

Ferienkurs Experimentalphysik 3

Wellengleichung und Polarisation

Qi Li, Bernhard Loitsch, Hannes Schmeiduch

Montag, 05.03.2012

Inhaltsverzeichnis

1	Licht als elektromagnetische Welle	2
1.1	Maxwell-Gleichungen	2
1.2	Wellenfunktion und Dispersionsrelation	3
1.3	Energietransport	4
1.4	Wellenpakete	5
2	Polarisation	6
3	Verhalten an Grenzflächen - Brechung und Reflexion	7
3.1	Fermat'sches Prinzip	8
3.2	Snellius'sches Brechungsgesetz	8
3.3	Fresnel-Formeln	9
3.4	Reflektion- und Transmissionskoeffizient	10
3.5	Brewsterwinkel und Totalreflektion	11
4	Verhalten im Materie	12
4.1	Absorption	13
5	Wellenausbreitung in anisotropen Medien	14

1 Licht als elektromagnetische Welle

1.1 Maxwell-Gleichungen

Eine elektromagnetische Welle in einem Medium lässt sich mithilfe der Maxwell-Gleichungen beschreiben. Diese können noch leicht vereinfacht werden durch folgende Annahmen:

- In fast allen Anwendungsgebieten der Optik nehmen wir nichtmagnetische Medien an, also gilt für die relative Permeabilität:

$$\mu = 1$$

- Für den Fall nichtleitender Materialien verschwinden Ladungsdichte ρ und Stromdichte \vec{j} :

$$\rho = 0, \vec{j} = 0$$

Damit lassen sich die **Maxwell-Gleichungen** zur Beschreibung einer EM-Welle im Vakuum so darstellen:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (1) \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2) \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (4)$$

Dabei ist $\mu_0 = 1,2566 \cdot 10^{-6} \frac{N}{A^2}$ die **magnetische Feldkonstante**, ϵ die **dielektrische Leitfähigkeit** und $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{C^3}{Nm^2}$ die **dielektrische Feldkonstante im Vakuum**.

Um zur Wellengleichung von \mathbf{E} bzw. \mathbf{B} zu gelangen, bildet man die Rotation ($\nabla \times$) von Gleichung (3) bzw. (4), hier z.B für \mathbf{E} :

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = \nabla \times \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (5)$$

Beachtet man $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, so erhalten wir also als **Wellengleichung**:

$$\Delta \mathbf{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \quad \Delta \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \quad (6)$$

- Die **Lichtgeschwindigkeit im Vakuum** hängt mit der Permeabilität und der dielektrischen Leitfähigkeit zusammen:

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 2,998 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$$

- Der Einfluss des Mediums wird durch den Faktor $\frac{1}{\sqrt{\epsilon}} = \frac{1}{n}$ beschrieben; $n = \sqrt{\epsilon}$ wird als **Brechungsindex des Mediums** bezeichnet.

1.2 Wellenfunktion und Dispersionsrelation

Als einfachste Lösung für die Wellengleichung erhalten wir eine **ebene Welle**, die sich in Richtung des Wellenvektors \vec{k} ausbreitet:

$$\mathbf{E}(\vec{r}, t) = \mathbf{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi) \quad (7)$$

oder in komplexer Exponentialschreibweise

$$\mathbf{E}_c(\vec{r}, t) = \mathbf{E}_{0,c} \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi)) \quad (8)$$

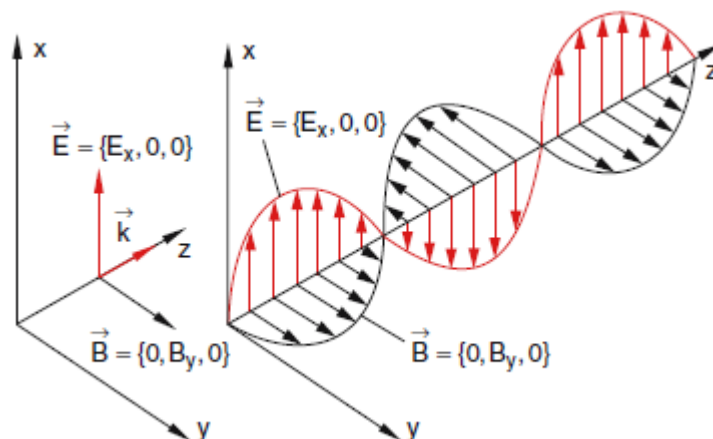
Die komplexe Schreibweise erleichtert das Rechnen, allerdings sollte als Ergebnis einer Rechnung immer nur der Realteil der Wellenfunktion gelten.

Setzen wir die Wellenfunktion in Gl. (6) ein, so bekommen wir einen linearen Zusammenhang zwischen Wellenvektor \vec{k} und Wellenfrequenz ω , die **optische Dispersionsrelation**:

$$k = n \cdot \frac{\omega}{c_0} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (9)$$

mit der **Wellenlänge** λ

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c_0}{n\omega} \quad (10)$$



Aus den Maxwell-Gleichungen folgt außerdem

- **E**- und **B**-Feld stehen senkrecht zueinander und zum Wellenvektor \vec{k} .
- die Amplituden der **E**- und **B**-Felder sind miteinander verknüpft:

$$\mathbf{B} = \frac{k}{\omega} (\vec{e}_k \times \mathbf{E}) = \frac{1}{c_0} (\vec{e}_k \times \mathbf{E}) \quad (11)$$

$$|\mathbf{E}_0| = \frac{c_0}{n} |\mathbf{B}_0| = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\epsilon_0\mu_0}} |\mathbf{B}_0| \quad (12)$$

1.3 Energietransport

Bei der Ausbreitung transportiert die elektromagnetische Welle Energie entlang des Wellenvektors. Die Energiestromdichte (Energie pro Zeit pro Fläche $\perp k$) wird durch den **Poynting-Vektor** \mathbf{S} beschrieben.

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \epsilon_0 c_0^2 (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \\ &= \underbrace{c_0 \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(kz - \omega t)}_{\text{Realteil einer ebenen Welle in z-Richtung eingesetzt}} \vec{e}_z \end{aligned} \quad (13)$$

Durch die zeitliche Mittelung von \mathbf{S} über eine Schwingungsperiode der Feldes erhalten wir die Strahlungsflußdichte oder Lichtintensität I

$$I = \langle |\mathbf{S}| \rangle = \epsilon_0 c_0 \langle |\mathbf{E}|^2 \rangle \quad (14)$$

$$I = \frac{1}{2} \epsilon_0 c_0 E_0^2 \quad (15)$$

Licht überträgt bei Bestrahlung neben Energie auch einen Impuls auf eine Fläche. Der daraus resultierende **Strahlungsdruck** lässt sich aus der Lichtintensität berechnen.

$$P_S = \frac{I}{c_0} \quad (16)$$

Bei Reflexion wirkt aufgrund der Impulserhaltung der doppelte Strahlungsdruck auf die betreffende Fläche.

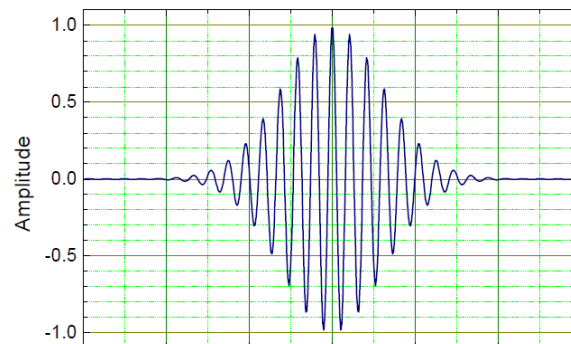
1.4 Wellenpakete

Eine wichtige Eigenschaft der Wellengleichung Gl. (6) ist, dass wegen des Superpositionsprinzip eine Kombination von Lösungen die Wellengleichung ebenfalls löst. D.h. wenn \mathbf{E}_1 , \mathbf{E}_2 beide Gl. (6) erfüllen, erfüllt $\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ ebenfalls die Gleichung. Damit können Wellenpakete mit definiertem zeitlichen und räumlichen Verlauf bzw. unterschiedliche Wellenformen aus vielen „einfachen“ Wellenfunktionen gebastelt werden. Mathematisch wird das Wechseln der Feldverläufe (sei es in Abhängigkeit von der Zeit oder Frequenz o.a.) per Fourier-Transformation gemacht (zur Einfachheit bleiben wir am Ursprung $\vec{r} = 0$):

$$\mathbf{E}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega \quad (17)$$

und zurück

$$\mathbf{E}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(t) \exp(i\omega t) dt \quad (18)$$



Bei Wellenpaketen, z.B. einer ebenen Welle mit modulierter Amplitude, können die Geschwindigkeit, mit der die eigentliche Welle sich ausbreitet, und die Ausbreitungsgeschwindigkeit ihrer Hüllkurve berechnet werden.

- **Phasengeschwindigkeit** $v_{ph} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{\omega_0}{k_0} = \frac{c_0}{n}$
- **Gruppengeschwindigkeit** $v_{gr} = \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{\omega_0} = \frac{c_0}{n} - \frac{k \cdot c_0}{n^2} \frac{dn}{dk}$

2 Polarisation

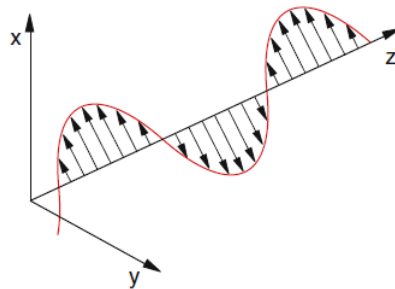
Die Tatsache, dass die EM-Felder senkrecht zur Ausbreitungsrichtung stehen, legt eine Ebene fest, in der z.B. das E-Feld schwingen kann. Nehmen wir an, dass der Wellenvektor in die z-Richtung zeigt, so können wir eine beliebige ebene Welle schreiben als:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_{x0} \cos(kz - \omega t) \\ E_{y0} \cos(kz - \omega t + \varepsilon) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (19)$$

mit ε als Phasenunterschied zwischen den x und y-Komponenten. Man kann 3 Polarisationsarten unterscheiden:

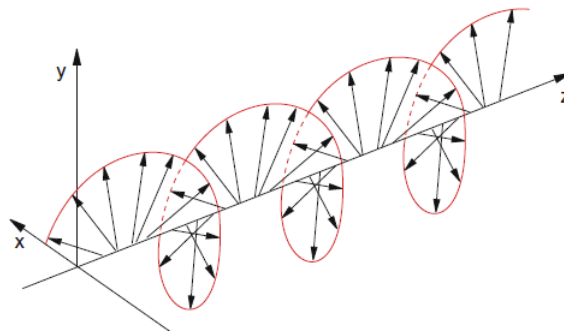
- **linear polarisiert:** $\varepsilon = 0$ oder $\varepsilon = \pm n \cdot 2\pi$, E_{0x} und E_{0y} schwingen in Phase und die Richtung des E-Feldes ist durch einen konstanten Vektor gegeben.

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ 0 \end{pmatrix} \cos(kz - \omega t) = \mathbf{E}_0 \cos(kz - \omega t) \quad (20)$$



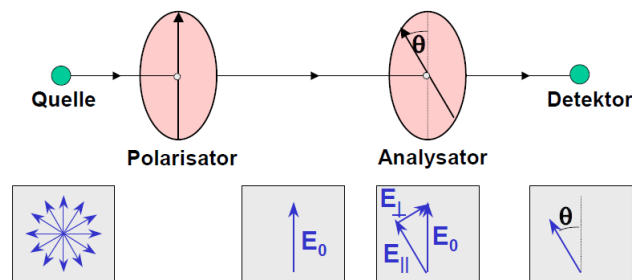
- **zirkular polarisiert:** $\varepsilon = \frac{\pi}{2} + m\pi$, $m = 0, 1, 2, \dots$, $|E_{0x}| = |E_{0y}| = E_0$, die Spitze des Feldvektors \mathbf{E} beschreibt eine Kreisbahn in der xy-Ebene:

$$\mathbf{E} = E_0 \begin{pmatrix} \cos(kz - \omega t) \\ \pm \sin(kz - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (21)$$



In Zusammenhang mit dem Strahlungsdruck vermittelt eine zirkular polarisierte Welle einer Fläche einen Drehimpulsübertrag.

- **elliptisch polarisiert:** $\varepsilon \neq \frac{\pi}{2} + m\pi$, $|E_{0x}| \neq |E_{0y}|$, Spitze des Feldvektors beschreibt eine Ellipse in der xy-Ebene.
- Das natürliche Licht ist größtenteils unpolarisiert, d.h. sie besteht aus beliebigen Linearkombinationen der drei Polarisationsarten.
- Die Polarisation von Lichtstrahlen kann man beispielsweise mit Polarisatoren verändern, die nur den Anteil der Strahlung durchlassen, d || zur Polarisatorrichtung steht.



3 Verhalten an Grenzflächen - Brechung und Reflexion

Grundlage zur Beschreibung von Reflexion und Brechung von EM-Wellen an Grenzflächen (Übergang zwischen Medien unterschiedlicher optischer Eigenschaften) sind wiederum die Maxwell-Gleichungen. Aus diesen gehen Randbedingungen hervor, die Wellen an Grenzflächen erfüllen müssen. Zuerstmal Begriffe:

- Die **Grenzfläche** trennt die unterschiedlichen Medien. Sie ragt in den folgenden Zeichnungen meist aus der Bildebene heraus.
- Die **Einfallebene** bezeichnet die Ebene \perp zur Grenzfläche, worauf sich die Wellenvektoren $\vec{k}_e, \vec{k}_r, \vec{k}_t$ (einfallend, reflektiert, transmittiert) befinden. Im Folgenden steht sie meist parallel zur Bildebene.

Für Grenzflächen von zwei isotropen, isolierenden und nicht magnetischen Medien gilt:

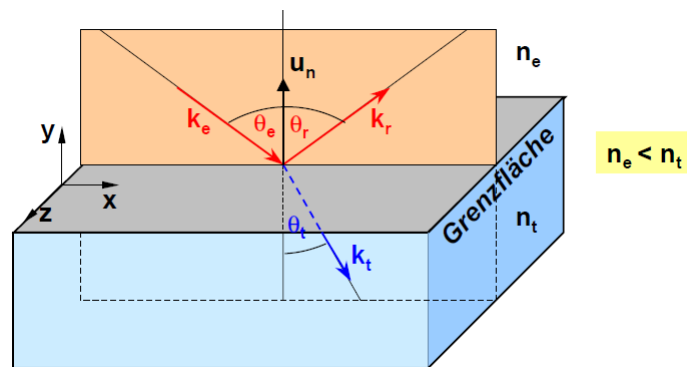
$$\mathbf{D}_{\perp}^{(1)} = \mathbf{D}_{\perp}^{(2)} \quad (22) \quad \bullet \text{ Die Komponenten der dielektrischen Verschiebung } \mathbf{D} = \epsilon\epsilon_0\mathbf{E} \text{ normal zur Grenzfläche sind stetig.}$$

$$\mathbf{E}_{||}^{(1)} = \mathbf{E}_{||}^{(2)} \quad (23) \quad \bullet \text{ Die Tangentialkomponenten vom E-Feld sind stetig.}$$

$$\mathbf{B}_{\perp}^{(1)} = \mathbf{B}_{\perp}^{(2)} \quad (24) \quad \bullet \text{ Die Normalkomponenten vom B-Feld sind stetig.}$$

$$\mathbf{H}_{||}^{(1)} = \mathbf{H}_{||}^{(2)} \quad (25) \quad \bullet \text{ Die Tangentialkomponenten von der magnetischen Feldstärke } \mathbf{H} = \frac{1}{\mu\mu_0}\mathbf{B} \text{ sind stetig.}$$

Erste Folgen der Randbedingungen für die Wellen sind:



- Frequenz des Lichts ändert sich nicht an der Grenzfläche:

$$\omega_e = \omega_r = \omega_t \quad (26)$$

- Einfallswinkel ist gleich Reflexionswinkel: $\theta_e = \theta_r$

3.1 Fermat'sches Prinzip

Unter dem Fermat'schen Prinzip versteht man:

Licht nimmt in einem inhomogenen Medium einen extremalen Weg von einem Punkt zu einem Anderen.

Der extremale Weg ist z.B. der Weg, den das Licht zeitlich an schnellsten durchlaufen kann.

$$t(r) = \sum t_i = \sum \frac{r_i}{c_i} = \frac{1}{c_0} \sum W_i \quad (27)$$

$$\frac{dt}{dr} \stackrel{!}{=} 0 \quad (28)$$

Da die Lichtgeschwindigkeit im Medien von deren Brechungsindizes abhängt, führt man den **optischen Weg** ein:

$$W_i = n_i \cdot r_i \quad (29)$$

n_i soll Brechungsindex im Medium i sein, r_i die im Medium i zurückgelegte Strecke.

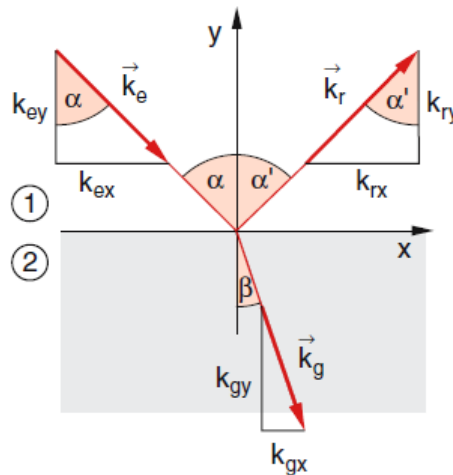
3.2 Snellius'sches Brechungsgesetz

Aus der Gl. (22) kann man nun eine Beziehung zwischen den Einfalls- und Transmissionswinkeln aufstellen.

$$k_e \sin \theta_e = k_t \sin \theta_t$$

Mithilfe von $k_e/k_t = n_e/n_t$ erhält man das **Snellius'sches Brechungsgesetz**:

$$\frac{\sin\theta_e}{\sin\theta_t} = \frac{n_e}{n_t} \quad (30)$$



3.3 Fresnel-Formeln

Neben Aussagen zur Richtung der einzelnen Wellen an der Grenzfläche kann mit der Randbedingungen auch die Intensitätenverhältnisse bestimmt werden. Anfangen kann man mit der Betrachtung eines senkrechten Lichteinfalls auf die Grenzfläche. Dabei kann man für die elektrische Feldstärke einen Reflexionskoeffizienten r und Transmissionskoeffizienten t festlegen:

$$E_{0r} = \frac{n_e - n_t}{n_e + n_t} E_{0e} = r E_{0e}$$

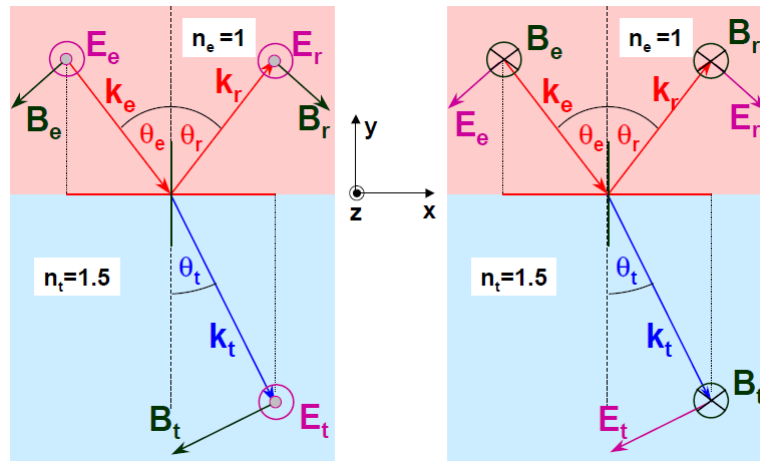
und

$$E = t E_{0e}$$

Wenn wir nun nicht senkrechten Lichteinfall betrachten, können wir zwei Fälle unterscheiden,

1. dass das E-Feld \parallel zur Grenzfläche und \perp zur Einfallsebene steht (B-Feld hat also Komponenten sowohl \parallel als auch \perp zur Grenzfläche,
2. dass das B-Feld \parallel zur Grenzfläche und \perp zur Einfallsebene steht (E-Feld hat also Komponenten sowohl \parallel als auch \perp zur Grenzfläche.

Wenn man nun noch beachtet, dass $\vec{k} \perp \mathbf{E} \perp \mathbf{H}$ gilt, kann man durch weiteres Rechnen die verschiedenen Koeffizienten, i.e. die **Fresnel-Formeln** bestimmen (\perp und \parallel beziehen sich auf die Einfallsebene!):



$$r_{\perp} = \frac{E_{0r}}{E_{0e}} \Big|_{\mathbf{E}_{\perp} \text{ Einfallsebene}} = -\frac{\sin(\theta_e - \theta_t)}{\sin(\theta_e + \theta_t)} \quad (31)$$

$$t_{\perp} = \frac{E_{0t}}{E_{0e}} \Big|_{\mathbf{E}_{\perp}} = \frac{2\sin\theta_t \cos\theta_e}{\sin(\theta_e + \theta_t)} \quad (32)$$

$$r_{\parallel} = \frac{E_{0r}}{E_{0e}} \Big|_{\mathbf{E}_{\parallel}} = \frac{\tan(\theta_e - \theta_t)}{\tan(\theta_e + \theta_t)} \quad (33)$$

$$t_{\parallel} = \frac{E_{0t}}{E_{0e}} \Big|_{\mathbf{E}_{\parallel}} = \frac{2\sin\theta_t \cos\theta_e}{\sin(\theta_e + \theta_t) \cos(\theta_e - \theta_t)} \quad (34)$$

3.4 Reflexions- und Transmissionskoeffizient

Ist man nun an der reflektierten oder transmittierten Leistung interessiert, d.h. am **Reflexionsgrad** R oder **Transmissionsgrad** T , so kann man die auf die Grenzfläche einfallende (W_e), reflektierte (W_r) und transmittierte Leistung (W_t) betrachten, wobei gilt: $W_e = W_r + W_t$

$$R_{\parallel} = |r_{\parallel}|^2 \quad \text{und} \quad R_{\perp} = |r_{\perp}|^2 \quad (35)$$

$$T_{\parallel} = 1 - |r_{\parallel}|^2 \quad \text{und} \quad T_{\perp} = 1 - |r_{\perp}|^2 \quad (36)$$

Bei senkrechtem Lichteinfall kann man den Reflexionsgrad auch durch die Brechungsindizes ausrechnen:

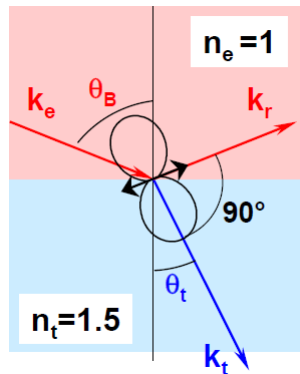
$$R = \frac{I_r}{I_e} = \left(\frac{n_e - n_t}{n_e + n_t} \right)^2 \quad (37)$$

3.5 Brewsterwinkel und Totalreflektion

Wenn man sich nun die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten anschaut, dann merkt man, dass es Winkel- bzw. Brechzahlkombinationen gibt, wo kein Licht reflektiert/transmittiert wird. So wird der Reflexionskoeffizient bei einem E-Feld \parallel Null, wenn $\theta_t + \theta_e = \frac{\pi}{2}$. So wird der **Brewsterwinkel** θ_B definiert:

$$\tan\theta_B = \frac{n_t}{n_e} \text{ oder } \theta_b = \arctan\left(\frac{n_t}{n_e}\right) \quad (38)$$

Anschaulich erklärt, wenn wir annehmen, dass das reflektierte Licht durch oszillierende Dipole im Medium 2 erzeugt wird, die ein Dipolmoment parallel zum transmittierten Feld \mathbf{E}_t besitzen, das in der Einfallsebene \perp zum transmittierten Wellenvektor \vec{k}_t liegt. Längs der Oszillationsrichtung der Dipole, also in Richtung von \vec{k}_r , erfolgt keine Abstrahlung.

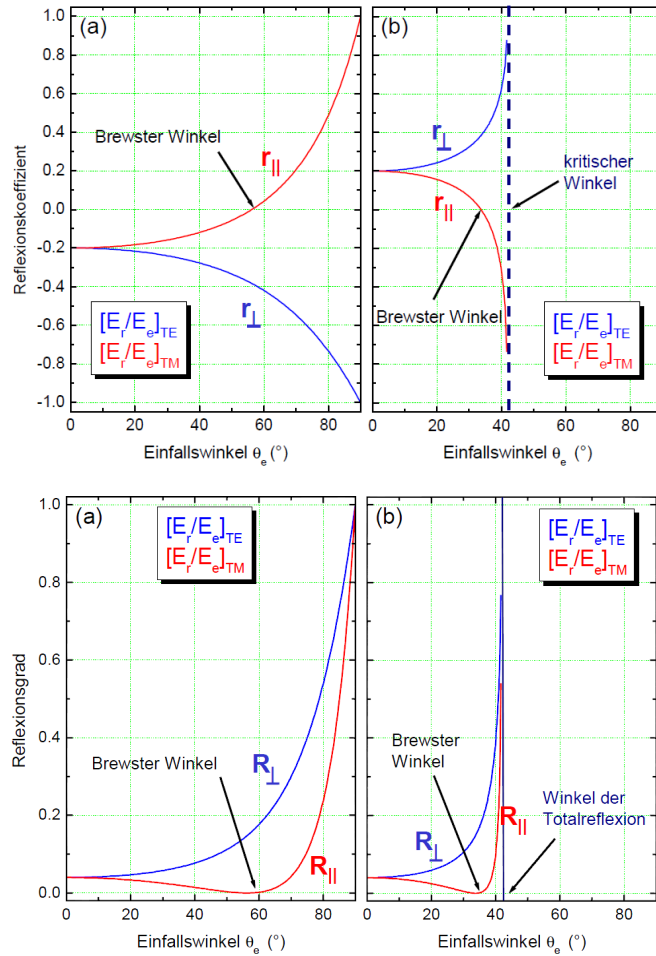


Fällt Licht aus dem optisch dichteren Medium auf die Grenzfläche ($n_e > n_t$), so findet man einen Winkel $\theta_{TR} < \frac{\pi}{2}$, ab wo der Transmissionswinkel $\theta_t > \frac{\pi}{2}$ ist und eine **Totalreflektion** der einfallenden Welle stattfindet.

$$\sin\theta_{TR} = \frac{n_t}{n_e} \text{ oder } \theta_{TR} = \arcsin\left(\frac{n_t}{n_e}\right) \quad (39)$$

4 Verhalten im Materie

Die Ausbreitung von Licht wird vom Brechungsindex $n(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon(\omega)}}$ des durchleuchteten Mediums bestimmt. Ein einfaches Modell, um die Frequenzabhängigkeit der el. Leitfähigkeit herzuleiten ist, sich die Elektronen mit einer Feder an die Atome/Moleküle gebunden vorzustellen. Zusammen mit dem E-Feld als antreibende Kraft und der Wechselwirkung der Elektronen mit den Ato-



me/Moleküle als Dämpfung erhalten wir einen gedämpften, getriebenen Oszillator:

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{-e}{m_e} E_0 \exp(i\omega t) \quad (40)$$

$$x(t) = \frac{-e}{m_e} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\gamma\omega} E(t) \quad (41)$$

Bei einer Teilchendichte N bekommen wir mit der Polarisation

$$P(t) = -ex(t)N = (\epsilon(\omega) - 1)\epsilon_0 E(t) \quad (42)$$

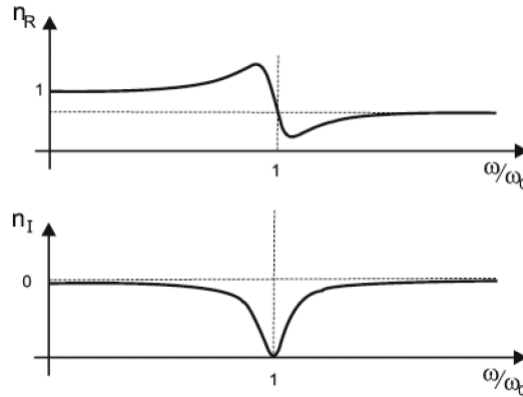
die **frequenzabhängige dielektrische Funktion**:

$$\epsilon(\omega) = 1 + \frac{e^2}{N} \epsilon_0 m_e \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\gamma\omega} \quad (43)$$

Bei verdünnten Medien (z.B. Gase) kann man (näherungsweise) die dielektrischen Funktion in einen **komplexen Brechungsindex** $n_c = n_R + in_I$ umwandeln:

$$n_R = 1 + \frac{e^2 N}{2\epsilon_0 m_e} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \quad (44)$$

$$n_I = \frac{e^2 N}{2\epsilon_0 m_e} \frac{-\gamma \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \quad (45)$$



Weit weg von der Resonanzfrequenz kann n angenähert werden, weit oberhalb (z.B. für Röntgenstrahlung) erhalten wir durch Näherung:

$$n_R \simeq 1 - \frac{e^2 N}{2\epsilon_0 m_e} \frac{1}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_{pl}^2}{2\omega^2}$$

mit der sog. Plasmafrequenz $\omega_{pl} = \sqrt{\frac{e^2 N}{\epsilon_0 m_e}}$

Bei Metallen, wo die Elektronen als frei betrachtet werden können (\rightarrow keine Dämpfung $\rightarrow \omega_0 = 0$), erhält man näherungsweise

$$n \simeq \sqrt{1 - \frac{\omega_{pl}^2}{\omega^2}}$$

4.1 Absorption

Die Auswirkung des komplexen Brechungsindex erkennt man am besten an der Amplitude einer ebenen Welle, die durch ein Medium mit komplexem Brechungsindex geht (oBdA in der z -Richtung).

$$\begin{aligned} E(z, t) &= E_0 \exp(i\omega t - ikz) \\ &= E_0 \exp\left(i\omega t - i \frac{\omega n_R}{c} z + \frac{\omega n_I}{c} z\right) \\ &= \underbrace{E_0 \exp\left(\frac{\omega n_I}{c} z\right)}_{\text{Exponentiell abfallende Amplitude}} \exp\left(i\omega t - i \frac{\omega n_R}{c} z\right) \end{aligned} \quad (46)$$

Der Imaginärteil des Brechungsindex bewirkt eine **Absorption des Lichtes**. Für die Ortsabhängigkeit der Lichtintensität berechnet man:

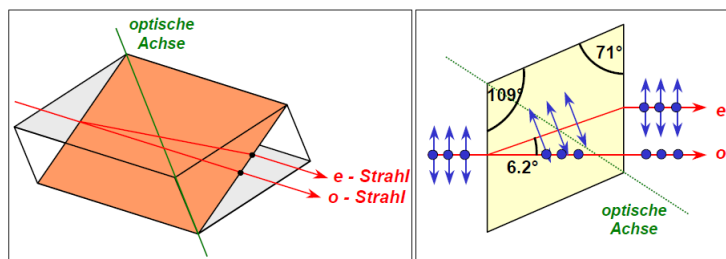
$$I(z) = I(0) \exp\left(\frac{2\omega n_I z}{c}\right) = I(0) \exp(-az) \quad (47)$$

zusammen mit dem **Extinktionskoeffizienten**:

$$a = \frac{e^2 N}{2\epsilon_0 m_e c} \frac{\gamma \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \quad (48)$$

5 Wellenausbreitung in anisotropen Medien

In einem anisotropen Medium hängt die dielektrische Funktion und somit auf der Brechungsindex nicht nur von der Frequenz, sondern auch von der Ausrichtung des Strahls zum Körper ab. Eine Anwendung ist die Polarisation mithilfe von anisotropen Materialien (z.B. Kalkspat), wo man eine Doppelbrechung beobachten kann. Ursache kann eine bestimmte, gerichtete Ordnung im Kristall sein. Man beobachtet dort neben einen ordentlichen Strahl auch einen außerordentlichen Strahl, der sich vom ordentlichen Strahl im Brechungsindex und auch der Ausbreitungsrichtung im Kristall unterscheidet. Die Ausbreitungsrichtung des außerordentlichen Strahles wird bestimmt durch die sog. optische Achse.



Eine Anwendung der Doppelbrechung sind die $\lambda/2$ - und $\lambda/4$ -Plättchen, die linear polarisiertes Licht in zirkular(elliptisch) polarisiertes Licht umwandeln können und umgekehrt. Wenn oBdA. der Strahl in der z-Richtung ins Plättchen einfällt, unterscheiden sich die Brechungsindizes in der x- und y-Richtung. Aufgrund der gleichbleibenden Frequenz für beide Strahlkomponenten stellt sich wegen der Wegunterschiede Δl eine Phasenverschiebung $\Delta\phi$ ein,

$$\Delta l = d(n_0 - n_{0a}) \quad (49)$$

$$\Delta\phi = k_0 d - k_{0a} d = \frac{2\pi d}{\lambda} (n_0 - n_{0a}) \quad (50)$$

Im Falle von $\lambda/4$ -Plättchen mit Dicke d gerade $\frac{\pi}{2}$, so dass einfallendes linear polarisiertes Licht nach dem Plättchen zirkular polarisiert ist. Bei $\lambda/2$ -Plättchen

dreht man gerade den Drehsinn einer zirkular(elliptisch) polarisierten Welle (\leftarrow Polarisationsdreher)