

Ferienkurs Experimentalphysik 3

Beugung und Interferenz

Qi Li, Bernhard Loitsch, Hannes Schmeiduch

Mittwoch, 07.03.2012

Inhaltsverzeichnis

1 Kohärenz	2
2 Beugung	2
2.1 Beugung am Einzelspalt	2
2.2 Beugung am Gitter	5
3 Interferenz	6
3.1 Interferenz am Gitter	6
3.2 Interferenz am Doppelspalt	7
3.3 Interferenz an dünnen Schichten	7
3.4 Interferenz mit mehrfach reflexion an einer dünner Schicht	8
4 Interferometer	9
4.1 Fabry-Perot-Interferometer	9
4.2 Michelson Interferometer	10
5 Doppelbrechung	10

1 Kohärenz

Um die Eigenschaften von Licht in Form von Interferenzerscheinungen untersuchen zu können, ist es erforderlich dass die Phasendifferenz $\Delta\phi$ der interferierenden Strahlen kleiner als 2π ist. Wellen die diese Bedingung erfüllen, nennt man zeitlich kohärent. Bei einer Phasendifferenz von $\Delta\phi \geq 2\pi$ würden sich die Wellen homogen auf dem Abbildenden Schirm verteilen. Die Zeit zwischen der Erzeugung des Lichtes und der Interferenz der Strahlen nennt man **Kohärenzzeit** Δt_c . Die zeitliche Kohärenz ist durch die spektrale Verteilung des Lichts bestimmt. Monochromatisches Licht, z.B. Laser, ist zeitlich vollständig kohärent. Polychromatisches Licht kann hingegen auch nur partial kohärent oder inkohärent sein.

Die Phasenverschiebung zwischen zwei Strahlen beträgt:

$$\Delta\phi = \Delta\omega\Delta t = 2\pi\Delta\nu\Delta t$$

Im Fall von maximaler Phasendifferenz von $\Delta\phi = 2\pi$ ergibt sich die Kohärenzzeit zu:

$$\Delta t_c = \frac{1}{\Delta\nu} \quad (1)$$

Die Kohärenzzeit t_c entspricht der maximalen Zeitspanne, in der $\Delta\phi < 2\pi$ ist. Die in dieser Zeit vom Licht zurückgelegten Strecke heißt **Kohärenzlänge** Δl_c . Da die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichts der Lichtgeschwindigkeit entspricht, ist die Kohärenzlänge wie folgt definiert:

$$\Delta l_c = c\Delta t_c \quad (2)$$

2 Beugung

Die Tatsache, dass wir bei Licht Beugung beobachten können, ist ein eindeutiger Hinweis auf die Wellennatur des Lichts. Der Photoeffekt hingegen belegt uns die Teilchennatur des Lichts.

Unter Beugung versteht man die Ablenkung von Wellen an einem Hindernis. Dies gilt für Licht- und alle anderen elektromagnetischen Wellen, sowie für Schall- und Wasserwellen. Im Falle von elektromagnetischer Strahlung geht es um die Ablenkung an Öffnungen in Größenordnung der Wellenlänge der Strahlung. Die Beschreibung erfolgt durch die Superposition vieler Einzelwellen in der Öffnung (Huygensches Prinzip). Allgemein unterscheid man zwischen Einzelspalt, Doppelspalt und einem Gitter, welches aus vielen Einzelspalten besteht.

2.1 Beugung am Einzelspalt

Um die Beugung besser verstehen zu können, betrachten wir nun Abbildung 1. Wir haben einen Spalt mit der Breite b . Von der linken Seite des Spalts fällt nun paralleles Licht ein welches von N Quellen im Abstand Δb ausgesendet wird. Die Strahlen werden an dem Spalt unter dem Winkel θ gebeugt. Die abgelenkten Strahlen werden dann auf dem Schirm abgebildet und erzeugen ein Beugungsmuster. Der Gangunterschied zwischen zwei benachbarten Strahlen, die unter dem Winkel θ abgelenkt werden, beträgt $D = \Delta b \sin(\theta)$. Damit ergibt sich ein

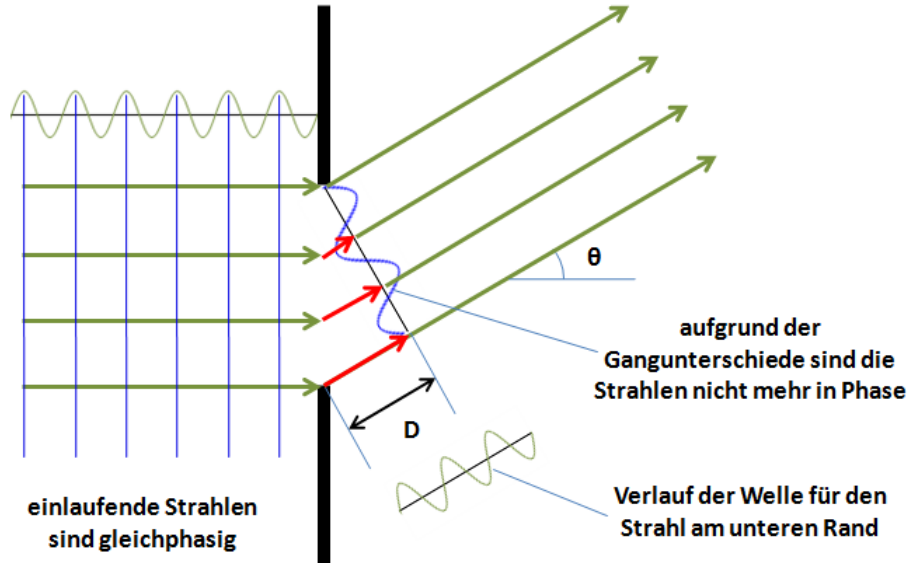


Abbildung 1: Beugung am Einzelspalt

Phasenunterschied von:

$$\Delta\phi = kD = \frac{2\pi}{\lambda}D = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta b \sin(\theta) = \frac{2\pi b}{\lambda N} \sin(\theta) \quad (3)$$

Daraus kann man jetzt die Amplitude der unter einem bestimmten Winkel θ abgelenkten Teilwellen durch Superposition bestimmen.

$$E = E_0 \sum_{k=1}^N e^{i(\omega t + \phi_k)} = E_0 e^{i\omega t} \sum_{k=1}^N e^{i(k-1)\Delta\phi} \quad (4)$$

Dieser Term lässt sich jetzt mit Hilfe einer geometrischen Reihe vereinfachen:

$$\sum_{k=1}^N e^{i(k-1)\Delta\phi} = \frac{e^{iN\Delta\phi} - 1}{e^{i\Delta\phi} - 1} = e^{i\frac{N-1}{2}\Delta\phi} \frac{\sin(\frac{N\Delta\phi}{2})}{\sin(\frac{\Delta\phi}{2})} \quad (5)$$

Wenn wir jetzt die Anzahl N der Quellen gegen unendlichen gehen lassen, dann wird der Sinus Term im Nenner sehr klein und wir können die Kleinwinkelnäherung verwenden. ($N \rightarrow \infty$) ergibt sich für die Intensität $I \propto E^2$

$$I(\theta) = I_0 \frac{\sin^2(\frac{\pi b}{\lambda} \sin(\theta))}{(\frac{\pi b}{\lambda} \sin(\theta))^2} \quad (6)$$

I_0 beschreibt die gesamte Intensität die aus dem Spalt kommt. Die Intensitätsverteilung lässt sich durch periodische Sinus Funktionen beschreiben. Jede Nullstelle dieser Funktion, mit Ausnahme $\theta = 0$ liefert uns ein Minimum. Wenn der Nenner hingegen klein wird, haben wir ein Maximum. Die Ausnahme bei $\theta = 0$ lässt sich sehr einfach erklären. Dazu schauen wir uns die Intensitätsverteilung im Limis gegen 0 an:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} I_0 \frac{\sin^2 \frac{\pi b}{\lambda} \sin \theta}{\left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \theta\right)^2} = I_0$$

Aus der Intensitätsverteilung können wir nun allgemein die Bedingungen für Maxima und Minima ableiten.

$$\begin{aligned} \text{Maxima} &: \frac{\pi b}{\lambda} \sin \theta = m\pi \\ \text{Minima} &: \frac{\pi b}{\lambda} \sin \theta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi \end{aligned}$$

Hierbei entsprechen die Minima genau den Nullstellen der Intensitätsverteilung, die Maxima hingegen den lokalen Maxima im Zähler. In Abbildung 2 ist ein Beugungsmuster von einem Einfach- und einem Doppelspalt dargestellt. Um $\theta = 0^\circ$ befindet sich das 1. Hauptmaxima. In beide Richtungen zeigt uns jeder weitere Peak ein Maximum höherer Ordnung. Analog dazu zeigt uns jede Nullstelle ein Minimum. Es ist noch zu beachten, dass das 0te Minimum mit dem Hauptmaximum zusammenfällt. Da es somit kein Minimum zwischen dem Maximum mit $m = 0$ gibt, wird die Maximumsbedingung mit $m = 0$ als Breite des Hauptmaximums bezeichnet.

Beim Doppelspalt kann man die Intensitätsverteilung als Produkt der Intensitäten der Einzelspalte mit einem Interferenzterm zwischen beiden darstellen.

Die Beugung spielt vor allem bei optischen Geräten eine wichtige Rolle. Beugungserscheinungen lassen sich nicht nur beim Durchgang von Licht durch eine begrenzende Öffnung beobachten, sondern auch bei der Reflexion an einer begrenzten Spiegelfläche. So erhält man z.B. durch Reflexion an einer spiegelnden Kreisfläche ein Beugungsmuster im reflektierten Anteil des Lichts, welches völlig dem eines transmittierten Lichts durch eine Öffnung der gleichen Form entspricht.

Eine wichtige Eigenschaft von optischen Geräten, die durch die Beugung von Licht bestimmt wird, ist das Auflösungsvermögen. Zwei Punkte können gerade dann noch voneinander getrennt werden, wenn das Beugungsmaximum des einen Punktes auf das Beugungsminimum des anderen Punktes fällt. Mathematisch wird dieser Fakt durch das **Rayleigh Kriterium** für kreisförmigen Blenden beschrieben. Es gibt uns die minimale Winkelentfernung des ersten Miniums an:

$$\sin \theta_{min} \approx \theta_{min} = 1,22 \frac{\lambda}{D}$$

Dabei ist D der Durchmesser der Öffnung.

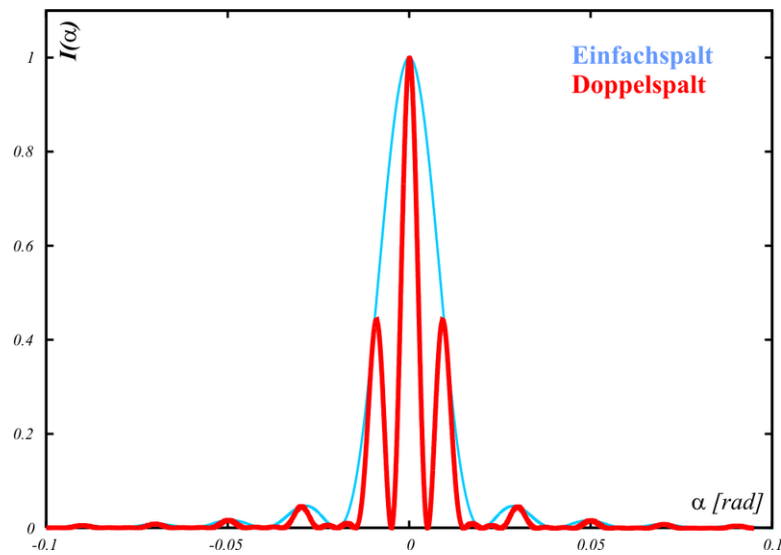


Abbildung 2: Beugung am Einzelspalt

2.2 Beugung am Gitter

Wenn eine ebene Welle senkrecht auf eine Anordnung von N parallelen Spalten fällt, dann wird die Intensitätsverteilung aus dem Produkt von zwei Faktoren beschrieben. Der erste Faktor berücksichtigt die durch Beugung an jedem Einzelspalt verursachte Intensitätsverteilung, der zweite Faktor die Interferenz der Strahlen. Die Herleitung der Phasenverschiebung von zwei Spalten ist analog zu

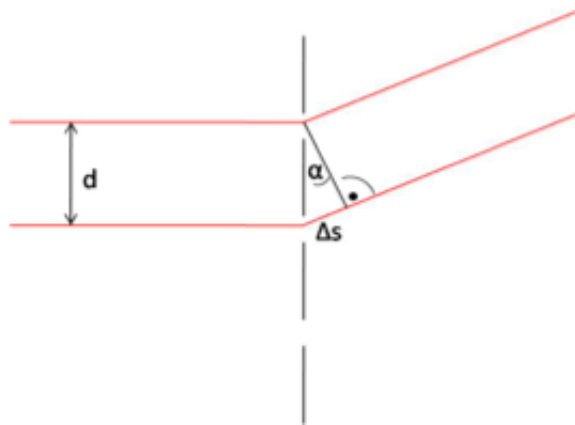


Abbildung 3: Gangunterschied optisches Gitter

oben, jedoch tritt an Stelle der Breitendifferenz Δb der Abstand zwischen den Spalten d auf. Der Interferenzterm der Intensitätsverteilung kann dann für N

Spalten mit den Gleichungen (3),(4) und (5) berechnet werden.

$$I_{inter} = I_0 \frac{\sin^2 \frac{N\pi d}{\lambda} \sin\theta}{\sin^2 \frac{\pi d}{\lambda} \sin\theta} \quad (7)$$

$$I(\theta) = I_0 \frac{\sin^2 \frac{\pi b}{\lambda} \sin(\theta)}{(\frac{\pi b}{\lambda} \sin(\theta))^2} \frac{\sin^2 \frac{N\pi d}{\lambda} \sin\theta}{\sin^2 \frac{\pi d}{\lambda} \sin\theta} \quad (8)$$

Die Maxima und Minima in der Intensitätsverteilung hängen wie beim Einzelspalt vom Parameter b ab jedoch zusätzlich noch vom Abstand der Spalten zueinander d .

3 Interferenz

Unter Interferenz versteht man die Überlagerung von zwei oder mehr Wellen nach dem Superpositionsprinzip. Das bedeutet das die Amplituden der Teilwellen additiv sind (nicht die Intensitäten!!!). Man unterscheidet hierbei zwischen **konstruktiver- und destruktiver Interferenz**. Ersteres liegt vor, wenn der Gangunterschied zwischen beiden Strahlen ein ganzzahliges Vielfaches der Wellen ist. Hierbei kommt es zu einer gegenseitigen Verstärkung der Teilwellen. Wenn die Wegdifferenz genau $m + \frac{1}{2}$ beträgt, dann haben wir den zweiten Fall. Hierbei löschen sich die Teilwellen genau aus.

3.1 Interferenz am Gitter

Aus Abbildung 3 können wir den Gangunterschied zwischen zwei Teilstrahlen am Gitter ablesen:

$$\Delta s = d \sin\alpha$$

Jetzt müssen wir nur noch den gewünschten Gangunterschied einsetzen und wir erhalten die Bedingungen für Maxima und Minima. Für das m -te Hauptmaximum gilt:

$$\sin\alpha = \frac{m\lambda}{d} \quad (9)$$

Betrachtet man nun das Interferenzmuster eines Gitters, so erkennt man zwischen zwei Hauptmaxima mehrere Nebenminima und Maxima. Um eine Bedingung für diese zu finden, schauen wir uns Gleichung (8) an. Aus dem Zähler des Interferenzterm können wir die Bedingung für Nebenminima ablesen.

$$\sin \frac{N\pi d}{\lambda} \sin\theta = 1 \rightarrow \frac{N\pi d}{\lambda} \sin\theta = (m + \frac{1}{2})\pi$$

Analog erhalten wir für die Nebenmaxima:

$$\sin \frac{N\pi d}{\lambda} \sin\theta = 0 \rightarrow \frac{N\pi d}{\lambda} \sin\theta = m\pi$$

Zusammenfassung:

Hauptmaxima:

$$\sin\theta = \frac{m_{\text{Hauptmax}}\lambda}{d}$$

Nebenmaxima:

$$\sin\theta = \frac{m\lambda}{Nd} \quad (0 < m < N)$$

Nebenminima:

$$\sin\theta = \frac{m + \frac{1}{2}\lambda}{Nd} \quad (1 \leq m \leq N - 2)$$

3.2 Interferenz am Doppelspalt

Die Intensitätsverteilung bei einem Doppelspalt war schon in Abbildung 2 gezeigt. Die Herleitung der dieser ist analog zu einem Gitter, jedoch mit nur $N=2$ Spalten. Die Bedingungen für Maxima und Minima bleiben dabei jedoch erhalten. Die Intensitätsverteilung lautet wie folgt:

$$I(\theta) = I_0 \frac{\sin^2 \frac{\pi b}{\lambda} \sin\theta}{\left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin\theta\right)^2} \cos^2 \frac{\pi d}{\lambda} \sin\theta \quad (10)$$

3.3 Interferenz an dünnen Schichten

Fällt eine ebene Welle mit der Wellenlänge λ unter dem Einfallswinkel θ_1 auf eine planparallele dünne Schicht mit dem Brechungsindex n , so wird ein Teil der Welle reflektiert und ein Teil der Welle transmittiert. Der gebrochene Teil der Welle kann an der unteren Begrenzungsfläche erneut reflektiert und wieder an der oberen Schicht gebrochen werden. Da der Brechungsindex der Schicht $n_2 > n_1$ tritt bei der Reflexion an der oberen Grenzfläche ein Phasensprung von π auf, was einem Wegunterschied von $\frac{\lambda}{2}$ entspricht. Der optische Weg der Strahlen

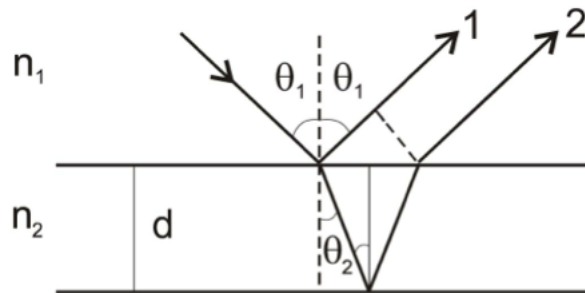


Abbildung 4: Vielfachreflexion an planparalleler Schicht

errechnet sich zu

$$W_1 = n_1 2d \tan\theta_2 \sin\theta_1$$

sowie

$$W_2 = n_2 \frac{2d}{\cos\theta_2}$$

Der Gangunterschied Δs zwischen den beiden reflektierten Teilstrahlen beträgt

$$\begin{aligned}\Delta s = W_2 - W_1 &= \frac{2n_2d}{\cos\theta_2} - 2n_1d \frac{\sin\theta_2}{\cos\theta_2} \sin\theta_1 \\ &= \frac{2n_2d}{\cos\theta_2} (1 - \sin^2\theta_2) \\ &\rightarrow \Delta s = 2n_2d\cos\theta_2\end{aligned}\quad (11)$$

Die Bedingung für ein Interferenzmaximum:

$$\Delta s = m\lambda \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (12)$$

Die Bedingung für ein Interferenzminimum ist:

$$\Delta s = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (13)$$

3.4 Interferenz mit mehrfach reflexion an einer dünner Schicht

Wie schon im vorherigen Teilkapitel erwähnt, kommt es bei einer dünnen Schicht zu Mehrfachreflexionen. Bei Auftreffen einer Welle auf eine Grenzfläche wird ein Teil der Welle transmittiert und ein Teil der Welle reflektiert. Die jeweiligen Anteile können mit den Transmissions- und Reflexionskoeffizienten berechnet werden. In Abbildung 4 sind 2 reflektierte Strahlen abgebildet. Der direkte reflektierte Strahl, 1. Ordnung, sowie der an der unteren Schicht reflektierte Strahl, 2. Ordnung. Die Amplitude der Strahlen nimmt offensichtlich proportional zur Ordnung ab. Bei der dünnen Schicht erhalten wir nun ein Interferenzbild aus quasi unendlich vielen Teilstrahlen. Um nun die Interferenz genauer zu betrachten, ist es sinnvoll den Gangunterschied in einen Phasenunterschied umzurechnen:

$$\Delta\phi = \Delta s \frac{2\pi}{\lambda}$$

Die Gesamtamplitude der reflektierten Welle ergibt sich dann zu:

$$A = A_0\sqrt{R} \frac{1 - e^{i\Delta\phi}}{1 - Re^{i\Delta\phi}} \quad (14)$$

Auf die genaue Herleitung von (12) wird verzichtet. Man muss phasenrichtig über die Amplituden der Teilwellen summieren.

Aus der Gesamtamplitude können wir nun die Intensität berechnen und erhalten:

$$I_R = I_0 R \frac{2(1 - \cos\Delta\phi)}{1 + R^2 - 2R\cos\Delta\phi} = I_0 \frac{4R\sin^2\frac{\Delta\phi}{2}}{(1 - R)^2 + 4R\sin^2\frac{\Delta\phi}{2}} \quad (15)$$

. Da wie hier jegliche Absorption vernachlässigt haben, gilt $I_R + I_T = I_0$. Unter Anwendung der Substitution $F = \frac{4R}{(1-R)^2}$ erhalten wir die **Airy-Formeln** für die reflektierte und transmittierte Intensität.

$$I_R = I_0 \frac{F \sin^2 \frac{\Delta\phi}{2}}{1 + F \sin^2 \frac{\Delta\phi}{2}} \quad (16)$$

$$I_T = I_0 \frac{1}{1 + F \sin^2 \frac{\Delta\phi}{2}} \quad (17)$$

4 Interferometer

Ein Interferometer ist ein technisches Gerät, das der Interferometrie dient. Allgemein verwendet man es für die Feststellung von Interferenzen für Präzisionsmessungen. Zum Beispiel zur Messung der genauen Brechzahl, Wellenlänge oder einfach zur Spektroskopie.

4.1 Fabry-Perot-Interferometer

Die gerade hergeleiteten Airy-Formeln finden zum Beispiel beim Fabry-Perot-Interferometer Anwendung. Ein Fabry-Perot-Interferometer ist eine Anordnung von zwei planparallelen Platten die einseitig hochreflektiert verspiegelt sind. Die Rückseite ist hierbei entspiegelt. Das physikalische Prinzip hinter der gesamten Apparatur ist die Vielstrahlinterferenz. Das ganze muss im Vakuum stattfinden. Der Abstand der Platten liegt meistens im cm-Bereich. Trotzdem ist eine sehr genaue parallele Ausrichtung nötig um störende Reflexionen zu vermeiden.

Um Interferenz zu erhalten müssen die oben erwähnten Bedingungen erfüllt werden (siehe (11) - (13)). Das Fabry-Perot-Interferometer erlaubt es Maxima bis hin zu mehreren zehntausend Ordnungen anzuzeigen, was dazu führt, dass man zum Beispiel die Wellenlänge des Lichts bis auf einige pm ($10^{-12}m!!!$) genau bestimmen kann.

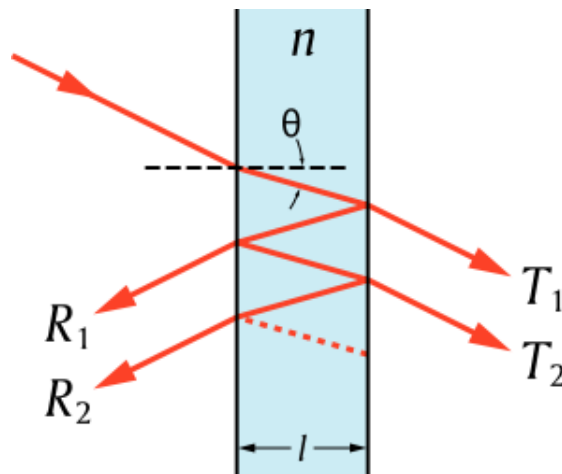


Abbildung 5: Fabry-Perot-Interferometer

4.2 Michelson Interferometer

Beim Michelson-Interferometer fällt ein paralleles kohärentes Lichtbündel auf einen Strahlteiler der es in zwei Teilbündel aufspaltet. Der direkt reflektierte Teil wird um 45° auf einen hochreflektierenden Spiegel abgelenkt, der den Strahl genau zurück reflektiert. Der transmittierte Strahl trifft unter 0° ebenfalls auf einen hochreflektierenden Spiegel, welcher jedoch um ein paar tausendstel Grad verkippt ist. Nach der Reflexion an den hochreflektierenden Spiegeln wird das Licht in einen Detektor gelenkt. Die berühmteste Anwendung des Michelson Interferometers ist die genaue Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit. Indem man eine Probe in den Strahlgang stellt, kann man diese auch für andere Medien bestimmen. Zu beachten ist allerdings wieder, dass man für konstruktive Interferenz einen Gangunterschied benötigt, der ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge ist. Außerdem muss die optische Weglänge kleiner sein als die Kohärenzlänge.

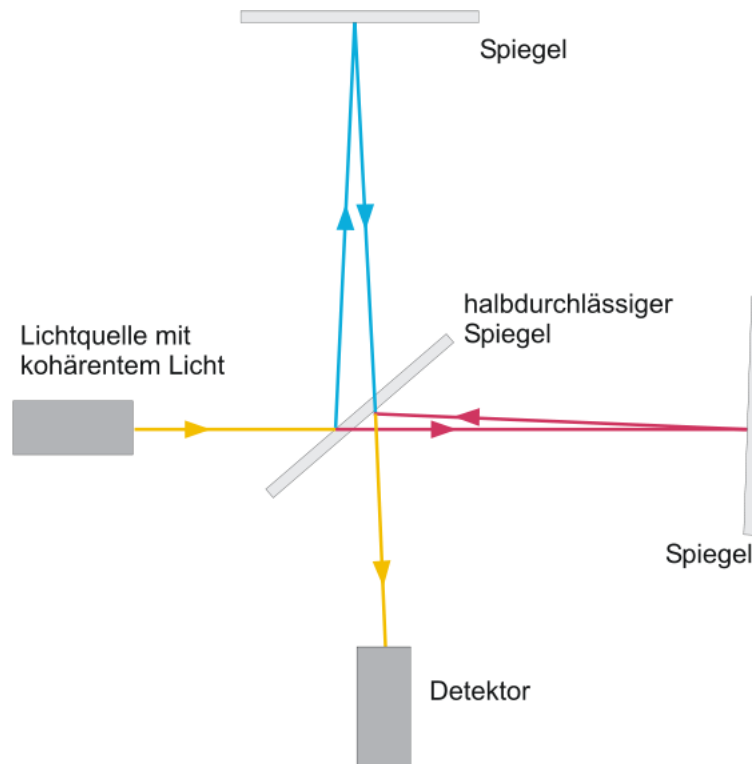


Abbildung 6: Michelson Interferometer

5 Doppelbrechung

Für die bisher behandelten Phänomene haben angenommen, dass für die Dielektrische Verschiebung $D = \epsilon\epsilon_0 E$ gilt. Die Permittivität ϵ wurde hierbei als Skalar angenommen. Dies gilt jedoch nur, wenn alle Kristalle im Medium räumlich isotrop wären und somit keine ausgezeichnete Richtung hätten. Diese Rich-

tung führt zu unterschiedlichen Rückstellkräften der Elektronen in verschiedene Richtungen. Damit wird aus dem Skalar ein Tensor dritter Stufe, also eine Matrix.

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{pmatrix} \quad (18)$$

Auf die Matrix bezogen bedeutet das vorhanden sein eines isotropen Mediums das $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3$. Wenn man jetzt die Symmetrie um eine Ordnung reduzieren, hat man ein optisch einachsiges Medium: $\epsilon_1 = \epsilon_2 \neq \epsilon_3$. Eine weitere Reduzierung führt zu einem zweiachsigen Medium mit $\epsilon_1 \neq \epsilon_2 \neq \epsilon_3$.

Da bei der Dielektrischen Verschiebung ϵ nun keine Proportionalitätskonstante mehr ist, muss der Vektor \vec{D} nicht mehr parallel zu \vec{E} stehen. Als Folge davon zeigt auch der Poynting Vektor \vec{S} nicht mehr Automatisch in Richtung der ausbreitenden Welle. Es gilt zwar weiterhin $\vec{D} \perp \vec{k}$ und $\vec{B} \perp \vec{k}$ jedoch gilt für $\vec{S} = (\vec{E} \times \vec{B})$.

Der Einfachheit halbes, betrachten wir hier nur optisch einachsige Kristalle. Hierfür verwenden wir folgende Definition:

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_{\perp}$$

$$\epsilon_3 = \epsilon_{\parallel}$$

Jetzt müssen wir die Einfallsrichtung beachten. Fällt das Licht in Richtung $\vec{k} = k_3$ ein, so ist der einzige Brechungsindex, der von Bedeutung ist: $n = \sqrt{\epsilon_{\perp}}$. Das bedeutet, dass der Strahl direkt in Richtung der optischen Achse einfällt. Wenn das Licht nicht in Richtung der optischen Achse einfällt, dann spaltet sich das Licht in zwei Komponenten auf.

- **ordentlicher Strahl**, Vektor steht senkrecht auf der optischen Achse
- **außerordentlicher Strahl**, Vektor befindet sich in ebene aus opt. Achse und Ausbreitungsrichtung des einfallenden Strahls

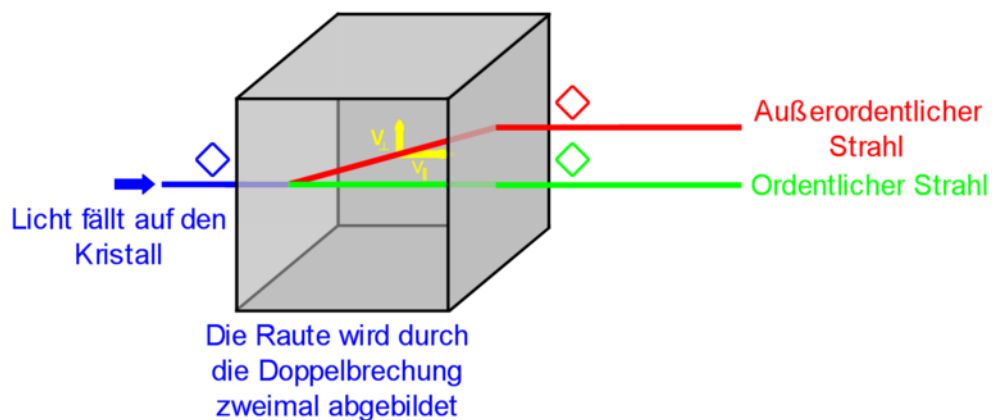


Abbildung 7: Doppelbrechung

Die Brechungsindices für die beiden Strahlen sind dann:

$$n_o = \sqrt{\epsilon_{\perp}} \quad (19)$$

$$n_{ao} = \sqrt{\left[\frac{\cos^2 \theta}{\epsilon_{\perp}} + \frac{\sin^2 \theta}{\epsilon_{\parallel}} \right]^{-1}} \quad (20)$$

Trifft ein Lichtstrahl genau senkrecht zur optischen Achse auf ein Plättchen der Dicke d , dann kommt es zwischen dem ordentlichen und dem außerordentlichen Strahl zu einer Phasenverschiebung. Diese berechnet sich aus:

$$\Delta\phi = \frac{2\pi d}{\lambda}(n_o - n_{ao})$$

Wenn beide Strahlen die gleiche Amplitude besitzen und der Gangunterschied $\Delta s = d(n_o - n_{ao}) = \frac{\lambda}{2}$ beträgt, dann dreht sich die Polarisationsrichtung des Strahls um 90° . Beträgt der Gangunterschied $\Delta s = \frac{\lambda}{4}$, entsteht aus linear polarisiertem zirkular polarisiertes Licht. Solche Plättchen nennt man $\frac{\lambda}{2}$ - und $\frac{\lambda}{4}$ -Plättchen.