Ferienkurs

Theoretische Physik: Mechanik

Sommer 2013

Übung 1 - Lösung

PHYSIK
DEPARTMENT

1 Relaxation

Geben Sie die Lösung der Differentialgleichung für die Relaxation mit zeitabhängigem Paramater $\gamma(t)$ an:

$$\dot{\Phi}(t) = -\gamma(t)\Phi(t) \tag{1}$$

Lösung:

Die Differentialgleichung kann durch Trennung der Variablen gelöst werden.

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\gamma(t)\Phi(t) \tag{2}$$

$$\frac{1}{\Phi}\frac{d\Phi}{dt} = -\gamma(t) \tag{3}$$

$$\int \frac{1}{\Phi} d\Phi = -\int \gamma(t')dt' \tag{4}$$

$$ln\Phi = -\int \gamma(t')dt' \tag{5}$$

$$\Phi = exp(-\int \gamma(t')dt') \tag{6}$$

Dabei haben wir nur den Fall betrachtet, dass $\Phi > 0$ ist. Konkret ergibt sich für den Fall konstanten Paramters γ (t) = γ :

$$\int \gamma(t')dt' = \int_0^t \gamma dt' - ln\Phi_0 = \gamma t - ln\Phi_0 \tag{7}$$

wobei wir die Integrationskonstante $-ln\Phi_0$ genannt haben.

2 Konservative Kraftfelder

1. Untersuchen Sie, ob die folgenden Kraftfelder konservativ sind:

   (i) $\vec{F}_1(\vec{r}) = (-y, x, 0)^T$

   (ii) $\vec{F}_2(\vec{r}) = \frac{1}{r^2}\vec{r} = (\frac{x}{x^2+y^2+z^2}, \frac{y}{x^2+y^2+z^2}, \frac{z}{x^2+y^2+z^2})^T$

   (iii) $\vec{F}_3(\vec{r}) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0)^T$

2. Berechnen Sie das Linienintegral in der x-y-Ebene über den Kreis mit Radius R um den Koordinatenursprung:

$$\oint_{K_R(O)} \vec{F}_3 \cdot d\vec{r} \tag{8}$$

Lösung:

1. Ein Kraftfeld, welches in einem einfach-zusammenhängenden Gebiet definiert ist, ist konservativ, wenn die Rotation in jedem Punkt des Gebiets verschwindet. Wir untersuchen daher für die Felder $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ die Rotation.

   (i) Der Definitionsbereich von $\vec{F}_1$ ist ganz $\mathbb{R}^3$ und damit einfach-zusammenhängend. Für die Rotation von $\vec{F}_1$ gilt:

$$\nabla \times \vec{F}_2(\vec{r}) = \nabla \times (-y, x, 0)^T = (0, 0, 2)^T \tag{9}$$

   Daraus schließen wir, dass $\vec{F}_1$ nicht konservativ ist.

   (ii) Der Definitionsbereich von $\vec{F}_2$ ist $\mathbb{R}^3$ ohne den Ursprung $(0, 0, 0)^T$ und damit einfach-zusammenhängend. Für die Rotation von $\vec{F}_2$ gilt:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{F}_1(\vec{r}) &= \nabla \times (\frac{x}{x^2+y^2+z^2}, \frac{y}{x^2+y^2+z^2}, \frac{z}{x^2+y^2+z^2})^T \\ &= \left(\sum_{j,k} \epsilon_{ijk}\partial_j \frac{x_k}{r^2}\right) = \left(\sum_{j,k} \epsilon_{ijk} x_k \partial_j \frac{1}{r^2}\right) \\ &= \left(\sum_{j,k} \epsilon_{ijk} x_k \frac{-2x_j}{r^4}\right) = \frac{-2}{r^4}\left(\sum_{j,k} \epsilon_{ijk} x_k x_j\right) \\ &= \frac{-2}{r^4}\vec{r} \times \vec{r} = \vec{0} \end{aligned} \tag{10}$$

   Daraus schließen wir, dass $\vec{F}_2$ konservativ ist.

   (iii) $\vec{F}_3$ ist nur für Punkte außerhalb der z-Achse (x = y = 0) definiert, dort gilt:

$$\nabla \times \vec{F}_3(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix} = \vec{0} \tag{11}$$

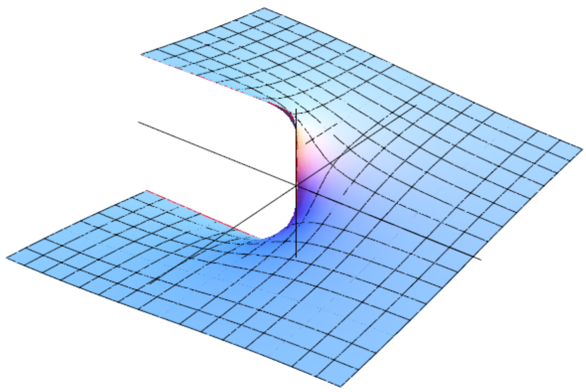
Da die Rotation $\nabla \times \vec{F}_3$ für jeden Punkt außerhalb der z-Achse verschwindet, ist damit gezeigt, dass $\vec{F}_3$ in jedem einfach-zusammenhängenden Teilgebiet $\mathbb{R}^3$, das die z-Achse nicht enthält konservativ ist.
Im gesamten Definitionsbereich ist $\vec{F}_3$ aber nicht konservativ, wie in 2. explizit gezeigt wird. In einem einfach-zusammenhängenden Teilgebiet wie

$$G = \mathbb{R}^3 \backslash \{(x, y, z)^T : y = 0, x \leq 0\} \tag{12}$$

kann jedoch ein Potential angegeben werden. Das Potential erhält man durch Integration. Wir führen die Integration in Zylinderkoordinaten aus. Wir wählen den Weg von $(\rho' = 1, \varphi' = 0, z' = 0)$ zunächst gerade in z-Richtung bis (1, 0, z) und anschließend gerade in x-Richtung bis $(\rho, 0, z)$ - in beiden Fällen steht die Kraft senkrecht auf dem Weg, sodass das Integral verschwindet. Anließend integrieren wir längs einer Kreislinie um die z-Achse und erhalten:

$$V(\vec{r}) = \int\limits_\gamma \vec{F}_3 d\vec{r} = \int\limits_0^\varphi \frac{1}{\rho} \rho \vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi d\varphi \tag{13}$$

$$= \varphi = -iln\left(\frac{x + iy}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) = atan2(x, y) = \begin{cases} arctan\left(\frac{x}{y}\right), & \text{wenn } x > 0 \\ arctan\left(\frac{x}{y}\right) + sgn(y)\pi, & \text{wenn } x < 0 \\ sgn(y)\frac{\pi}{2}, & \text{wenn } x = 0 \end{cases} \tag{14}$$



Die Skizze zeigt das Potential für festes z als Funktion von x und y. In der Skizze ist der Sprung längs der negativen y-Achse zu sehen, der eine stetige Fortsetzung auf den gesamten $\mathbb{R}^3$ verhindert.

2. Wir parametrisieren den Kreis durch den Winkel φ

$$\vec{r}(\varphi) = (Rcos\varphi, Rsin\varphi, 0)^T \tag{15}$$

und damit:

$$d\vec{r} = (-Rsin\varphi, Rcos\varphi, 0)^T d\vec{\varphi} \tag{16}$$

Das Integral ergibt sich damit zu:

$$\oint_{K_R(O)} \vec{F}_3 \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} 1 d\varphi \neq 0 \tag{17}$$

Aus dem Satz von Stokes:

$$\int_A (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{a} = \oint_{\partial A} \vec{F} \cdot d\vec{r} \tag{18}$$

schließen wir daher, dass $\nabla \times \vec{F}_3 = 2\pi\delta(x)\delta(y)\vec{e}_z$.

3 Kreisbewegung

Die Bahnkurve eines Massenpunktes lautet:

$$\vec{r}(t) = (x_0, Rcos(\omega t), Rsin(\omega t))^T \tag{19}$$

mit Konstanten R $\in \mathbb{R}_{>0}$ und $x_0, \omega \in \mathbb{R}$.

1. Bestimmen Sie Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ und Beschleunigung $\vec{a}(t)$ des Massenpunktes.
2. Zeigen Sie, dass mit $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_x$ gilt:
$$\dot{\vec{r}}(t) = \vec{\omega} \times \vec{r}(t) \tag{20}$$
3. Zeigen Sie, dass Geschwindigkeit $v(t)$, Winkelgeschwindigkeit ω und Beschleunigung $\vec{a}(t)$ zu jedem Zeitpunkt ein orthogonales Dreibein bilden.

Lösung:

1. Geschwindigkeit:
$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = (0, -R\omega sin(\omega t), R\omega cos(\omega t))^T \tag{21}$$
Beschleunigung:
$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = (0, -R\omega^2 cos(\omega t), -R\omega^2 sin(\omega t))^T \tag{22}$$

2.
$$\vec{\omega} \times \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_0 \\ Rcos(\omega t) \\ Rsin(\omega t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -R\omega sin(\omega t) \\ R\omega cos(\omega t) \end{pmatrix} = \dot{\vec{r}}(t) = \vec{v}(t) \tag{23}$$

3. Dass $\vec{\omega}$ senkrecht auf $\vec{v}$ steht, folgt aus 2. Ferner ist $\vec{\omega}$ offensichtlich senkrecht auf $\vec{a}$ und es gilt:
$$\vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t) = R^2\omega^2 sin(\omega t)cos(\omega t) - R^2\omega^2 cos(\omega t)sin(\omega t) + 0 = 0 \tag{24}$$
Analog erhalten wir darüber hinaus:
$$\vec{\omega} \times \vec{r} \propto \vec{v} \tag{25}$$

4 Spiralbahn

Ein Massepunkt bewege sich auf einer Schraubenlinie mit Radius R und Ganghöhe h. Der Betrag der Geschwindigkeit $v = |\vec{v}|$ sei konstant.

1. Geben Sie den Ortsvektor zu Zeit t an und berechnen Sie Geschwindigkeit und Beschleunigung des Massepunktes in kartesischen Koordinaten.
2. Berechnen Sie Ortsvektor, Geschwindigkeit und Beschleunigung in Zylinderkoordinaten im begleitenden Dreibein.

Lösung:

1. In kartesischen Koordinaten ist die Bahnkurve gegeben durch:
$$\vec{r}(t) = \left(Rcos\varphi(t), Rsin\varphi(t), \frac{h\varphi(t)}{2\pi}\right)^T_{(\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)} = \left(Rcos\omega t, Rsin\omega t, \frac{h\omega t}{2\pi}\right)^T_{(\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)'} \tag{26}$$
wobei wir ω als die noch zu bestimmende, konstante Winkelgeschwindigkeit gesetzt haben. Damit ergibt sich die Geschwindigkeit zu:
$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \left(-R\omega sin\omega t, R\omega cos\omega t, \frac{h\omega}{2\pi}\right)^T_{(\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)} \tag{27}$$
Und die Beschleunigung zu:
$$\vec{a}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = \left(-R\omega^2 cos\omega t, -R\omega^2 sin\omega t, 0\right)^T_{(\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)} \tag{28}$$
Wir erhalten für den Betrag der Geschwindigkeit:
$$v^2 = R^2\omega^2 + \frac{h^2\omega^2}{4\pi^2} \tag{29}$$
sodas $\omega = \frac{v}{\sqrt{R^2+\frac{h^2}{4\pi^2}}}$.

2. In Zylinderkoordinaten ist die Bahnkurve:

$$\vec{r}(t) = R\vec{e}_\rho + \frac{h\omega t}{2\pi}\vec{e}_z = \left(R, 0, \frac{h\omega t}{2\pi}\right)^T_{(\vec{e}_\rho(\vec{r}(t)),\vec{e}_\varphi(\vec{r}(t)),\vec{e}_z)'} \tag{30}$$

Wir werden aber die Tupeldarstellung im Folgenden nicht verwenden, um Verwechslungen mit kartesischen Koordinaten zu vermeiden. Daraus ergibt sich die Geschwindigkeit:

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = R\dot{\vec{e}}_\rho + \frac{h\omega}{2\pi}\vec{e}_z = R\omega\vec{e}_\varphi + \frac{h\omega}{2\pi}\vec{e}_z \tag{31}$$

und der Tangentenvektor:

$$\vec{T} = \frac{\vec{v}}{v} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}}}\vec{e}_\varphi + \frac{h}{\sqrt{4\pi^2 R^2 + h^2}}\vec{e}_z \tag{32}$$

Die Ableitung des Tangentenvektors ist:

$$\dot{\vec{T}} = -\frac{R}{\sqrt{R^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}}}\omega\vec{e}_\rho = -\frac{Rv}{R^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}}\vec{e}_\rho \tag{33}$$

woraus wir den Krümmungsradius $\mathcal{R} = \frac{v}{|\dot{\vec{T}}|} = R + \frac{h^2}{4\pi^2 R}$ ablesen. Daraus ergibt sich der Normalenvektor zu:

$$\vec{N} = \frac{\dot{\vec{T}}}{|\dot{\vec{T}}|} = -\vec{e}_\rho \tag{34}$$

Das Dreibein wird vervollständigt durch den Binormalvektor:

$$\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}}}\vec{e}_z - \frac{h}{\sqrt{4\pi^2 R^2 + h^2}}\vec{e}_\varphi \tag{35}$$

Die Beschleunigung im begleitenden Dreibein ist:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \dot{v}\vec{T} + v\dot{\vec{T}} = \frac{v^2}{\mathcal{R}}\vec{N} \tag{36}$$

was sich mit dem obigen Ergebnis in kartesischen Koordinaten deckt.

5 Zweikörperproblem

Zwei Massepunkte m_1 und m_2 bewegen sich unter dem Einfluss des Potentials $V(r)$, dass nur vom Relativabstand $r = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$ der beiden Massepunkte abhängt.

1. Formulieren Sie die Bewegungsgleichungen für den Relativvektor $\vec{r}(t) = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ und den Schwerpunktsvektor
$$\vec{R}(t) = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} \tag{37}$$
2. Zeigen Sie, welche Erhaltungssätze für Impuls und Energie in der Relativ- und Schwerpunktsbewegung gelten.
3. Zeigen Sie, dass der Drehimpuls eine Erhaltungsgröße ist und dass die Relativbewegung in der durch die Vektoren $\vec{r}(t)$ und $\dot{\vec{r}}(t)$ aufgespannten Ebene verläuft.
4. Drücken Sie die Energie und den Drehimpuls der Relativbewegung in ebenen Polarkoordinaten r und φ aus.

Lösung:

1. Es gilt Actio gegengleich Reactio, also:
$$\begin{aligned} m_1\ddot{\vec{r}}_1 &= -\vec{\nabla}_1 V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = +\frac{\partial V(r)}{\partial r}\frac{\vec{r}}{r} \\ m_2\ddot{\vec{r}}_2 &= -\vec{\nabla}_2 V(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = -\frac{\partial V(r)}{\partial r}\frac{\vec{r}}{r} \end{aligned} \tag{38}$$
Aus der Summe dieser beiden Gleichungen folgt für den Schwerpunktsvektor $\vec{R}$:
$$\ddot{\vec{R}} = \frac{m_1\ddot{\vec{r}}_1 + m_2\ddot{\vec{r}}_2}{m_1 + m_2} = 0 \tag{39}$$
Aus der Differenz der beiden Bewegungsgleichungen erhalten wir unter Verwendung von $\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r}$ und $\vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r}$:
$$\begin{aligned} m_2\ddot{\vec{r}}_2 - m_1\ddot{\vec{r}}_1 &= -2\frac{\partial V(r)}{\partial r}\frac{\vec{r}}{r} \\ m_2\left(\ddot{\vec{R}} - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\ddot{\vec{r}}\right) + m_1\left(\ddot{\vec{R}} - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\ddot{\vec{r}}\right) &= -2\frac{\partial V(r)}{\partial r}\frac{\vec{r}}{r} \end{aligned} \tag{40}$$
Unter Verwendung von $\ddot{\vec{R}} = \vec{0}$ und Einführung der reduzierten Masse $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ mit $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$ erhalten wir:
$$\mu\ddot{\vec{r}} = \frac{\partial V(r)}{\partial r}\frac{\vec{r}}{r} \tag{41}$$

Zusammenfassend zerfällt das Zweikörperproblem also in eine kräftefreie Bewegung des Massenschwerpunktes $\vec{R}$ und eine Einkörperbewegung der Relativkoordinate $\vec{r}$ mit der reduzierten Masse μ im gegebenen Potential $V(r)$.

2. Es gilt $\ddot{\vec{R}} = 0$ und damit ist der Gesamtdrehimpuls:

$$\vec{P} = M\dot{\vec{R}} = const. \tag{42}$$

erhalten. Ebenso erhalten ist die Energie der Schwerpunktsbewegung:

$$\begin{aligned} E_R &= \frac{1}{2}M\dot{\vec{R}}^2 \\ \frac{dE_R}{dt} &= \frac{1}{2}M\frac{d\dot{\vec{R}}^2}{dt} = M\dot{\vec{R}}\ddot{\vec{R}} = 0 \end{aligned} \tag{43}$$

und die Energie der Relativbewegung:

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 + V(r) \\ \frac{dE_r}{dt} &= \frac{1}{2}\mu\frac{d\dot{\vec{r}}^2}{dt} + \frac{dV(r)}{dt} = \mu\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} + (\vec{\nabla}V) \cdot \dot{\vec{r}} = 0 \end{aligned} \tag{44}$$

Damit ist auch die Gesamtenergie erhalten.

3. Für den Drehimpuls der Relativbewegung:

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} = \mu\vec{r} \times \dot{\vec{r}} \tag{45}$$

gilt:

$$\dot{\vec{l}} = \mu \underbrace{\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}}_{=\vec{0}} + \mu\vec{r} \times \underbrace{\ddot{\vec{r}}}_{\propto\vec{r}} = \vec{0} \tag{46}$$

Damit ist gezeigt, dass der Drehimpuls $\vec{l} = \mu\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$ erhalten ist und damit $\vec{r}$ und $\dot{\vec{r}}$ stets in derselben Ebene senkrecht dazu liegen.

4. In Polarkoordinaten gilt:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= r\vec{e}_r = \begin{pmatrix} rcos\varphi \\ rsin\varphi \end{pmatrix} \\ \dot{\vec{r}} &= \begin{pmatrix} \dot{r}cos\varphi - r\dot{\varphi}sin\varphi \\ \dot{r}sin\varphi + r\dot{\varphi}cos\varphi \end{pmatrix} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \end{aligned} \tag{47}$$

Damit erhalten wir:

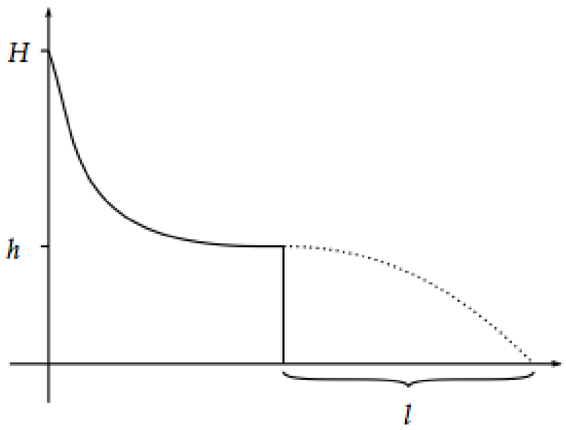
$$E_r = \frac{\mu}{2}\dot{\vec{r}}^2 + V(r) = \frac{\mu}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + V(r) \tag{48}$$

und:

$$\vec{l} = \mu\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \mu r^2 \left(\underbrace{\vec{e}_r \times \vec{e}_r}_{=0} + \dot{\varphi}\vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi \right) = \mu r^2 \dot{\varphi} \tag{49}$$

6 Energieerhaltung

Ein Skispringer gleitet aus dem Stand reibungslos auf der Schanze der Anfangshöhe H bis auf die Absprunghöhe h. Der Absprung sei horizontal. Bestimmen Sie die Höhe h, bei der die Sprungweite l maximal ist. Geben Sie den maximalen Wert l_{max} an.



Lösung:

Die Absprunggeschwindigkeit v_a ergibt sich aus dem Energieerhaltungssatz. Legt man den Potentialnullpunkt für das Schwerefeld auf Höhe des Landepunkts, so lautet die Energiebilanz am Start und beim Absprung:

$$mgH = mgh + \frac{1}{2}mv_a^2 \tag{50}$$

Damit erhalten wir für den Betrag der Absprunggeschwindigkeit:

$$v_a = \sqrt{2g(H-h)} \tag{51}$$

Der Absprung erfolgt waagrecht. Die Flugdauer t_f steht daher mit der Höhe h entsprechend des freien Falls aus der Ruhe in Verbindung, während sich die Flugweite l aus der Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit v_a ergibt:

$$h = \frac{gt_f^2}{2} \tag{52}$$

$$l = v_a t_f \tag{53}$$

Durch Auflösen von (52) nach $t_f = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ und Einsetzen in (53) erhalten wir die Sprungweite l als Funktion der Höhe des Absprungs:

$$l(h) = v_a \sqrt{\frac{2h}{g}} = 2\sqrt{h)(H-h)} \tag{54}$$

Lokale Extreme sind bei Nullstellen der Ableitung. Am Rand des Definitionsbereichs $h \in \{0, H\}$ sind offensichtlich Minima mit $l(0) = l(H) = 0$, sodass ein einzelnes, lokales Extremum ein Maximum sein muss. Zur Vereinfachung der Rechnung benutzen wir, dass Extremwerte von l auch Extremwerte von l^2 sind. Wir berechnen also die Ableitung von l^2:

$$\frac{d}{dh} l^2(h) = 4(H - 2h) \tag{55}$$

Diese verschwindet für $h = \frac{H}{2}$, sodass wir als maximale Sprungweite erhalten:

$$l_{max} = l\left(\frac{H}{2}\right) = H \tag{56}$$

7 Lenzscher Vektor

Ein Teilchen der Masse m bewege sich in einem radialsymmetrischen Potential der Form:

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r} \tag{57}$$

mit konstantem α. Der Lenzsche Vektor $\vec{\Lambda}$ entlang der Bahn $\vec{r}(t)$ des Teilchens ist definiert durch:

$$\vec{\Lambda} := \frac{\dot{\vec{r}} \times L}{\alpha} - \frac{\vec{r}}{r} \tag{58}$$

wobei $\vec{L} = m\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$ der Drehimpuls des Teilchens ist. Zeigen Sie, dass $\vec{\Lambda}$ eine Erhaltungsgröße ist.

Lösung:

Die Bewegungsgleichung in einem radialsymmetrischen Potential V (r) ergibt sich zu:

$$m\ddot{\vec{r}}(t) = -\vec{\nabla} V(r) = -\frac{dV}{dr}\frac{\vec{r}(r)}{r(t)} = -\frac{dV}{dr}\vec{e}_r(t) \tag{59}$$

Der Drehimpuls $\vec{L} = \vec{r}(t) \times \vec{p}(t) = m\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$ ist erhalten, wie man durch direktes Nachrechnen und Anwenden der Bewegungsgleichung leicht zeigt:

$$\frac{1}{m}\dot{\vec{L}} = \underbrace{\vec{r} \times \dot{\vec{r}}}_{\propto \vec{r} \times \vec{e}_r = 0} + \underbrace{\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}}_{=0} = \vec{0} \tag{60}$$

Die Bewegung verläuft daher in der Ebene senkrecht zu $\vec{L}$. Wir wählen an das Problem angepasste Koordinaten, in denen gilt $\vec{L} = L\vec{e}_z$, dann liegen die Vektoren $\vec{r}(t)$, $\vec{p}(t) \perp \vec{L}$ in der x-y-Ebene. Für den Betrag des Drehimpulses gilt $L = mr^2\dot{\varphi}$. In Polarkoordinaten gilt:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{\Lambda}} &= \frac{1}{\alpha}(\ddot{\vec{a}} \times \vec{L} + \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{L}}) - \dot{\vec{e}}_r(t) = -\frac{1}{m\alpha}\frac{dV}{dr}\vec{e}_r(t) \times \vec{L} + 0 - \dot{\varphi}\vec{e}_z \times \vec{e}_r(t) \\ &= \left(-\frac{1}{m\alpha}\frac{dV}{dr} + \frac{1}{mr^2}\right)(\vec{e}_r(t) \times \vec{L}) \overset{\mathrm{V} = -\frac{\alpha}{r}}{=} \left(-\frac{1}{mr^2} + \frac{1}{mr^2}\right)(\vec{e}_r(t) \times \vec{L}) = 0 \end{aligned} \tag{61}$$

Bemerkung: Zeitliche Änderung des Einheitsvektors $\vec{e}_r(t)$ ist eine Rotation um die z-Achse mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}(t)$.
Alternativ kann die Zeitableitung von $\vec{\Lambda}$ auch unter Verwendung der folgenden Relationen berechnet werden:

$$\frac{1}{m\alpha}\vec{\nabla}V \times \vec{L} = \vec{r}\left(\dot{\vec{r}} \cdot \frac{1}{\alpha}\vec{\nabla}V\right) - \dot{\vec{r}}\left(\vec{r} \cdot \frac{1}{\alpha}\vec{\nabla}V\right) \tag{62}$$

$$\dot{\vec{e}}_r(t) = \frac{\dot{\vec{r}}}{r} + \vec{r}\left(\dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla}\frac{1}{r}\right) \tag{63}$$