbei ist $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \mathrm{A}^2\,\mathrm{s}^4\,\mathrm{kg}^{-1}\,\mathrm{m}^{-3}$ die **Dielektrizitätskonstante**.

1.2 Das elektrische Feld

Die Kraft, die eine Ladung Q im Nullpunkt des Koordinatensystems auf eine Punktladung q ausübt ist:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{Q \cdot q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \tag{2}$$

Das elektrische Feld, dass von der Ladung Q erzeugt wird, ist dann wie folgt definiert:

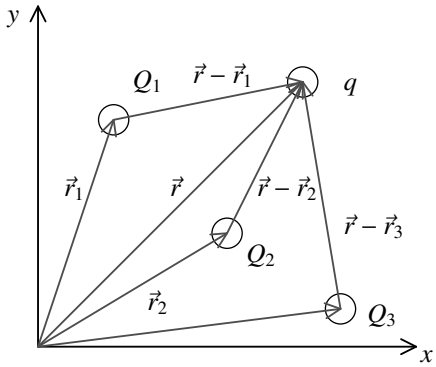
$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}} \tag{3}$$

[1] Ausgenommen sind die Bausteine der Hadronen, die Quarks. Diese existieren aber nicht als freie Teilchen.

mit der Dimension [E] = 1V m^{-1}.
Definitionsgemäß ist dann die Kraft, die auf die Ladung q wirkt:

$$\boxed{\vec{F} = q \cdot \vec{E}} \tag{4}$$

Bei mehreren Ladungen Q_i an den Orten r_i ergibt sich das elektrische Feld durch Vektoraddition:



$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} = \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}} \tag{5}$$

Kontinuierliche Ladungsverteilung:

Außer Punktladungen gibt es auch kontinuierliche verteilte Ladungen mit einer räumlichen **Ladungsdichte** $\varrho(\vec{r})$. Diese ist als Ladung pro Volumeneinheit definiert.
Die Gesamtladung ist somit:

$$Q = \int_V \varrho(\vec{r})\, \mathrm{d}V \tag{6}$$

Die Kraft zwischen der gesamten Ladung Q und q ist dann:

$$\boxed{\vec{F}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\vec{R} - \vec{r}}{|\vec{R} - \vec{r}|^3} \varrho(\vec{r})\, \mathrm{d}V} \tag{7}$$

Entsprechend ergibt sich für Flächen bzw. Linien die Flachen- ($\sigma(\vec{r})$) bzw. die Linienladungsdichte ($\lambda(\vec{r})$):

$$Q = \int_A \sigma\, \mathrm{d}A \quad \text{bzw.} \quad Q = \int_L \lambda\, \mathrm{d}L \tag{8}$$

Feldlinien:

Das elektrische Feld kann durch Feldlinien veranschaulicht werden: Die Richtung ist durch die

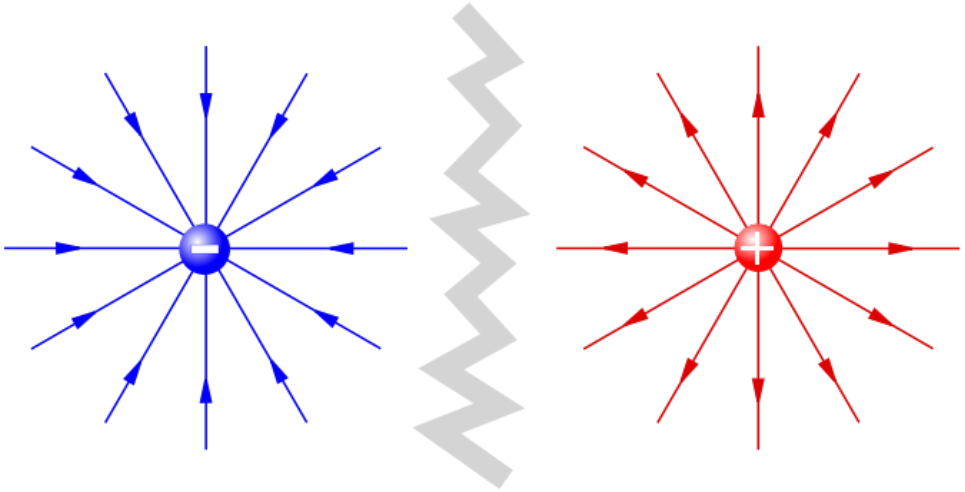


Abbildung 1: Kugelförmiges Coulombfeld einer positiven und negativen Punktladung.

Kraft auf die positive Punktladung definiert.
Elektrische Feldlinien zweier gleicher Ladungen Q_1 und $Q_2 = -Q_1$ (elektrischer Dipol):
Das elektrische Feld eines Dipols ist:

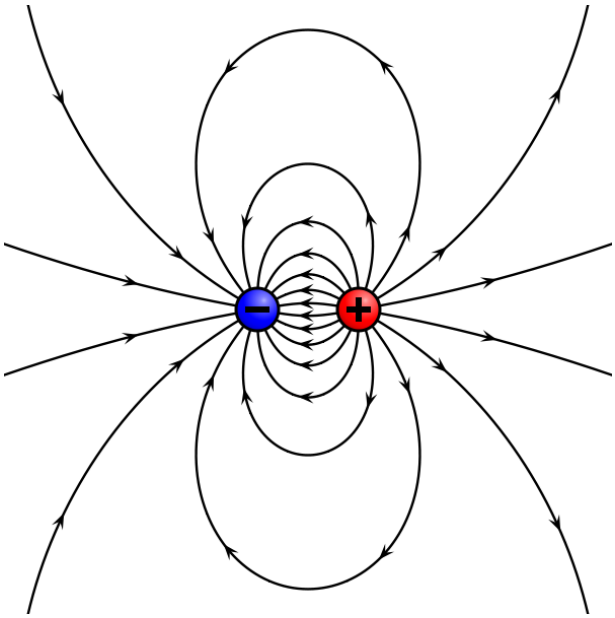


Abbildung 2: Elektrisches Feld eines Dipols.

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} - \frac{\vec{r}-\vec{d}}{|\vec{r}-\vec{d}|^3}\right]} \tag{9}$$

Elektrischer Fluss:

- Fläche, die Raum umschließt, in dem sich eine Punkt- oder Raumladung befindet.
- Elektrische Feldlinien dieser Ladung durchsetzen die Fläche A.
- Flächenelement $\mathrm{d}\vec{A}$ wird durch den nach außen zeigenden Flächennormalenvektor $\mathrm{d}\vec{A}$ charakterisiert.

Der **elektrische Fluss** $\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{el}}$ durch $\mathrm{d}\vec{A}$ ist:

$$\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{el}} = \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} \tag{10}$$

Durch Integration ergibt sich der gesamte elektrische Kraftfluss durch die Fläche A:

$$\boxed{\Phi_{\mathrm{el}} = \int_A \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A}} \tag{11}$$

Mathematisch kann mit Hilfe des **Gaußschen Satzes** zeigen, dass für jede geschlossene Oberfläche gilt:

$$\boxed{\Phi_{\mathrm{el}} = \int_A \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \int_{V(A)} \mathrm{div}\vec{E}\, \mathrm{d}V} \tag{12}$$

Hiermit ergibt sich für den gesamten elektrischen Fluss die Beziehung:

$$\boxed{\Phi_{\mathrm{el}} = \frac{1}{\epsilon_0} = \int \varrho\, \mathrm{d}V = \frac{Q}{\epsilon_0}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\mathrm{div}\vec{E} = \frac{\varrho}{\epsilon_0}} \tag{13}$$

Die im Raum verteilten Ladungen werden als Quellen bezeichnet, wenn $\varrho > 0$ und als Senken wenn $\varrho < 0$.

1.3 Elektrostatisches Potential

Wird eine Ladung q im elektrischen Feld von einem Punkt P_1 zu einem P_2 gebracht, so ist die entsprechende Arbeit:

$$\boxed{W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = q \cdot \int_{P_1}^{P_2} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r}} \tag{14}$$

Das elektrische Feld ist konservativ, d.h. das Integral ist wegunabhängig. Deshalb kann man jeden Raumpunkt $\vec{r}$ eine eindeutig definierte Funktion zuordnen. Diese wird als **elektrostatisches Potential** bezeichnet:

$$\boxed{\phi(\vec{r}) = \int_r^{\infty} \vec{E}(\vec{r})\, \mathrm{d}\vec{r}} \tag{15}$$

Die Potentialdifferenz zwischen zwei Punkten $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ nennt man die **elektrische Spannung**:

$$U = \phi(\vec{r}_1) - \phi(\vec{r}_2) = \int_{r_1}^{r_2} \vec{E}(\vec{r})\, \mathrm{d}\vec{r} \tag{16}$$

Potentialgleichung:

Ausgangspunkt ist die Definitionsgleichung für das elektrostatische Potential:

$$\phi(\vec{r}) = \int_r^\infty \vec{E}(\vec{r})\,\mathrm{d}\vec{r}$$

$$\Leftrightarrow \vec{\nabla}\cdot\phi(\vec{r}) = -\vec{E}(\vec{r}) \tag{17}$$

$$\Leftrightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{\varrho(\vec{r})}{\epsilon_0} \tag{18}$$

Somit folgt die **Poisson-Gleichung**:

$$\boxed{\Delta\phi = -\frac{\varrho}{\epsilon_0}} \tag{19}$$

Für $\varrho = 0$ ergibt sich die **Laplace-Gleichung**:

$$\boxed{\Delta\phi = 0 \quad \text{für} \quad \varrho = 0} \tag{20}$$

Äquipotentialflächen:

Als Äquipotentialfächen werden die Flächen bezeichnet, auf denen das Potential $\phi(\vec{r})$ konstant ist. Die Äquipotentialflächen stehen immer senkrecht auf den Feldlinien. Daher wird keine Ar-

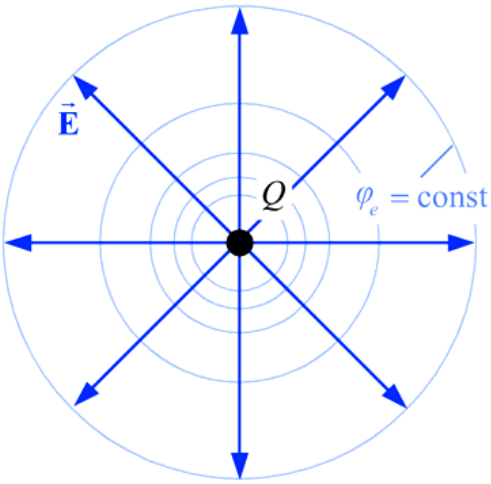
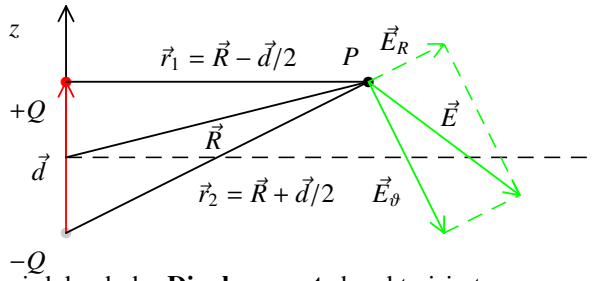


Abbildung 3: Elektrisches Feld einer Punktladung mit Äquipotentialflächen.

beit verrichtet, wenn Ladungen auf den Äquipotentialflächen verschoben werden.

1.4 Multipole

Der elektrische Dipol:



Ebene $z = 0$

Der elektrische Dipol wird durch das **Dipolmoment** charakterisiert:

$$\vec{p} = Q \cdot \vec{d} \tag{21}$$

Die elektrische Feldstärke $\vec{E}(\vec{R})$ und das Potential $\phi(\vec{R})$ in einem beliebigen Punkt $P(\vec{R})$ erhält man durch Überlagerung der Felder:

$$\phi_D(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{Q}{|\vec{R} - \vec{d}/2|} - \frac{Q}{|\vec{R} + \vec{d}/2|} \right) \tag{22}$$

Für R $\gg$ d gilt:

$$\frac{1}{|\vec{R} \pm \vec{d}/2|} = \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 \pm \frac{\vec{R}\cdot\vec{d}}{R^2} + \frac{d^2}{4R^2}}} = \frac{1}{R} \cdot \left(1 \mp \frac{1}{2} \frac{\vec{R} \cdot \vec{d}}{R^2} + \ldots \right) \tag{23}$$

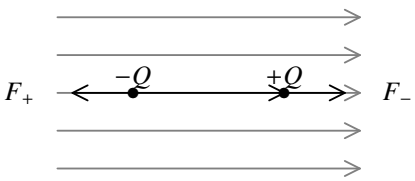
Somit erhält man die Näherung für das Potential des Dipols in großer Entfernung:

$$\boxed{\phi_D(\vec{R}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{d} \cdot \vec{R}}{R^3} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{R}}{4\pi\epsilon_0 R^3} = \frac{p \cdot \cos\vartheta}{4\pi\epsilon_0 R^2}} \tag{24}$$

Für das elektrische Feld erhält man:

$$\vec{E}(\vec{R}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^3} \left(3p \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|} \cdot \cos\vartheta - \vec{p} \right) \tag{25}$$

Dipol im homogenen Feld:



Liegen beide Ladungen +Q und −Q auf einer Äquipotentialfläche so ist die potentielle Energie eines Dipols null, da

$$\sum \vec{F} = 0$$

Bei beliebiger Lage des Dipols in einem homogenen elektrischen Feld bewirken die Kräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ ein Drehmoment:

$$\vec{D} = \vec{p} \times \vec{E} \tag{26}$$

Somit ergibt sich für die potentielle Energie des Dipols im homogenen äußeren elektrischen Feld:

$$E_{pot} = \int \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{s} = \int D\,\mathrm{d}\vartheta = \int |\vec{p}| \cdot |\vec{E}| \cdot \sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta = -|\vec{p}| \cdot |\vec{E}| \cdot \cos\vartheta = -\vec{p} \cdot \vec{E} \tag{27}$$

Das Drehmoment dreht den Dipol, bis die potentielle Energie minimiert ist. Die potentielle Energie ist minimal, wenn $\vec{p}$ und $\vec{E}$ parallel sind. (Die potentielle Energie wird maximal, wenn $\vec{p}$ und $\vec{E}$ antiparallel sind.)

Dipol im inhomogenen elektrischen Feld:

Im inhomogenen Feld wirkt auf den Dipol die Kraft:

$$\vec{F} = Q \cdot [\vec{E}(\vec{r} + \vec{d}) - \vec{E}(\vec{r})] = Q \cdot \vec{d} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{E}}{\mathrm{d}\vec{r}} = (\vec{p} \cdot \vec{\nabla})\vec{E} \tag{28}$$

Diese richtet ihn in Feldrichtung aus und zieht in in Richtung wachsender Feldstärke.

1.5 Leiter im elektrischen Feld

- Leiter in einem elektrischen Feld.
- Auf die frei beweglichen Ladungsträger wirkt die Kraft $F = q \cdot E$.
- Die Kraft verschiebt die Ladungen bis sich aufgrund der veränderten Ladungsverteilung ein Gegenfeld aufgebaut hat.
- Das Gegenfeld kompensiert kompensiert gerade das äußere Feld.
- Diese Ladungsverschiebung: **Influenz**.
- Desshalb ist das innere vom Leiter ist feldfrei.
- Die Ladungen sitzen auf der Oberfläche.

Kondensatoren:

Ein Kondensator ist eine Anordnung aus zwei entgegengesetzt geladenen Leiterflächen.
Das elektrische Feld im Raum zwischen den Leiterflächen ist ...

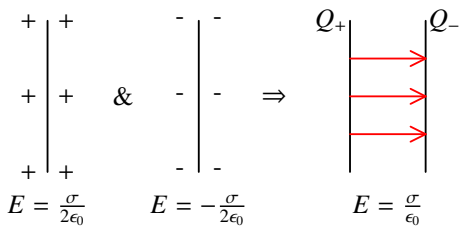
- ...$\propto$ zur Ladung Q
- ...$\propto$ zur Spannung U = $\int \vec{E}\mathrm{d}\,\vec{s}$

Dehalb gilt die Beziehung:

$$\boxed{Q = C \cdot U} \tag{29}$$

Die Proportionalitätskonstante C heißt **Kapazität** ($[C] = 1\,\mathrm{C\,V^{-1}} = 1\,\mathrm{F}$).

a) **Plattenkondensator:**



Für den Plattenkondensator gilt:

$$U = E \cdot d = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot d \overset{\sigma = Q/A}{=} \frac{d}{A\epsilon_0} \cdot Q \tag{30}$$

Mit $C = Q/U$ folgt dann:

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d} \tag{31}$$

b) **Kugelkondensator:**
Für einen Kugelkondensator gilt:

$$U = \phi_1 - \phi_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_1} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \tag{32}$$

Mit $C = Q/U$ folgt:

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \tag{33}$$

c) **Parallel- und Reihenschaltung von Kondensatoren:**
Schaltet man mehrere Kondensatoren parallel, so herrscht an allen Kondensatoren dieselbe Spannung [2]. Die Ladungen addieren sich und da $Q \propto C$ gilt:

$$\boxed{C = \sum_i C_i} \quad \text{für die Parallelschaltung} \tag{34}$$

Bei der Reihenschaltung von Kondensatoren werden die Ladungen getrennt, sodass auf zwei benachbarten, durch einen Leiter verbundenen Platten entgegengesetzt gleiche Ladungen sitzen. Die Spannungen verhalten sich additiv. Daher folgt für die Gesamtkapazität:

$$\boxed{\frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{C_i}} \quad \text{für die Reihenschaltung} \tag{35}$$

Die Energie des geladenen Kondensators:

Die Arbeit, die aufgebracht werden muss, um eine Ladung dQ zu verschieben ist:

$$\mathrm{d}W = U \cdot \mathrm{d}Q = \frac{Q}{C}\,\mathrm{d}Q \tag{36}$$

[2] Sonst würde Ladung fließen, bis die Spannung ausgeglichen ist.

Somit gilt für die Gesamtarbeit:

$$W = \int_0^Q \frac{Q}{C}\,\mathrm{d}Q = \frac{Q^2}{2C} \tag{37}$$

Mit $Q = C \cdot U$ ergibt sich dann die Energie des elektrostatischen Feldes:

$$\boxed{W_{el} = \frac{1}{2} C \cdot U^2} \tag{38}$$

Die Energiedichte des elektrischen Feldes ist wie folgt definiert:

$$w_{el} = \frac{W_{el}}{V} \tag{39}$$

1.6 Dielektrika im elektrischen Feld

Dielektrika = isolierender Stoff.

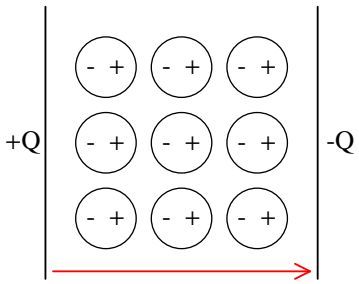
- Dielektrikum zwischen die Platten eines Kondensators:
  $\Rightarrow$ Spannung sinkt um den Faktor ϵ
- Da Q = const
  $\Rightarrow$ C um Faktor ϵ größer

Die Kapazität des Plattenkondensators ist dann:

$$\boxed{C_{Di} = \epsilon \cdot C_{Vac} = \epsilon\epsilon_0 \frac{A}{d}} \tag{40}$$

ϵ: **Dielektrizitätszahl**

Dielektrische Polarisation:



- Im elektrischen Feld verschieben sich die Ladungen im Dielektrikum
- Da die Ladungsträger nicht frei sind: Nur Verschiebung innerhalb des Atoms bzw. Moleküls
- Die Atome bzw. Moleküle werden zu elektrischen Dipolen (**Induzierte Dipole**)

- Vorgang: Polarisierung
- Induziertes Dipolmoment jedes Atoms: $\vec{p} = q \cdot \vec{d}$
- **Polarisation:** Vektorsumme der Dipolmomente aller Atome pro Volumeneinheit:

$$\boxed{\vec{P} = \frac{1}{V} \sum_i \vec{p}_i} \tag{41}$$

Polarisationsladungen:

Ladungsverschiebung im elektrischen Feld ⇒ Ladungen Q_{pol} an den Stirnflächen des Dielektrikums: **Polarisationsladungen**
Die Flächendichte ist:

$$\sigma_{pol} = \frac{Q_{pol}}{A} = \frac{\frac{N}{V} \cdot q \cdot d \cdot A}{A} = \frac{N}{V}|\vec{p}| = P \tag{42}$$

Im Dielektrikum überlagern sich das äußere Feld $E = \sigma_{frei}/\epsilon_0$ und das durch Polarisation entstandene entgegengerichtete Feld $E = \sigma_{pol}/\epsilon_0$:

$$\vec{E}_{Di} = \frac{\sigma_{frei} - \sigma_{pol}}{\epsilon_0} = \vec{E}_{vak} - \frac{\vec{P}}{\epsilon_0} \tag{43}$$

Außerdem gilt:

$$\vec{E}_{Di} = \frac{1}{\epsilon}\vec{E}_{vak} \tag{44}$$

Somit folgt dann mit (43) und (44):

$$\vec{P} = \underbrace{(\epsilon - 1)}_{=\chi} \epsilon_0 \vec{E}_{Di} \tag{45}$$

χ wird als **Suszeptibilität** bezeichnet.
Weiterhin wir die **Dielektrische Verschiebung** definiert:

$$\boxed{\vec{D} = \epsilon\epsilon_0\vec{E}_{Di} = \epsilon_o\vec{E}_{vak}} \tag{46}$$

Gespeicherte Energie und Dielektrikum:

Für die Energiedichte gilt:

$$w_{el}^D = \frac{W_{el}^D}{V} = \frac{C \cdot U^2}{2 \cdot A \cdot d} = \frac{\epsilon \cdot \epsilon_0}{2}E^2 = \frac{1}{2}E \cdot D \tag{47}$$

⇒ die Energiedichte sinkt mit Dielektrikum

Die Gleichungen des elektrostatischen Feldes in Materie:

Ohne Dielektrikum:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\varrho}{\epsilon_0} \tag{48}$$

In Materie kommen zu den freien Ladungen noch die entgegengesetzten Polarisationsladungen ϱ_{pol} dazu:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_{Di} = \frac{1}{\epsilon_0}(\varrho_{frei} + \varrho_{pol})$$

$$\Leftrightarrow \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{E}_{vak} - \frac{\vec{P}}{\epsilon_0}\right) = \frac{1}{\epsilon_0}(\varrho_{frei} + \varrho_{pol})$$

mit (48) und:

$$\Delta Q_{pol} = \int_A \sigma_{pol}\, \mathrm{d}\vec{A} = \int_A \vec{P} \mathrm{d}A = \int_V \vec{\nabla}\vec{P}\, \mathrm{d}V = -\int \sigma_{pol}\, \mathrm{d}V \;\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\varrho_{pol}$$

und (46) folgt dann:

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \varrho_{frei}} \tag{49}$$