Ferienkurs Experimentalphysik 3

Quantenphänomene

Qi Li, Bernhard Loitsch, Hannes Schmeiduch

Donnerstag, 08.03.2012

Inhaltsverzeichnis

1 Quantenmechanische Eigenschaften von Licht & Teilchen 2
1.1 Welle-Teilchen-Dualismus . . . 2
1.2 Heisenbergsche Unschärferelation . . . 2
1.3 Photonen im Gravitationsfeld . . . 3

2 Photoeffekt 3
2.1 Experimenteller Aufbau . . . 3
2.2 Beobachtungen und Folgerungen . . . 4

3 Comptonstreuung 5

4 Paarerzeugung 7

5 Röntgenstrahlung 8

6 Laser 8
6.1 2-Niveau-System . . . 8
6.2 3-Niveau-Laser . . . 9
6.3 4-Nivau-Laser . . . 10

7 Strahlungsgesetze 11
7.1 Schwarzer Strahler . . . 11
7.2 Plancksches Strahlungsgesetz . . . 11
7.3 Stefan-Boltzmann-Gesetz . . . 12
7.4 Wiensches Verschiebungsgesetz . . . 13
7.5 Wiensches Strahlungsgesetz . . . 13
7.6 Rayleigh-Jeans-Gesetz . . . 13

1 Quantenmechanische Eigenschaften von Licht & Teilchen

Viele Experimente belegen die Teilcheneigenschaften von Licht. Zwei wichtige Beispiele:

- Photoeffekt (Photonen haben eine diskrete Energie)
- Comptonstreuung (Photonen haben diskrete Energie und Impuls)

Andererseits zeigen Teilchen Wellencharakter (z.B. Interferenz von Elektronen und Neutronen im Festkörper $\widehat{=}$ Gitter).

1.1 Welle-Teilchen-Dualismus

Jede Strahlung hat sowohl Wellen- als auch Teilchencharakter, aber je nach durchgeführtem Experiment tritt nur der eine oder der andere in Erscheinung. Die Lösung der Schrödingergleichung sind *Wellen(funktionen)* deren quadrierte Amplitude als Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte von *„Teilchen“* interpretiert wird.

Energie und Impuls von masselosen Teilchen sind proportional zur Frequenz derer Wellenfunktionen:

- Energie eines Photons $E_\gamma = h \cdot \nu = \hbar\omega$
- Impuls eines Photons $p_\gamma = \frac{E_\gamma}{c} = \frac{h \cdot \nu}{c} = \hbar k$ (de Broglie-Beziehung)

Für Teilchen mit Masse gilt nach der Schrödingergleichung:

- Energie eine Teilchens (z.B. Neutron, Elektron) $E = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$
- Impuls eines Teilchens $p = \hbar k$

1.2 Heisenbergsche Unschärferelation

Aus der Schrödingergleichung folgt auch die Unschärferelation, welche besagt, dass nicht beide Eigenschaften Ort und Impuls bzw. Energie und Zeit gleichzeitig exakt bestimmbar sind. Es gilt:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq h$$

(Fouriertransformierte eines schmalen Wellenpaketes ergibt ein breites Wellenpaket)

Für Energie und Zeit (z.B. Lebensdauer eines Zustandes) gilt analog:

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq h$$

1.3 Photonen im Gravitationsfeld

Die spezielle Relativitätstheorie besagt, dass Photonen aufgrund ihrer Energie Masse haben obwohl sie keine Ruhemasse besitzen. Dies folgt aus der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung:

$$E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4 = \left(mc^2\right)^2$$

Einsetzen von $m_0 = 0$ und $E = h\nu$ ergibt die Photonenmasse:

$$m_\gamma = \frac{h}{c^2} \cdot \nu \tag{1}$$

Diese Masse wechselwirkt mit dem Gravitationsfeld. Das Photon hat in einem Gravitationsfeld der Masse M und des Radius R die potentielle Energie

$$U_G = G \cdot \frac{m_\gamma \cdot M}{R} = \frac{h\nu GM}{c^2R}$$

Wenn ein Photon aus einem Gravitationsfeld herausfliegt, muss diese potentielle Energie überwunden werden. Das Photon verliert also kinetische Energie, was sich in einer Rotverschiebung der Frequenz bemerkbar macht:

$$\Delta\nu = \frac{U_G}{h} = \frac{GM}{c^2R} \cdot \nu \tag{2}$$

2 Photoeffekt

2.1 Experimenteller Aufbau

Eine Kathode wird mit monochromatischem Licht bestrahlt, wodurch Elektronen von der Kathode austreten. Diese werden durch eine Spannungsquelle auf eine Anode beschleunigt. Gelangen die Elektronen zur Anode, misst man einen Photostrom.

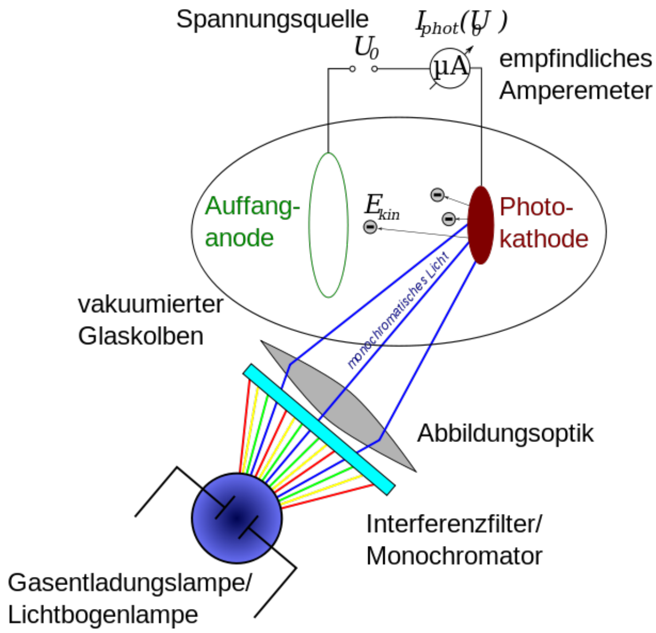

Abbildung 1: Experimenteller Aufbau zum Photoeffekt (Quelle: Wikipedia-Nutzer Jkrieger)

2.2 Beobachtungen und Folgerungen

- Die Spannung U_{min}, ab welcher der Photostrom einsetzt, hängt nicht von der Lichtintensität, sondern lediglich von der Frequenz des eingestrahlten Lichts ab (Widerspruch zur klassischen Vorstellung!)
- Bereits bei einer negativen Spannung U_{min} wird ein Photostrom gemessen.
- Für eine konstante Frequenz des Lichtes ist die Sättigungsstromstärke proportional zur Lichtintensität.
- Licht unter einer materialspezifischen Grenzfrequenz ω_0 erzeugt keinen Photostrom.

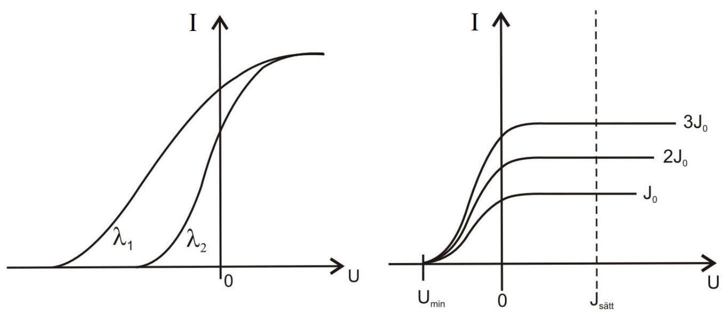

Abbildung 2: Strom-Spannungs-Kurve für verschiedene Lichtfrequenzen und verschiedene Lichtintensitäten.

- Führt man den Versuch mit verschiedenen Materialien und verschiedenen Frequenzen durch, so erhält man für U_{min} als Funktion der Frequenz immer Geraden der gleichen Steigung, allerdings unterschiedlichem Y-Achsenabschnitt. Die Gleichung dieser Gerade ist die Einstein Gleichung:

$$e \cdot U_{min} = E_{kin} = h\nu - W_A \tag{3}$$

wobei e die Ladung des Elektrons, W_A die Austrittsarbeit des verwendeten Materials und h das Plancksche Wirkungsquantum sind. Man sieht also, dass sich das Plancksche Wirkungsquantum aus der Steigung dieser Kurve berechnen lässt $h = \frac{\Delta E}{\Delta \nu}$

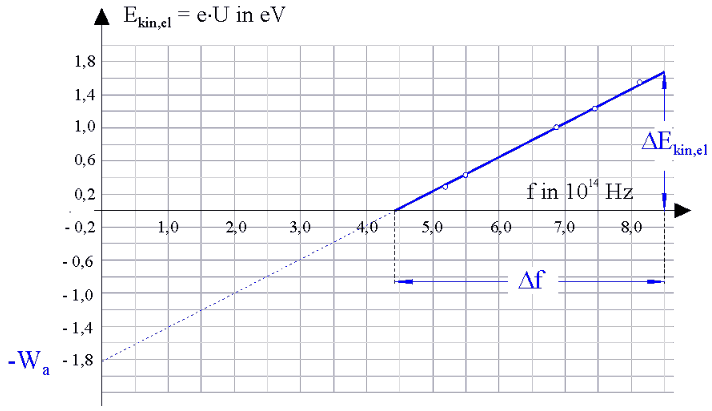

Abbildung 3: Die Schwellenspannung U_{min} als Funktion der Frequenz des einfallenden Lichts. Der Achsenabschnitt W_A der Gerade ist materialspezifisch und entspricht der Austrittsarbeit. Die Steigung der Gerade ist materialunabhängig.

Plancksches Wirkungsquantum $h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ Js $= 4{,}137 \cdot 10^{-15}$ eV s

Energie eines Photons $h \cdot \nu = \hbar\omega$

Photonen sind Teilchen mit einer Energie $E_\gamma = h \cdot \nu$ welche Elektronen aus der Kathode heraus stoßen. Die Photonenenergie muss größer als die Austrittsarbeit der Elektronen in der Kathode sein um einen Photostrom zu messen. Die überschüssige Energie $E_\gamma - W_A$ entspricht der kinetischen Energie der austretenden Elektronen.

Da der Sättigungsstrom (Anzahl der Elektronen pro Zeit) proportional zur Lichtintensität ist, handelt es sich bei Licht um einen Teilchenstrahl (Intensität $\propto$ Anzahl Photonen pro Zeit und Fläche)

3 Comptonstreuung

Ein Photon streut an einem freien Elektron. Für ausreichend hohe Photonnenenergien ($\geq$ 100keV) können auch gebundene Elektronen als frei genähert werden.

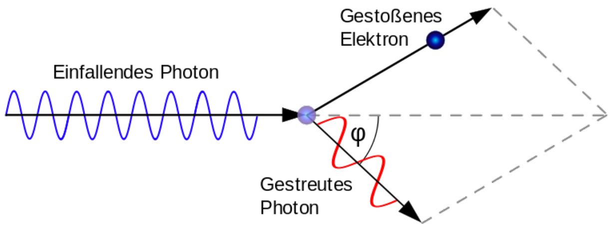

Abbildung 4: Comptonstreuung (Quelle: Wikipedia-Nutzer EoD)

Es soll E'_γ, die Energie des Photons nach der Streuung mit dem Elektron, bestimmt werden. Es gelten die Energie- und Impulserhaltung:

$$E_\gamma + E_e = E'_\gamma + E'_e \tag{4}$$

$$\vec{p_\gamma} + \vec{p_e} = \vec{p_\gamma}' + \vec{p_e}' \tag{5}$$

Für die Energie muss die relativistische Energie-Impuls-Beziehung berücksichtigt werden:

$$E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4 \tag{6}$$

Wir befinden uns im Ruhesystem des Elektrons ($p_e = 0$). Die Energien in Gleichung (4) werden durch (6) ersetzt:

$$E_\gamma + m_e^2c^4 = E'_\gamma + \sqrt{p_e'^2c^2 + m_e^2c^4} \tag{7}$$

Die Vektoren der Impulserhaltung können durch den Winkel θ ausgedrückt werden:

$$p_e^2 = \left(\vec{p_\gamma} - \vec{p_\gamma}'\right)^2 = p_\gamma^2 + p_\gamma'^2 - 2p_\gamma p'_\gamma cos(\theta) \tag{8}$$

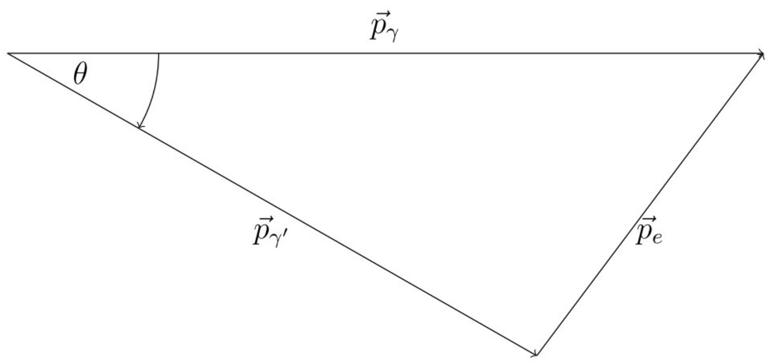

Abbildung 5: Impulsvektoren von Elektron und Photon

Nach dem Einsetzen von (8) in (7) und auflösen nach E'_γ erhält man schließlich:

$$E'_\gamma = E_\gamma \cdot \frac{m_e \cdot c^2}{m_e \cdot c^2 + E_\gamma \left(1 - cos(\theta)\right)} \tag{9}$$

Der Ausdruck kann auch für Wellenlängen des Photons umgeschrieben werden, duch Substitution von $E_\gamma = \frac{hc}{\lambda}$:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}\left(1 - cos(\theta)\right) = \lambda_c \left(1 - cos(\theta)\right) \tag{10}$$

mit der Compton-Wellenlänge $\lambda_c = \frac{h}{m_e c}$

Der Impulsübertrag ist maximal für $\theta = 180°$ (Rückwärtsstreuung).

4 Paarerzeugung

Ein weiterer möglicher Prozess zwischen Photonen und Elektronen ist die Paarerzeugung.

Wenn die Energie eines Photons größer als $2m_e c^2 \approx 1022 keV$ (m_e = Ruhemasse des Elektrons/Positrons) ist, kann es ein Elektron-Positron Paar erzeugen. Dieser Prozess kann aufgrund der Impulserhaltung nur in der Nähe eines Atomkerns stattfinden: Im Schwerpunktsystem von Elektron und Positron ist der Gesamtimpuls von Elektron und Positron 0. Der Kern muss den Impuls des Photons auffangen.

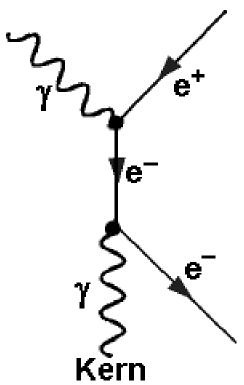

Abbildung 6: Feynmangraph zur Paarerzeugung. Die Zeitachse läuft von oben nach unten. Das Positron läuft in die negative Zeitrichtung, weil es ein Antiteilchen ist.

5 Röntgenstrahlung

Elektronen werden mit einer Spannung U auf eine Anode beschleunigt. Wenn die Elektronen mit der kinetischen Energie eU ankommen, werden sie von der Anode abgebremst. Die abgegebene Energie wird in Form von Photonen als kontinuierliche Bremsstrahlung frei. Das Strahlungsspektrum reicht bis zur Maximalenergie eU.

Außerdem können die beschleunigten Elektronen die im Anodenmaterial an Atome gebundenen Elektronen herausschlagen. Wenn Elektronen aus energetisch höher liegenden Schalen des Atoms dann in die freien Zustände der herausgeschlagenen Elektronen fallen, geben sie die überschüssige Energie als Licht ab. Diese abgegebenen Photonen besitzen als Energie die materialabhängige Energiedifferenz zwischen den Elektronenschalen ⇒ *Charakteristische Röntgenstrahlung*.

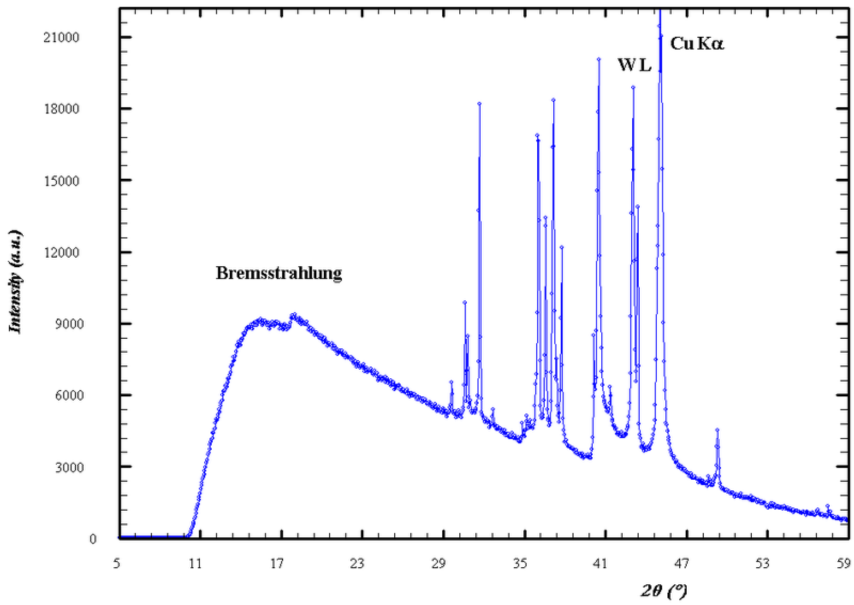

Abbildung 7: Röntgenspektrum einer Kupferanode

6 Laser

Das Ziel des Lasers ist es viele gleichartige (Wellenlänge, Phase, Richtung, Polarisation) Photonen zu emittieren. Dabei macht man sich die Verstärkung durch stimulierte Emission zunutze.

6.1 2-Niveau-System

Trifft ein Photon auf ein 2-Niveau-System, dessen Energie gleich dem Abstand zwischen den Energieniveaus ist, kann es zur stimulierten Emission kommen wenn sich Elektronen im oberen Zustand befinden. Dabei fällt ein Elektron in den Grundzustand und es wird ein weiteres Photon mit exakt den Eigenschaften wie das ankommende Photon abgestrahlt. Durch die Rückkopplung der Photonen in das System (z.B. durch halbtransparente Spiegel) wird der Prozess wiederholt und wiederum neue Photonen abgestrahlt. Es kommt zur Photonenlawine.

Leider ist die stimulierte Emission nicht der einzige Prozess im 2-Niveau-Systeme, sondern es gibt noch die stimulierte Absorbtion und die spontane Emission. Die stimulierte Emission und Absorption sind bei gleicher Besetzungszahl des Grund- und angeregten Zustandes gleich wahrscheinlich. Daher ist es unmöglich eine Photonenmultiplikation zu erhalten: Es werden durch Absorption gleich viele Elektronen aus dem Grundzustand angeregt, wie durch Emission Elektronen in den Grundzustand fallen.

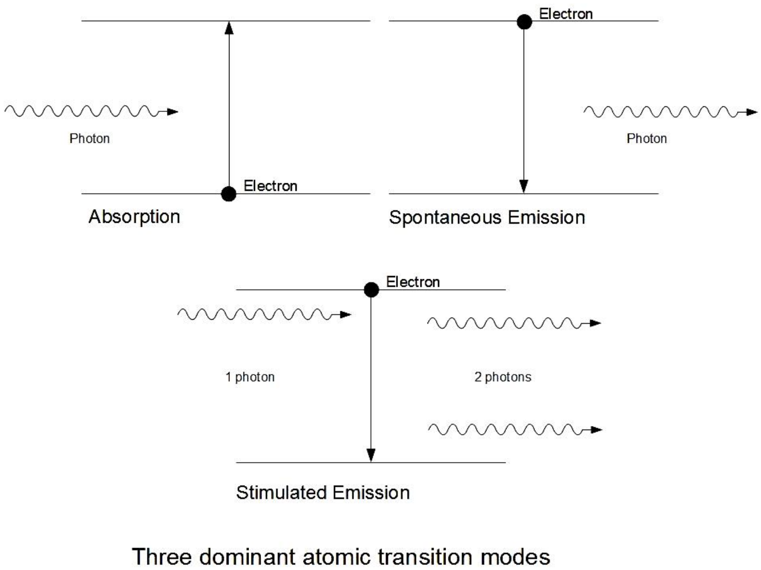

Abbildung 8: Quantenmechanisches 2-Niveau-System

6.2 3-Niveau-Laser

Da die Emission/Absorption proportional zur Besetzungszahl der Elektronen im Grundzustand/angeregten Zustand ist, benötigt man eine *Besetzungsinversion* um mehr Photonen zu emittieren als zu absorbieren. Die wird durch das *Pumpen* des Lasers erreicht: Elektronen werden aus dem Grundzustand in das angeregten Niveau hochgepumpt. Zum Pumpen ist ein 3. Niveau notwendig, weil ja Hochpumpen und stimulierte Emission gleich wahrscheinlich sind. Es wird in ein 3. Niveau über dem angeregten Niveau gepumpt aus welchem die Elektronen durch spontane Emission in das angeregte Niveau fallen. Somit ist der angeregte Zustand stärker besetzt als der Grundzustand und es herrscht Besetzungsinversion.

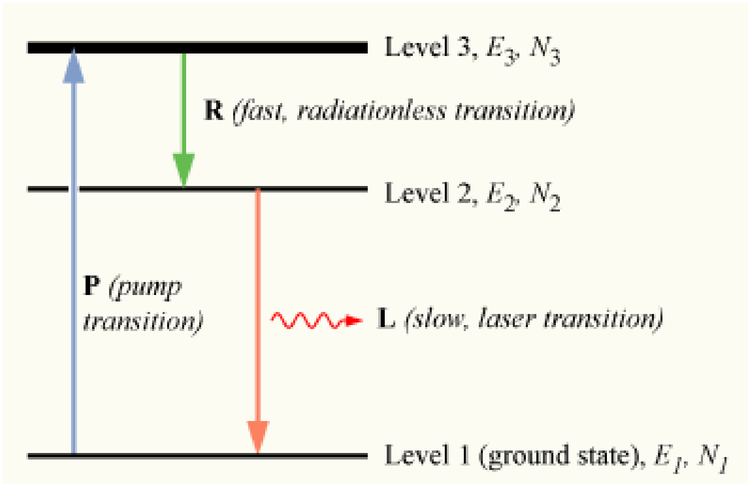

Abbildung 9: 3-Niveau-Laser (Quelle: Wikipedia-Nutzer Bob Mellish

6.3 4-Nivau-Laser

Bei einem 3-Niveau-Laser ist relativ starkes Pumpen erforderlich da für eine Besetzungsinversion mindestens die Hälfte der Elektronen in den angeregten Zustand gepumpt werden müssen.

Eine Verbesserung liefert der 4-Niveau-Laser, bei dem der Grundzustand durch spontane Emission in ein 4. tiefer liegendes Nivau geleert wird. Gepumpt wird vom tiefsten in das höchste Niveau. Somit erhält man schon ab dem ersten gepumpten Elektron eine Besetzungsinversion.

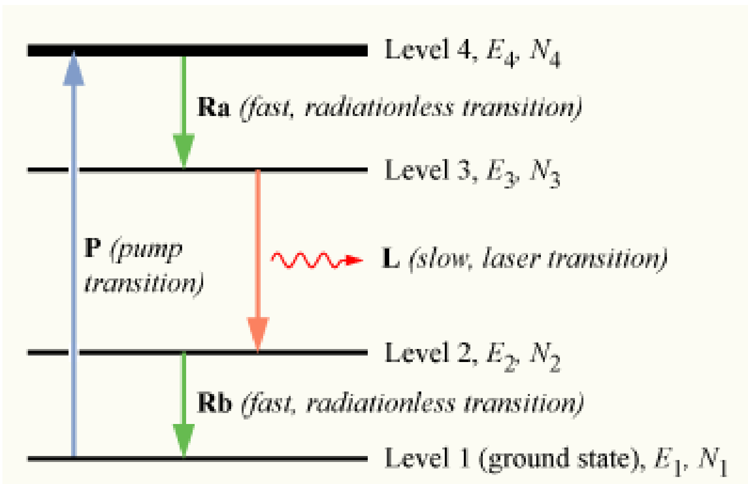

Abbildung 10: 4-Niveau-Laser (Quelle: Wikipedia-Nutzer Bob Mellish

7 Strahlungsgesetze

7.1 Schwarzer Strahler

Jeder Körper absorbiert und reflektiert einen bestimmten Bruchteil der einfallenden Strahlung, abhängig von der Wellenlänge der Strahlung und abhängig von der Temperatur des Körpers. Für den Absorbtionsgrad $\alpha(\nu, T)$ und den Reflexionsgrad $\rho(\nu, T)$ gilt aufgrund der Energieerhaltung:

$$\alpha(\nu, T) + \rho(\nu, T) = 1$$

Zusätzlich emittiert der Körper noch Strahlung abhängig von seiner Temperatur mit dem Emissionsgrad $\epsilon(\nu, T)$. Das Kirchhoffsche Strahlungsgesetz besagt (Herleitung aus der Energieerhaltung), dass für einen Körper im thermodynamischen Gleichgewicht gilt:

$$\epsilon(\nu, T) = \alpha(\nu, T)$$

Der schwarze Strahler ist definiert als $\alpha = 1$. Das heißes gilt $\rho = 0$ und $\epsilon = 1$. Der schwarze Strahler ist die ideale thermische Strahlungsquelle.

Das Spektrum der Strahlung ist von der Wellenlänge und Temperatur abhängig und sieht folgendermaßen aus:

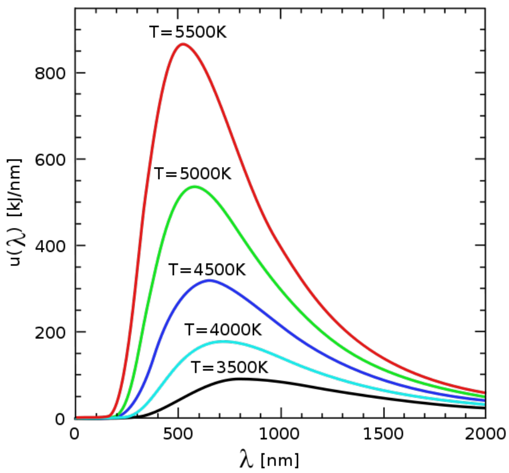

Abbildung 11: Spektrale Verteilung der Schwarzkörperstrahlung bei unterschiedlichen Temperaturen. $u(\lambda)$ ist die Energiedichte (Energie pro Wellenlängenintervall und Volumen). (Quelle: Wikipedia-Nutzer 4C)

Dieses Spektrum beobachtet man bei Sternen und anderen Objekten die (näherungsweiße) schwarzer Strahler sind.

7.2 Plancksches Strahlungsgesetz

Planck konnte eine Funktion finden, die das obige (empirische) Strahlungsspektrum sehr gut wiedergibt.

$$u_\nu(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} \tag{11}$$

$u_\nu(\nu, T)$ ist die Energiedichte pro Frequenz ($\frac{J}{m^3 Hz}$). Um die abgestrahlte Eneriedichte zu erhalten, muss 11 über ein Frequenzintervall integriert werden:

$$u(T) = \int_{\nu_1}^{\nu_2} u_\nu(\nu, T) d\nu$$

Die abgestrahlte Intensität ist gegeben als:

$$I(T) = \frac{1}{4} c u(T) \tag{12}$$

Bei der Umrechnung in die Wellenlängendarstellung muss auf den nichtlinearen Zusammenhang zwischen Frequenz und Wellenlänge geachtet werden ($\nu = \frac{c}{\lambda}$):

$$u_\nu(\nu, T) d\nu = u_\lambda(\lambda, T) d\lambda$$

$$\Rightarrow u_\lambda(\lambda, T) = u_\nu(\frac{c}{\lambda}, T) \left| \frac{d\nu}{d\lambda} \right| = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1} \tag{13}$$

7.3 Stefan-Boltzmann-Gesetz

Die gesamte abgestrahlte Leistung ergibt sich als das Integral der Planckschen Strahlungsdichte über alle Frequenzen $\nu \in [0, \infty]$. Um das Integral ausrechenen zu können, verwendet man folgende Substitution:

$$x = \frac{h\nu}{k_B T} \Rightarrow dx = \frac{h}{k_B T} d\nu$$

Für das Integral gilt die Identität

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}$$

So erhält man aus Gleichung (12) das Stefan-Boltzman-Gesetz:

$$I(T) = \frac{2\pi k_B^4}{c^2 h^3} T^4 \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15 c^2 h^3} T^4$$

$$I(T) = \sigma T^4 \qquad \text{mit } \sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15 c^2 h^3} = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4} \tag{14}$$

7.4 Wiensches Verschiebungsgesetz

Wie in Abbildung (11 gezeigt, verschiebt sich das Maximum des Strahlungsspektrums mit steigender Temperatur zu höheren Wellenlängen. Der Zusammenhang zwischen Position des Maximums λ_{max} und der Temperatur T heißt Wiensches Verschiebungsgesetz:

$$\lambda_{max} = \frac{0,2898 \text{ cm K}}{T} \tag{15}$$

7.5 Wiensches Strahlungsgesetz

Das Wiensche Strahlungsgesetz ist eine Näherung des Planckschen Strahlungsgesetzes für hohe Frequenzen. Denn für *hohe Frequenzen* gilt:

$$e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1 \approx e^{\frac{h\nu}{k_B T}}$$

Eingesetzt in (11) erhält man das Wiensche Strahlungsgesetz:

$$u_\nu(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \nu^3 e^{-\frac{h\nu}{k_B T}} \tag{16}$$

7.6 Rayleigh-Jeans-Gesetz

Für *niedrige Frequenzen* kann mit der Näherung

$$e^{\frac{h\nu}{k_B T}} \approx 1 + \frac{h\nu}{k_B T}$$

das Rayleigh-Jeans-Gesetz hergeleitet werden (Einfach in die Planck Formel einsetzen):

$$u_\nu(\nu, T) = \frac{4k_B T}{c^3} \nu^3 \tag{17}$$

Diese Gleichung entspricht der klassischen Lösung des schwarzen Strahlers, die vor er quantenmechanischen Interpretation von Planck postuliert wurde. Nur bis Wellelängen im Infraroten funktioniert die klassische Lösung genau.