

Ferienkurs Quantenmechanik - Aufgaben

Sommersemester 2013

Daniel Rosenblüh und Florian Häse
Fakultät für Physik
Technische Universität München
6. September 2013

Schrödingergleichung und Potentialprobleme

1 Zeitentwicklung und Schrödingergleichung

Aufgabe 1 (*)

Beweisen Sie den folgenden Zusammenhang

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_1^*(x, t) \Psi_2(x, t) dx = 0$$

für zwei beliebige normalisierbare Lösungen der Schrödingergleichung $\Psi_1(x, t)$ und $\Psi_2(x, t)$ in einem reellen Potential V !

Lösung:

Um die generelle Gültigkeit der gegebenen Gleichung zu zeigen, kann man zunächst die zeitliche Ableitung in das Integral ziehen, da die Integration über den Ort ausgeführt wird, der von der Zeit unabhängig ist. Man muss dabei beachten, dass aus der totalen Ableitung eine partielle Ableitung wird. Weiterhin kann man die Produktregel anwenden. Man erhält damit

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_1^* \Psi_2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} (\Psi_1^* \Psi_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \Psi_1^*}{\partial t} \Psi_2 + \Psi_1^* \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} \right) dx$$

Nun kann man die partiellen zeitlichen Ableitung, die im Integranden vorkommen, durch die Schrödingergleichung ersetzen. Man muss dabei beachten, dass die Ableitung

des komplex Konjugierten der Wellenfunktion Ψ_1 gebildet wird. Folgende Formulierungen der Schrödingergleichung müssen daher angewendet werden

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi &= \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V \right] \Psi \\ -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi^* &= \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V \right] \Psi^* \end{aligned}$$

Da das Potential reell sein soll, bleibt es von der komplexen Konjugation unbeeinflusst. Stellt man sich nach den zeitlichen Ableitungen der Wellenfunktionen um, kann man den Integranden entsprechend substituieren und erhält

$$\begin{aligned} \dots &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(-\frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \Psi_1^*}{\partial x^2} + \frac{i}{\hbar} V \Psi_1^* \right) \Psi_2 + \Psi_1^* \left(\frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x^2} - \frac{i}{\hbar} V \Psi_2 \right) \right] dx \\ &= -\frac{i\hbar}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial^2 \Psi_1^*}{\partial x^2} \Psi_2 - \Psi_1^* \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x^2} \right) dx \end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir ausgenutzt, dass sich die Summanden, in denen das Potential als Faktor enthalten ist, gerade zu Null addieren. Demnach reduziert sich der Integrand auf obigen Ausdruck. Um diesen Ausdruck noch weiter umzuformen, kann man partielle Integration anwenden.

$$\dots = -\frac{i\hbar}{2m} \left[\frac{\partial \Psi_1^*}{\partial x} \Psi_2 \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \Psi_1^*}{\partial x} \frac{\partial \Psi_2}{\partial x} dx - \frac{\partial \Psi_1^*}{\partial x} \Psi_2 \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \Psi_1^*}{\partial x} \frac{\partial \Psi_2}{\partial x} dx \right] = 0$$

Die Integrale addieren sich offenbar zu Null. Um die Randterme auszuwerten, muss man sich allerdings noch einmal die Normierbarkeitsbedingung der Quantenmechanik in Erinnerung rufen. Da das Integral des Betragsquadrates einer Wellenfunktion $|\Psi(x, t)|^2$ über den gesamten Raum integriert 1 ergeben soll und damit insbesondere endlich ist, muss die Wellenfunktion selbst sowie ihre erste Ableitung im Unendlichen verschwinden. Aus diesem Grund verschwinden auch die Randterme und die Aussage kann gezeigt werden.

Aufgabe 2 ()**

Zeigen Sie, dass für ein beliebiges eindimensionales Potential $V(x)$ eine normierbare Lösung der zeitunabhängigen Schrödingergleichung nur genau dann gefunden werden kann, falls die Energie E des Zustandes größer als das Minimum des Potentials ist.

Lösung:

Diese Aussage ist leicht einsichtig, wenn man die Schrödingergleichung etwas umformuliert. Schreibt man sie in der Form

$$\frac{d^2}{dx^2} \Psi = \frac{2m}{\hbar^2} [V(x) - E] \Psi$$

auf, dann kann man recht leicht das Vorzeichen der zweiten Ableitung von Ψ in Abhängigkeit des Vorzeichens von Ψ untersuchen. Unter der Voraussetzung, dass die Energie stets kleiner ist als das Potential ist das Vorzeichen von $\frac{2m}{\hbar^2}[V(x) - E]$ stets positiv. Demnach sind für Lösungen Ψ der Schrödingergleichung stets das Vorzeichen der Funktion und ihrer zweiten Ableitung identisch.

Daraus erkennt man, dass die Wellenfunktion für positive Ψ stets konvex und für negative Ψ stets konkav ist. Umgangssprachlich ausgedrückt bewegen sich die Wellenfunktionen also stets von der x-Achse weg und können daher nicht mehr normierbar sein.

Aufgabe 3 (***)

Zeigen Sie, dass quantenmechanische Bindungszustände in einem eindimensionalen Potential $V(x)$ stets nicht-entartet sind. Nehmen Sie an, dass zwei Wellenfunktionen $\Psi_{1,2}(x)$ dieselbe Schrödingergleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Psi''(x) + V(x)\Psi(x) = E\Psi(x)$$

lösen.

Lösung:

Zunächst nehmen wir an, dass beide Wellenfunktionen $\Psi_{1,2}(x)$ unabhängige Lösungen der Schrödingergleichung zum gleichen Eigenwert E sind. Es gilt also

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Psi_1''(x) + V(x)\Psi_1(x) = E\Psi_1(x) \quad \text{und} \quad -\frac{\hbar^2}{2m}\Psi_2''(x) + V(x)\Psi_2(x) = E\Psi_2(x)$$

Diese beiden Gleichungen können wir nun jeweils mit $\Psi_{2,1}(x)$ multiplizieren. Wir erhalten

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m}\Psi_1''(x)\Psi_2(x) + V(x)\Psi_1(x)\Psi_2(x) &= E\Psi_1(x)\Psi_2(x) \\ -\frac{\hbar^2}{2m}\Psi_2''(x)\Psi_1(x) + V(x)\Psi_2(x)\Psi_1(x) &= E\Psi_2(x)\Psi_1(x) \end{aligned}$$

Diese beiden Gleichungen kann man nun voneinander abziehen, so dass sich einige Terme zu Null addieren. Man erhält

$$-\frac{\hbar^2}{2m} [\Psi_1''(x)\Psi_2(x) - \Psi_2''(x)\Psi_1(x)] = 0$$

Diese Gleichung kann nun integriert werden. Die Integrationsgrenzen werden dabei so gewählt, dass man von $-\infty$ bis zu einem bestimmten Wert x integriert. Wir berechnen also

$$\begin{aligned}
 0 &= -\frac{\hbar^2}{2m} \int_{-\infty}^x dy [\Psi_1''(y)\Psi_2(y) - \Psi_2''(y)\Psi_1(y)] = -\frac{\hbar^2}{2m} \int_{-\infty}^x dy \partial_y [\Psi_1'(y)\Psi_2(y) - \Psi_2'(y)\Psi_1(y)] \\
 &= [\Psi_1'(y)\Psi_2(y) - \Psi_2'(y)\Psi_1(y)] \Big|_{-\infty}^x = \Psi_1'(x)\Psi_2(x) - \Psi_2'(x)\Psi_1(x)
 \end{aligned}$$

Hierbei haben wir ausgenutzt, dass die Wellenfunktionen normierbar sein sollen und daher im Unendlichen verschwinden werden. Durch Umformung erhält man

$$\frac{\Psi_1'(x)}{\Psi_1(x)} = \frac{\Psi_2'(x)}{\Psi_2(x)} \quad \Rightarrow \quad \partial_x \log \left(\frac{\Psi_1(x)}{\Psi_2(x)} \right) = 0$$

Da also die Ableitung dieses Logarithmus verschwindet, muss der Logarithmus selbst und insbesondere sein Argument von x unabhängig sein. Dies kann aber nur genau dann der Fall sein, wenn die beiden Zustände $\Psi_{1,2}(x)$ linear abhängig sind, was einen Widerspruch zur Annahme darstellt.

2 Potentialprobleme

Aufgabe 4 (**)

Berechnen Sie die Bindungsenergien und normierten Wellenfunktionen für ein quantenmechanisches Teilchen der Masse m , das von einem eindimensionalen δ -Potential

$$V(x) = -\lambda\delta(x) \quad \lambda > 0$$

angezogen wird. Leiten Sie zuerst aus der zeitunabhängigen Schrödingergleichung die Sprungbedingung für die Ableitung der Wellenfunktion am Ursprung her

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [\Psi'(\varepsilon) - \Psi'(-\varepsilon)] = \lambda\Psi(0)$$

Wie viele Bindungszustände mit $E < 0$ gibt es? Berechnen Sie für den Bindungszustand die Orts- und Impulsunschärfen Δx und Δp und überprüfen Sie die Heisenberg'sche Unschärferelation $\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar/2$

Lösung:

Für $x \neq 0$ lautet die Schrödingergleichung für dieses Problem

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Psi''(x) = E\Psi(x) \quad \text{bzw.} \quad \Psi''(x) = q^2\Psi(x)$$

Mit der Einführung des Parameters $q^2 = -2mE/\hbar$ sehen wir also, dass die zweite Ableitung der Wellenfunktion proportional zur Wellenfunktion selbst ist. Dabei ist

$E < 0$ für einen Bindungszustand, die Wurzel ist also reell. Man wähle als Ansatz zur Lösung

$$\Psi(x) = Ae^{-q|x|}$$

da dieser Ansatz im Gegensatz zur gewöhnlichen Exponentialfunktion der Symmetrie des Potentials entspricht. Um die Sprungbedingung zu erhalten, integriert man die Schrödingergleichung über das Intervall $(-\varepsilon, \varepsilon)$ und erhält

$$\begin{aligned} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Psi''(x) - \lambda \delta(x) \Psi(x) - E \Psi(x) \right] dx &= 0 \\ \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \Psi'(x) \Big|_{-\varepsilon}^{\varepsilon} - \lambda \Psi(0) - \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} &= 0 \end{aligned}$$

Lässt man nun ε gegen Null gehen, so verschwindet der letzte Term, da $\Psi(x)$ beschränkt ist und man erhält die gewünschte Gleichung. Die Sprungbedingung bei $x = 0$ ergibt nun

$$-\frac{\hbar^2}{2m} A(-q - q) = \lambda A \quad \text{also} \quad q = \frac{\lambda m}{\hbar^2}$$

Die Bindungsenergie ist damit

$$E = -\frac{\lambda^2 m}{2\hbar^2}$$

wobei wir nur genau einen Bindungszustand gefunden haben. Es scheint also nur genau diesen einen gebundenen Zustand für das attraktive Deltapotential zu geben. Die Konstante A berechnet sich durch die Normalisierung

$$1 = A^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-2q|x|} = 2 \cdot \frac{A^2}{2q}$$

also $A = \sqrt{q}$. Die Lösung ist also

$$\Psi(x) = \frac{\sqrt{\lambda m}}{\hbar} e^{-\frac{\lambda m}{\hbar^2} |x|}$$

Wir sehen nun, dass $\Psi(x)$ eine gerade Funktion ist, so dass sowohl $\langle x \rangle$ als auch $\langle p \rangle$ verschwinden. Zu berechnen bleibt

$$\langle x^2 \rangle = q \int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 e^{-2q|x|} = 2q \underbrace{\frac{1}{8q^3} \int_0^{\infty} dy y^2 e^{-y}}_{=2} = \frac{1}{2q^2}$$

$$\langle p^2 \rangle = -\hbar^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \Psi(x) \Psi''(x) = \hbar^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx (\Psi'(x))^2 = 2\hbar^2 q^3 \underbrace{\int_0^{\infty} dx e^{-2qx}}_{=1/2q} = \hbar^2 q^2$$

Damit ist also $\Delta x = \frac{\hbar^2}{\sqrt{2}\lambda m}$ und $\Delta p = \frac{\lambda m}{\hbar}$ und die Unschärfe ist

$$\Delta x \cdot \Delta p = \sqrt{2} \frac{\hbar}{2} > \frac{\hbar}{2}$$

so dass die Unschärferelation erfüllt ist.

Aufgabe 5 ()**

Betrachten Sie das Stufen Potential

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ V_0 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

- (i) Berechnen Sie den Reflektionskoeffizienten R im Fall $E < V_0$ und diskutieren Sie das Ergebnis.
- (ii) Berechnen Sie den Reflektionskoeffizienten R im Fall $E > V_0$.
- (iii) Für ein derartiges Potential, das im Unendlichen nicht verschwindet, ist der Transmissionskoeffizient nicht einfach $|F|^2/|A|^2$ (A ist hierbei die Einfallsamplitude und F die transmittierte Amplitude), da sich die transmittierte Welle mit einer anderen Geschwindigkeit fortbewegt. Zeigen Sie, dass

$$T = \sqrt{\frac{E - V_0}{E}} \frac{|F|^2}{|A|^2}$$

im Fall $E > V_0$.

Hinweis: Betrachten Sie den Wahrscheinlichkeitsstrom j .

- (iv) Berechnen Sie nun den Transmissionskoeffizienten explizit für den Fall $E > V_0$ und schlussfolgern Sie, dass $T + R = 1$

Lösung:

- (i): Eine einkommende Welle Ae^{ikx} der Energie $E < V_0$ wird an der Potentialbarriere sowohl reflektiert als auch transmittiert werden. In Folge der Reflexion wird sich links der Potentialbarriere eine Welle Be^{-ikx} in genau entgegengesetzter Richtung ausbreiten, während ein Teil der Welle $F e^{-\kappa x}$ in die Potentialbarriere eindringen kann, da die Energie nicht zur weiteren Propagation ausreicht. Demnach lautet der allgemeine Ansatz

$$\Psi = \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & (x < 0) \\ Fe^{-\kappa x} & (x > 0) \end{cases}$$

wobei wir die Größen $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ und $\kappa = \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar$ eingeführt haben. Der Reflektionskoeffizient ist zunächst definiert als das Betragsquadrat des Verhältnisses der Amplituden zwischen reflektierter Welle und einfallender Welle, sofern beide Wellen den gleichen Wellenvektor aufweisen.

$$R = \left| \frac{B}{A} \right|^2$$

Um dieses Amplitudenverhältnis zu berechnen, kann man nun die Anforderungen an die Wellenfunktion umsetzen. Wir fordern Stetigkeit von Ψ und Ψ' am Ursprung und erhalten damit die Gleichungen

$$\begin{aligned} \Psi : \quad & A + B = F \\ \Psi' : \quad & ik(A - B) = -\kappa F \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser beiden Gleichungen kann man einen Zusammenhang zwischen den Amplituden A und B finden. Wir eliminieren dazu die Amplitude der transmittierten Welle F .

$$A + B = -\frac{ik}{\kappa}(A - B) \quad \Rightarrow \quad A \left(1 + \frac{ik}{\kappa} \right) = -B \left(1 - \frac{ik}{\kappa} \right)$$

Damit ist nun der Reflektionskoeffizient

$$R = \left| \frac{B}{A} \right|^2 = \frac{\left| 1 + \frac{ik}{\kappa} \right|^2}{\left| 1 - \frac{ik}{\kappa} \right|^2} = 1$$

Eine eintreffende Welle der Energie $E < V_0$ wird also, obwohl sie teilweise in die Potentialbarriere eindringen kann, vollständig reflektiert.

- (ii): Eine einkommende Welle Ae^{ikx} der Energie $E > V_0$ wird an der Potentialbarriere sowohl reflektiert als auch transmittiert werden. In Folge der Reflexion wird sich links der Potentialbarriere eine Welle Be^{-ikx} in genau entgegengesetzter Richtung

ausbreiten, während ein Teil der Welle $F e^{ilx}$ die Potentialbarriere überwinden kann. Demnach lautet der allgemeine Ansatz

$$\Psi = \begin{cases} A e^{ikx} + B e^{-ikx} & (x < 0) \\ F e^{ilx} & (x > 0) \end{cases}$$

wobei wir die Größen $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ und $l = \sqrt{2m(E - V_0)}/\hbar$ eingeführt haben. Um den Reflektionskoeffizienten zu berechnen, kann man nun die Anforderungen an die Wellenfunktion umsetzen. Wir fordern Stetigkeit von Ψ und Ψ' am Ursprung und erhalten damit die Gleichungen

$$\begin{aligned} \Psi : \quad & A + B = F \\ \Psi' : \quad & ik(A - B) = ilF \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser beiden Gleichungen kann man einen Zusammenhang zwischen den Amplituden A und B finden. Wir eliminieren dazu die Amplitude der transmittierten Welle F .

$$A + B = \frac{k}{l}(A - B) \quad \Rightarrow \quad A \left(1 - \frac{k}{l}\right) = -B \left(1 + \frac{k}{l}\right)$$

Damit ist nun der Reflektionskoeffizient

$$R = \left| \frac{B}{A} \right|^2 = \frac{\left|1 - \frac{k}{l}\right|^2}{\left|1 + \frac{k}{l}\right|^2} = \frac{(k - l)^2}{(k + l)^2} = \frac{(k - l)^4}{(k^2 - l^2)^2}$$

Dieser Ausdruck kann nun vereinfacht werden, indem man sich die Definition der Größen k und l in Erinnerung ruft. Es ist

$$k^2 - l^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E - E + V_0) = \frac{2m}{\hbar^2}V_0 \quad \text{und} \quad k - l = \frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \left[\sqrt{E} - \sqrt{E - V_0} \right]$$

Damit ist im Fall $E > V_0$ der Reflektionskoeffizient

$$R = \frac{(\sqrt{E} - \sqrt{E - V_0})^4}{V_0^2}$$

(iii): Der Transmissionskoeffizient ist das Verhältnis des transmittierten Wahrscheinlichkeitsstromes J_t zum einfallenden Wahrscheinlichkeitsstrom J_i . Diese beiden Ströme können berechnet werden durch

$$J_t = \frac{\hbar k}{m} |F|^2 \quad \text{und} \quad J_i = \frac{\hbar k}{m} |A|^2$$

An dieser Stelle wird ersichtlich, dass die Definition des Reflektionskoeffizienten zu dieser Definition analog ist. Der Transmissionskoeffizient ist nun

$$T = \frac{J_t}{J_i} = \left| \frac{F}{A} \right|^2 \frac{l}{k} = \left| \frac{F}{A} \right|^2 \sqrt{\frac{E - V_0}{E}}$$

Wie man an diesem Ergebnis erkennen kann, gelten die Betrachtungen nur für den Fall $E > V_0$.

(iv): Für die explizite Berechnung des Transmissionskoeffizienten können wir den bereits in (ii) aufgestellten Ansatz heranziehen. Aus den Stetigkeitsbedingungen für Ψ und Ψ' folgern wir unter Elimination von B

$$F = A + B = A + A \frac{k - l}{k + l} = \frac{2k}{k + l} A$$

Damit kann nun der Transmissionskoeffizient berechnet werden

$$T = \left| \frac{F}{A} \right|^2 \frac{l}{k} = \left(\frac{2k}{k + l} \right)^2 \frac{l}{k} = \frac{4kl(k - l)^2}{(k^2 - l^2)^2}$$

Mit bereits berechneten Ausdrücken aus (iii) ergibt sich daher

$$T = \frac{4\sqrt{E}\sqrt{E - V_0}(\sqrt{E} - \sqrt{E - V_0})^2}{V_0^2}$$

Zu berechnen bleibt noch die Summe aus Reflexions- und Transmissionskoeffizient

$$T + R = \frac{4kl}{(k + l)^2} + \frac{(k - l)^2}{(k + l)^2} = \frac{4kl + k^2 - 2kl + l^2}{(k + l)^2} = \frac{(k + l)^2}{(k + l)^2} = 1$$

Aufgabe 6 Ein Teilchen im unendlich hohen Potentialtopf hat die anfängliche Wellenfunktion

$$\Psi(x, 0) = A \sin^3(\pi x/a) \quad (0 \leq x \leq a)$$

Bestimmen Sie A , finden Sie $\Psi(x, t)$ und berechnen Sie $\langle x \rangle$ als eine Funktion der Zeit. Was ist der Erwartungswert der Energie?

Hinweis: Die Eigenfunktionen und Eigenwerte des unendlich hohen Potentialtopfs sind

$$\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \quad E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

Lösung:

Zur Lösung dieser Aufgabe soll zunächst die Anfangsbedingung $\Psi(x, 0)$ durch sta-

tionäre Zustände des unendlich hohen Potentialtopfs ausgedrückt werden. Dazu kann man ein Additionstheorem anwenden

$$\sin 3\vartheta = 3 \sin \vartheta - 4 \sin^3 \vartheta$$

Mit Hilfe dieses Additionstheoremes gelingt es, die dritte Potenz des Sinus in der Anfangsbedingung durch einfache Potenzen des Sinus zu schreiben

$$\sin^3 \left(\frac{\pi x}{a} \right) = \frac{3}{4} \sin \left(\frac{\pi x}{a} \right) - \frac{1}{4} \left(3 \frac{\pi x}{a} \right)$$

Demnach ist also die Anfangsbedingung

$$\Psi(x, 0) = A \sqrt{\frac{a}{2}} \left[\frac{3}{4} \Phi_1(x) - \frac{1}{2} \Phi_3(x) \right]$$

wobei Φ_1 und Φ_3 jeweils der erste bzw. dritte stationäre Zustand des unendlich hohen Potentialtopfes sind. Die Normalisierungskonstante erhält man durch Berechnung des Betragsquadrates von Ψ . Zu beachten ist hierbei, dass die Eigenzustände des unendlich hohen Potentialtopfes orthonormal sind und Mischterme daher nicht berücksichtigt werden müssen.

$$|\Psi|^2 = |A|^2 \frac{a}{2} \left(\frac{9}{16} + \frac{1}{16} \right) = \frac{5a}{16} |A|^2 \stackrel{!}{=} 1$$

Damit ist die Normierungskonstante gerade $A = 4/\sqrt{5a}$. Damit können wir nun das zeitliche Verhalten von Ψ bestimmen

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{10}} [2\Phi_1(x)e^{iE_1t/\hbar} - \Phi_3(x)e^{iE_3t/\hbar}]$$

Ferner können wir das Betragsquadrat dieser Funktion berechnen und erhalten

$$|\Psi(x, t)|^2 = \frac{1}{10} \left[0\Phi_1^2 + \Phi_3 - 6\Phi_1\Phi_3 \cos \left(\frac{E_3 - E_1}{\hbar} t \right) \right]$$

Demnach ist der Erwartungswert von x gerade

$$\langle x \rangle = \int_0^a x |\Psi(x, t)|^2 dx = \frac{9}{10} \langle x \rangle_1 + \frac{1}{10} \langle x \rangle_3 - \frac{3}{5} \cos \left(\frac{E_3 - E_1}{\hbar} t \right) \int_0^a x \Phi_1(x) \Phi_3(x) dx$$

Hierbei bezeichnet $\langle x \rangle_n$ den Erwartungswert bezüglich des n -ten stationären Zustandes. Dieser ist stets für alle n identisch $a/2$, wovon man sich leicht durch nachrechnen überzeugen kann. Das zu berechnende Integral ist

$$\frac{2}{a} \int_0^a x \sin \left(\frac{\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{3\pi x}{a} \right) dx = 0$$

Demnach ist auch der Ortserwartungswert dieser Wellenfunktion bei

$$\langle x \rangle = \frac{9}{10} \frac{a}{2} + \frac{1}{10} \frac{a}{2} = \frac{a}{2}$$

Aufgabe 7 (*)**

Ein Teilchen befindet sich im Grundzustand eines harmonischen Oszillators mit der Frequenz ω , wobei sich plötzlich die Federkonstante vervierfacht, so dass $\omega' = 2\omega$. Während dieses unendlich schnellen Vorganges ändert sich die Wellenfunktion des Teilchen nicht. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit bei einer Energiemessung den Wert $\hbar\omega/2$ ($\hbar\omega$) zu erhalten?

Lösung:

Die Energien, die nun nach der Vervielfachung der Federkonstante erlaubt sind, sind folgende

$$E'_n = \hbar\omega' \left(n + \frac{1}{2} \right) = \hbar\omega (2n + 1) = \hbar\omega, 3\hbar\omega, 5\hbar\omega, \dots$$

Demnach ist die Wahrscheinlichkeit, den Wert $\hbar\omega/2$ gleich Null. Um die Wahrscheinlichkeit für den Energiewert $\hbar\omega$ zu berechnen, muss man die Wellenfunktion des Teilchens, also den Grundzustand des alten Systems, auf den Grundzustand des neuen Systems projizieren, da diese Energie gerade dem Grundzustand des neuen Systems entspricht. Die Wahrscheinlichkeit ist also $P_0 = |c_0|^2$, wobei

$$c_0 = \int \Psi(x, 0) \Psi' dx$$

wobei $\Psi(x, 0)$ den Grundzustand des alten Systems indiziert und Ψ' der Grundzustand des neuen Systems ist.

$$\Psi(x, 0) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \quad \text{und} \quad \Psi'_0(x) = \left(\frac{2m\omega}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{2m\omega}{2\hbar}x^2}$$

Damit ist

$$c_0 = 2^{1/4} \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{3m\omega}{2\hbar}x^2} dx = 2^{1/4} \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Die Wahrscheinlichkeit ist damit $P_0 = \sqrt{(2)2/3} \approx 0.9428$

Aufgabe 8 (*)

In dieser Aufgabe soll die kalte Emission von Elektronen aus einem Metall untersucht werden. Betrachten Sie dazu ein (halbunendliches) Stück Metall. Die Bindung der Elektronen im Metall kann durch ein Stufenpotential

$$V(x < 0) = -W \quad V(x > 0) = 0$$

mit $W > 0$ der Austrittsarbeit beschrieben werden. Durch Anlegen eines äußeren elektrischen Feldes E (in negativer x -Richtung) können die Elektronen das Metall über den quantenmechanischen Tunneleffekt verlassen. Zeichnen Sie das Gesamtpotential und berechnen Sie die zugehörige Tunnelwahrscheinlichkeit (näherungsweise) als Funktion der elektrischen Feldstärke.

Hinweis: Die Tunnelwahrscheinlichkeit für ein Teilchen der Energie E berechnet sich aus

$$T(E) = \exp \left(-\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{2mV(x) - E} \right)$$

Lösung:

Durch das elektrische Feld wird das Potential modifiziert, so dass es aus dem Stufenpotential und dem Beitrag des elektrischen Feldes $-eEx$ besteht. Daher ist das modifizierte Potential, das die Elektronen spüren

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ W - eEx & x > 0 \end{cases}$$

Der Schnittpunkt des modifizierten Potentials mit der x -Achse liegt bei $x_0 = \frac{W}{eE}$. Daher ist die Tunnelwahrscheinlichkeit gegeben durch

$$T(E) = \exp \left[-\frac{2}{\hbar} \int_0^{x_0} dx \sqrt{2m(W - eEx)} \right] = \exp \left[-\frac{4\sqrt{2m}W^{3/2}}{3\hbar eE} \right]$$

Aufgabe 9 (*) Zeigen Sie: Wenn Ψ_ν Eigenfunktion von $n = a^\dagger a$ zum Eigenwert ν ist, so ist $a^\dagger \Psi_\nu$ Eigenfunktion von n mit Eigenwert $\nu + 1$.

Lösung:

Um diese Aussage zu zeigen, kann man den Kommutator der beiden Auf- und Absteigeoperatoren a^\dagger und a betrachten. Wie man durch Nachrechnen verifizieren kann, gilt

$$[a, a^\dagger] = 1$$

Damit kann man nun auch den Kommutator des Teilchenzahloperators mit dem Aufsteigeoperator bestimmen. Es ist

$$[n, a^\dagger] = [a^\dagger a, a^\dagger] = a^\dagger a a^\dagger - a^\dagger a^\dagger a = a^\dagger \underbrace{[a, a^\dagger]}_{=1} = a^\dagger$$

Mit dieser Aussage folgt unmittelbar

$$n a^\dagger \Psi_\nu = (a^\dagger n + a^\dagger) \Psi_\nu = a^\dagger (\nu + 1) \Psi_\nu = (\nu + 1) a^\dagger \Psi_\nu$$

womit die Behauptung gezeigt ist.