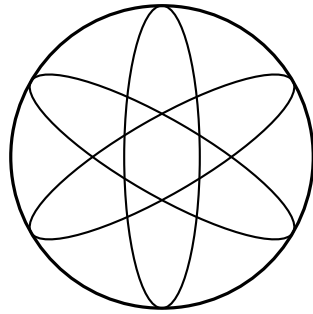


Ferienkurs Analysis 3 für Physiker



Übung: Integralsätze

Autor: Benjamin Rüth
Stand: 17. März 2014

Aufgabe 1 (Torus) Zu festem $R > 0$ werden mittels

$$T : [0, R] \times [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} \varrho \\ \varphi \\ \vartheta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (R + \varrho \cos \vartheta) \cos \varphi \\ (R + \varrho \cos \vartheta) \sin \varphi \\ \varrho \sin \vartheta \end{pmatrix}$$

Toruskoordinaten eingeführt. Bestimmen Sie

1.1 den Oberflächeninhalt des Torus $T_R^r := T([0, r] \times [0, 2\pi] \times [0, 2\pi])$ mit $r \in [0, R]$,

1.2 den Fluß des Vektorfeldes $v : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, v(x) = x$, durch die Oberfläche von T_R^r direkt,

1.3 den Fluß des Vektorfeldes $v : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, v(x) = x$, durch die Oberfläche von T_R^r mit Hilfe des **Satzes von Gauß**.

Lösung: (.1) Die Oberfläche von T_R^r wird beschrieben durch die Parametrisierung

$$x : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad x(\varphi, \vartheta) = T(r, \varphi, \vartheta).$$

Wir berechnen

$$x_\varphi = \begin{pmatrix} -(R + r \cos \vartheta) \sin \varphi \\ (R + r \cos \vartheta) \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_\vartheta = \begin{pmatrix} -r \sin \vartheta \cos \varphi \\ -r \sin \vartheta \sin \varphi \\ r \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

und daraus

$$x_\varphi \times x_\vartheta = r(R + r \cos \vartheta) \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \vartheta \\ \sin \varphi \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad |x_\varphi \times x_\vartheta| = r(R + r \cos \vartheta).$$

Damit erhalten wir für den gesuchten Flächeninhalt $F(M)$ der Torusoberfläche M :

$$F(M) = \iint_M 1 \, dO = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} r(R + r \cos \vartheta) \, d\varphi \, d\vartheta = 2\pi r [R\vartheta + r \sin \vartheta]_0^{2\pi} = 4\pi^2 Rr.$$

(.2) Der Fluß des Vektorfeldes $v : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, v(x) = x$, durch die Oberfläche M von T_R^r läßt sich mit Hilfe der Formel aus der Vorlesung berechnen:

$$\begin{aligned} \iint_M v \, dO &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} v(x(\varphi, \vartheta))^T (x_\varphi \times x_\vartheta) \, d\varphi \, d\vartheta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} r \left(Rr + (R^2 + r^2) \cos \vartheta + Rr \cos^2 \vartheta \right) \, d\varphi \, d\vartheta \\ &= 2\pi r \left[Rr\vartheta + (R^2 + r^2) \sin \vartheta + Rr \left(\frac{\vartheta}{2} + \frac{\sin(2\vartheta)}{4} \right) \right]_0^{2\pi} = 6\pi^2 Rr^2. \end{aligned}$$

(.3) Für die Integration von $\cos^2 \vartheta$ verwenden wir die Formelsammlung. Für das Vektorfeld v gilt $\operatorname{div}(v) = 3$. Daher erhalten wir für den Fluß von v durch die Oberfläche M des Torus T_R^r mit dem Satz von Gauß

$$\begin{aligned} \iint_M v \, dO &= \iiint_{T_R^r} \operatorname{div}(v) \, dV = \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} 3 \cdot |\det J_x(\varrho, \varphi, \vartheta)| \, d\vartheta \, d\varphi \, d\varrho \\ &= \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} 3\varrho(R + \varrho \cos \vartheta) \, d\vartheta \, d\varphi \, d\varrho = 3 \int_0^r \int_0^{2\pi} [\varrho R \vartheta + \varrho^2 \sin \vartheta]_{\vartheta=0}^{2\pi} \, d\varphi \, d\varrho \\ &= 12\pi^2 R \int_0^r \varrho \, d\varrho = 6\pi^2 R r^2. \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (Gauss) Berechnen Sie das Integral

$$I = \int_{\partial W} \begin{pmatrix} x^2 + e^{y^2+z^2} \\ y^2 + x^2 z^2 \\ z^2 - e^y \end{pmatrix} \cdot \mathbf{d}\sigma,$$

wobei W der Einheitswürfel mit den Ecken in $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$ und $(1, 1, 1)$.

Lösung: Auf herkömmlichem Wege müßten wir uns jetzt mit sechs Flächenintegralen herumschlagen, je eines für jede Würfelseite. Auch wenn es nicht schwer wäre, die Flächen zu parametrisieren und die Normalenvektoren zu ermitteln, wäre das Berechnen von sechs Doppelintegralen doch ein beachtlicher Aufwand. Versuchen wir es stattdessen lieber mit dem Satz von Gauß.

Unser Vektorfeld ist ja

$$v(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 + e^{y^2+z^2} \\ y^2 + x^2 z^2 \\ z^2 - e^y \end{pmatrix},$$

seine Divergenz ergibt sich also zu

$$\operatorname{div} v = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + e^{y^2+z^2}) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2 + x^2 z^2) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2 - e^y) = 2x + 2y + 2z.$$

Mit dem Satz von Gauß haben wir jetzt also nur noch ein Volumenintegral zu ermitteln:

$$\begin{aligned} I &= \iiint_W (2x + 2y + 2z) \, dV \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (2x + 2y + 2z) \, dx \, dy \, dz \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (2x + 2y + 1) \, dx \, dy \\ &= \int_0^1 (2x + 2) \, dx = 3. \end{aligned}$$

Aufgabe 3 (Gauß) Man bestätige den Satz von Gauß in der Ebene für die Funktion $u(x, y) = (x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}$:

$$\iint_B \Delta u \, dx dy = \oint_{\partial B} \langle \nabla u, n \rangle \, ds,$$

wobei B eine Kreisscheibe vom Radius R sei.

Lösung: Zuerst berechne man die benötigten Ableitungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 5x(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= 5y(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 15x^2(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} + 5(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 15y^2(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} + 5(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

und somit ist

$$\Delta u = 15(x^2 + y^2)(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} + 10(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} = 25(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Der nach außen deutende Normalenvektor von ∂B ist

$$n(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{pmatrix},$$

womit sich das folgende Skalarprodukt ergibt:

$$\langle \nabla u, n \rangle = \begin{pmatrix} 5x(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} \\ 5y(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{pmatrix} = 5(x^2 + y^2)^2.$$

Aufgrund der sphärischen Symmetrie von B bietet sich zur Berechnung der Integrale eine Transformation in Polarkoordinaten an. Für das Bereichsintegral erhält man

$$\iint_B \Delta u \, dx dy = \int_0^R \int_0^{2\pi} 25r^3 r \, dr d\phi = 50\pi \int_0^R r^4 \, dr = 10\pi R^5.$$

Der Rand von B lässt sich in Polarkoordinaten einfach parametrisieren. Für den Kreisbogen gilt $s = R\varphi$ und somit ergibt sich für das Randintegral

$$\oint_{\partial B} \langle \nabla u, n \rangle \, ds = \oint_{\partial B} 5(x^2 + y^2)^2 \, ds = 5 \oint_{\partial B} r^4 \, ds = 5R^5 \int_0^{2\pi} d\phi = 10\pi R^5.$$

Damit ist der Satz von Gauß für dieses Beispiel verifiziert.

Aufgabe 4 (Gauss) Man berechne mit Hilfe des Divergenzsatzes von Gauß das Flächenintegral

$$\iint_{\phi} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} \quad \text{für das Vektorfeld} \quad \mathbf{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} z^2 - x \\ -xy \\ 3z \end{pmatrix},$$

wobei ϕ die Oberfläche des Gebietes B ist, welches durch die Fläche $z = 4 - y^2$ und die drei Ebenen $x = 0$, $x = 3$, $z = 0$ begrenzt ist.

Lösung: Das durch die Flächen definierte Gebiet B hat die Form eines Tunnels mit parabelförmigem Querschnitt, welcher sich entlang der x -Achse erstreckt. Die x - y -Ebene bildet den Boden des Tunnels der bei $x = 0$ anfängt und bei $x = 3$ endet. Präzise formuliert handelt es sich um das dreidimensionale Normalgebiet

$$B = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 3, -2 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 4 - y^2\}.$$

Wendet man den Divergenzsatz von Gauß auf das Oberflächenintegral an, d. h.

$$\iint_{\phi} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \iiint_B \operatorname{div} \mathbf{v} \, dV,$$

so erhält man ein Volumenintegral welches sich bezüglich dieses Normalgebiets wie folgt berechnet

$$\begin{aligned} \iiint_{\Gamma} \operatorname{div} \mathbf{v} \, dV &= \iiint_{\Gamma} (2 - x) \, dV = \int_0^3 \left(\int_{-2}^2 \left(\int_0^{4-y^2} (2 - x) \, dz \right) dy \right) dx \\ &= \int_0^3 \left(\int_{-2}^2 (2z - xz) \Big|_0^{4-y^2} dy \right) dx = \int_0^3 \left[\int_{-2}^2 (2 - x)(4 - y^2) dy \right] dx \\ &= \int_0^3 (2 - x) \left(4y - \frac{1}{3}y^3 \right) \Big|_{-2}^2 dx = \frac{32}{3} \int_0^3 (2 - x) dx \\ &= \frac{32}{3} \left(2x - \frac{1}{2}x^2 \right) \Big|_0^3 = 16. \end{aligned}$$

Aufgabe 5 (Satz von Green) Zeigen Sie, dass der ebene Satz von Green ein Spezialfall des Satzes von Stokes ist.

Lösung: Es sei dazu

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, 0)^{\top} \quad \text{und} \quad \phi \subseteq \{(x, y, 0)^{\top} \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Es gilt dann $\phi_u \times \phi_v = (0, 0, 1)^{\top}$ (nach entsprechender Wahl von u und v). Nach dem Satz von Stokes gilt dann

$$\int_{\partial\phi} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{\phi} \operatorname{rot}(\mathbf{v}) \cdot d\mathbf{s} = \iint_{\phi} \operatorname{rot}(\mathbf{v})^{\top} (\phi_u \times \phi_v) \, dudv = \iint_{\phi} \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \, dudv.$$

Aufgabe 6 (Satz von Green) Man verifiziere für das Vektorfeld $\mathbf{v}(x, y) = (2xy - x^2, x + y^2)^\top$ und das Gebiet B , das durch $y = x^2$ und $y^2 = x$ begrenzt wird, den Satz von Green.

Lösung: Die beiden Kurven $y = x^2$ und $y^2 = x$ schneiden sich in $(0, 0)$ und $(1, 1)$. Das Kurvenintegral entlang des Randes muss entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen werden. Entlang der Kurve $x = t, y = t^2, t \in [0, 1]$, erhält man das Kurvenintegral

$$\begin{aligned} \int_0^1 [(2x(t)y(t) - x(t)^2)\dot{x}(t) + (x(t) + y(t)^2)\dot{y}(t)] dt &= \int_0^1 [2t^3 - t^2 + (t + t^4)2t] dt \\ &= \int_0^1 [2t^3 + t^2 + 2t^5] dt = \frac{7}{6} \end{aligned}$$

und entlang der Kurve $x = (1 - t)^2, y = 1 - t$ ($t \in [0, 1]$) das Integral

$$\begin{aligned} &\int_0^1 [(2x(t)y(t) - x(t)^2)\dot{x}(t) + (x(t) + y(t)^2)\dot{y}(t)] dt \\ &= \int_0^1 [(2(1-t)^3 - (1-t)^4)(-2)(1-t) - 2(1-t)^2] dt \\ &= \int_0^1 [2(1-t)^5 - 4(1-t)^4 - 2(1-t)^2] dt \\ &= -\frac{1}{3}(1-t)^6 + \frac{4}{5}(1-t)^5 + \frac{2}{3}(1-t)^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{4}{5} - \frac{2}{3} = -\frac{17}{15}. \end{aligned}$$

Somit ergibt das gesamte Kurvenintegral $\frac{7}{6} - \frac{17}{15} = \frac{1}{30}$.

Der Satz von Green behauptet nun die Identität dieses Kurvenintegrals mit dem Gebietsintegral

$$\int_B \left(\frac{\partial}{\partial x}(x + y^2) - \frac{\partial}{\partial y}(2xy - x^2) \right) dx dy = \int_B (1 - 2x) dx dy.$$

Um dieses Integral zu berechnen, beschreiben wir B als Normalbereich:

$$B = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}.$$

Damit ergibt sich der Wert

$$\begin{aligned} \int_B (1 - 2x) dx dy &= \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (1 - 2x) dy dx = \int_0^1 (y - 2xy) \Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} dx \\ &= \int_0^1 (\sqrt{x} - 2x^{\frac{3}{2}} - x^2 + 2x^3) dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^4 \Big|_0^1 = \frac{1}{30}, \end{aligned}$$

womit der Satz von Green bestätigt ist.

Aufgabe 7 (Satz von Stokes) Verifizieren Sie den **Satz von Stokes** für das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $v(x_1, x_2, x_3) = (x_1x_3, x_2, x_2x_3)^T$ auf dem Stück des Kegelmantels $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2$, das zwischen den Ebenen $x_3 = 0$ und $x_3 = 1$ liegt. Worauf ist bei der Parametrisierung der Randkurve des Kegelmantelstücks zu achten?

Lösung: Auf einer stückweise regulären, orientierbaren Fläche S mit positiv umlaufenem Rand ∂S gilt für ein in einer Umgebung von S stetig differenzierbares Vektorfeld v der Satz von Stokes:

$$\oint_{\partial S} v^T dx = \iint_S \operatorname{rot} v^T dO.$$

In unserem Beispiel ist S der Kegelmantel $M = \{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = x_3^2, 0 \leq x_3 \leq 1\}$ mit Rand $\partial M = \{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 = 1\}$ (Skizze!).

Um den Satz von Stokes für das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $v(x_1, x_2, x_3) = (x_1x_3, x_2, x_2x_3)^T$ zu verifizieren, benötigen wir noch Parametrisierungen von M und ∂M .

Mit Blick auf die Skizze beschreiben wir M durch die Abbildung

$$x : [0, 1] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad x(z, \varphi) = (z \cos \varphi, z \sin \varphi, z)^T$$

mit $x_z \times x_\varphi = (-z \cos \varphi, -z \sin \varphi, z)^T$. Achtung: ∂M ist positiv bezüglich der nach oben gerichteten Flächennormalen $x_z \times x_\varphi$ von M zu parametrisieren. Man überlege sich anhand der Skizze, dass

$$k : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad k(t) = (\cos t, \sin t, 1)^T$$

eine positive Parametrisierung von ∂M liefert!

Für die linke Seite im Satz von Stokes erhalten wir folglich

$$\oint_{\partial S} v^T dx = \int_0^{2\pi} v(k(t))^T \dot{k}(t) dt = \int_0^{2\pi} -\cos t \sin t + \sin t \cos t dt = 0.$$

Für die rechte Seite im Satz von Stokes gilt ebenso

$$\iint_S \operatorname{rot} v^T dO = \int_0^1 \int_0^{2\pi} -z^2(\cos \varphi + \cos \varphi \sin \varphi) d\varphi dz = \int_0^1 -z^2 \left[\sin \varphi + \frac{\sin^2 \varphi}{2} \right]_0^{2\pi} dz = 0,$$

wobei wir den Ausdruck $\cos \varphi \sin \varphi$ mittels Formelsammlung integrieren. Somit ist die Aussage des Satzes von Stokes für unser Beispiel bestätigt.

Aufgabe 8 (Satz von Stokes) Man bestätige den Satz von Stokes

$$\iint_{\phi} \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot ds = \oint_{\partial \phi} \mathbf{v} \cdot ds \quad \text{für das Vektorfeld} \quad \mathbf{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3y \\ -xz \\ yz^2 \end{pmatrix},$$

wobei ϕ die Fläche des Paraboloids $2z = x^2 + y^2$ mit negativer z -Komponente des Flächennormalenvektors darstellt, welches durch die Ebene $z = 2$ mit dem Rand $\partial\phi$ begrenzt ist.

Lösung: Das Kurvenintegral: Der Rand γ von ϕ ist der Kreis $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 4, z = 2\}$. Hierfür findet man die Parametrisierung

$$\gamma : t \in [0, 2\pi] \mapsto \begin{pmatrix} 2 \cos t \\ -2 \sin t \\ 2 \end{pmatrix},$$

wobei wir natürlich darauf geachtet haben, dass die Raumkurve bzgl. dem angegebenen Normalenvektor positiv orientiert ist. Somit erhält man das Kurvenintegral

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -6 \sin t \\ -4 \cos t \\ -8 \sin t \end{pmatrix}^{\top} \begin{pmatrix} -2 \sin t \\ -2 \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi} (12 \sin^2 t + 8 \cos^2 t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (8 + 4 \sin^2 t) dt = 20\pi. \end{aligned}$$

Das Flächenintegral: Die Rotation des Vektorfelds \mathbf{v} beträgt

$$\mathbf{w} = \operatorname{rot} \mathbf{v} = \begin{pmatrix} z^2 + x \\ 0 \\ -z - 3 \end{pmatrix}.$$

Die Funktion der Fläche ϕ und der Flächennormalenvektor $\phi_u \times \phi_v$ lauten

$$\phi(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \phi_u \times \phi_v = \begin{pmatrix} -u \\ -v \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad |\phi_u \times \phi_v| = \sqrt{1 + u^2 + v^2},$$

wobei wir uns vor der Angabe des Definitionsbereichs D von ϕ noch drücken, da wir das entstehende Integral natürlich vorteilhaft in Polarkoordinaten auswerten werden; hierbei wird der Definitionsbereich zu einem *Rechteck* B . Übrigens müssen wir die Reihenfolge von u und v noch vertauschen, da der bisherige Flächennormalenvektor $\phi_u \times \phi_v$ eine

positive z -Komponente hat. Mit $\phi_v \times \phi_u$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} \iint_{\phi} \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} &= \iint_{\phi} \mathbf{w} \cdot d\mathbf{s} = \iint_D \mathbf{w}(\phi(u, v))^{\top} (\phi_v \times \phi_u) \, du dv \\ &= \iint_D \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(u^2 + v^2)^2 + u \\ 0 \\ -\frac{1}{2}(u^2 + v^2) - 3 \end{pmatrix}^{\top} \begin{pmatrix} u \\ v \\ -1 \end{pmatrix} \, du dv \\ &= \iint_D \frac{1}{4}u(u^2 + v^2)^2 + u^2 + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + 3 \, du dv \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \frac{1}{4}r^5 \cos \varphi + r^2 \cos^2 \varphi + \frac{1}{2}r^2 + 3 \, d\phi \, r dr \\ &= \int_0^2 \pi r^3 + \pi r^3 + 6\pi r \, dr = \frac{\pi}{2}r^4 + 3\pi r^2 \Big|_0^2 = 20\pi. \end{aligned}$$

Somit ist der Satz von Stokes in diesem Fall verifiziert.

Aufgabe 9 (Satz von Stokes) Gegeben sind das Vektorfeld \mathbf{v} und die Fläche ϕ

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 \\ xz \\ xy \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{und} \quad \phi(\varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad \vartheta \in [0, \frac{\pi}{4}].$$

Man berechne mit Hilfe des Satzes von Stokes das das Flächenintegral $\iint_{\phi} \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}$.

Lösung: Offensichtlich handelt es sich bei der parametrisierten Fläche um ein Segment der Oberfläche einer Kugel mit Radius 1, d. h., $\phi = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\}$. Vergleiche hierzu die Darstellung einer Sphäre in Polarkoordinaten. Der Rand der Fläche ϕ ist der Kreis γ mit Parameterdarstellung

$$\gamma(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Nun kann man den Satz von Stokes

$$\oint_{\gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{\phi} \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}$$

anwenden und das Kurvenintegral berechnen:

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \cos \varphi \\ \frac{1}{2} \cos \varphi \sin \varphi \end{pmatrix}^{\top} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \varphi \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \, d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \varphi + \frac{1}{2\sqrt{2}} \cos^2 \varphi \right) \, d\phi = \frac{1}{4\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \, d\phi = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Man beachte, dass gemäß unserer Orientierung wir den Fluss *von innen nach außen* berechnet haben.

Aufgabe 10 (Maxwell) Leiten Sie mithilfe der Integralsätze aus der folgenden differentiellen Form der **Maxwell-Gleichungen** die integrale Darstellung her:

$$\bullet \operatorname{rot}(H) - \dot{D} = j, \quad \bullet \operatorname{rot}(E) + \dot{B} = 0, \quad \bullet \operatorname{div}(D) = \rho, \quad \bullet \operatorname{div}(B) = 0.$$

Lösung: Es bezeichnen

- E das elektrische Feld,
- D die Verschiebungsdichte,
- B die Induktionsdichte,
- H das magnetische Feld,
- ρ die Ladungsdichte (Ladung pro Volumen),
- j die Stromdichte (Strom pro Fläche).

Es sei ϕ eine Fläche mit dem Rand $\partial\phi$. Integration der 1. Gleichung liefert:

$$\iint_{\phi} \operatorname{rot}(H) \, ds - \iint_{\phi} \dot{D} \, ds = \iint_{\phi} j \, ds \Leftrightarrow \boxed{\int_{\partial\phi} H \, ds - \frac{d}{dt} \iint_{\phi} D \, ds = I}$$

Hierbei bezeichnet I den Strom. Analog für die 2. Gleichung:

$$\iint_{\phi} \operatorname{rot}(E) \, ds + \iint_{\phi} \dot{B} \, ds = \iint_{\phi} 0 \, ds \Leftrightarrow \boxed{\int_{\partial\phi} E \, ds - \frac{d}{dt} \iint_{\phi} B \, ds = 0}$$

Für die 3. und 4. Gleichung betrachten wir ein (beschränktes) Gebiet B mit der Oberfläche ∂B :

$$\iiint_B \operatorname{div}(D) \, dx \, dy \, dz = \iiint_B \rho \, dx \, dy \, dz \Leftrightarrow \boxed{\iint_{\partial B} D \, ds = Q}$$

Und schließlich:

$$\iiint_B \operatorname{div}(B) \, dx \, dy \, dz = \iiint_B 0 \, dx \, dy \, dz \Leftrightarrow \boxed{\iint_{\partial B} B \, ds = 0}$$