Ferienkurs Experimentalphysik 1

Vorlesung 4

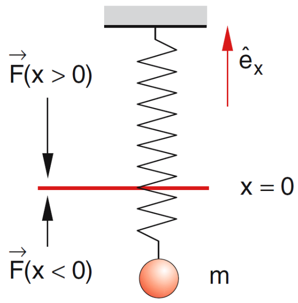
Mechanische Schwingungen und Wellen

Diana Beyerlein, Steffen Maurus, Markus Perner

08.03.2012

1 Harmonischer Oszillator

1.1 Freie ungedämpfte Schwingung



Für den harmonischen Oszillator gilt das lineare Kraftgesetz (Hookesche Gesetz)

$$\boldsymbol{F} = -Dx\,\hat{\boldsymbol{e}}_x.$$

Dabei ist $\boldsymbol{F}$ die rücktreibende Kraft (z.B. im Falle des Fadenpendels die Gravitationskraft), D die Rückstellkonstante und x die Auslenkung/Stauchung aus der Ruhelage $x = 0$. Für die Bewegungsgleichung erhält man also

$$m\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2} = -Dx(t)$$

oder mit $\omega_0^2 = D/m$ die kürzere Form

$$\boxed{\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0,} \tag{1}$$

wobei der konstante Faktor $\omega_0 = \sqrt{D/m}$ die sog. **Kreisfrequenz** ist. Jede DGL von dieser Gestalt stellt eine harmonische Schwingung dar.

Die Schwingungsgleichung (1) des harmonischen Oszillators ist eine homogene lineare DGL 2.Ordnung mit konstanten Koeffizienten und besitzt daher zwei linear unabhängige Lösungen $x_1(t)$ und $x_2(t)$. Mit dem Lösungsansatz $x(t) = ce^{\lambda t}$ erhält man die Bestimmungsgleichung $\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$ für den Parameter λ, aus der die beiden Werte $\lambda_{1,2} = \pm\mathrm{i}\omega_0$ folgen. Die Lösungen sind somit von der Form

$$x_{1,2}(t) = c_{1,2}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\omega_0 t} \text{ mit } c_{1,2} \in \mathbb{C}.$$

Die Lösung $x(t)$ ist nun eine Linearkombination von $x_1(t)$ und $x_2(t)$ und muss eine **reelle** Funktion sein (alle Funktion, die Naturphänomene direkt beschreiben, sind reell). Daher folgt für die komplexen Konstanten $c_1 = c_2^* = c$ und die Lösungsfunktion wird somit zu

$$\boxed{x(t) = c\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t} + c^*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t} = 2\mathrm{Re}\left\{c\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}\right\} \text{ mit } c = a + ib.} \tag{2}$$

Die reellen Konstanten a und b müssen aus den **Randbedingungen** des spezifischen Schwingungsproblems bestimmt werden (wie z.B. $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_0$ oder $x(0) = x_{\max}$, $\dot{x}(0) = 0$).

Setzt man für die komplexen Amplituden c und c^* die Polardarstellung $c = |c|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ an, so ergibt sich die zu Gl. (2) äquivalente Darstellung

$$x(t) = |c| \left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_0 t + \varphi)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_0 t + \varphi)} \right]. \tag{3}$$

Mit Hilfe der Eulerschen Formel für komplexe Zahlen

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$$

lässt sich Gl. (2) auch in der Form

$$x(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) \tag{4}$$

mit

$$C_1 = c + c^* = 2\mathrm{Re}\{c\} = 2a, \quad C_2 = \mathrm{i}(c - c^*) = -2\mathrm{Im}\{c\} = -2b$$

schreiben. Diese Superposition lässt sich auch noch in die Form (vgl. Gl. (3))

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) \tag{5}$$

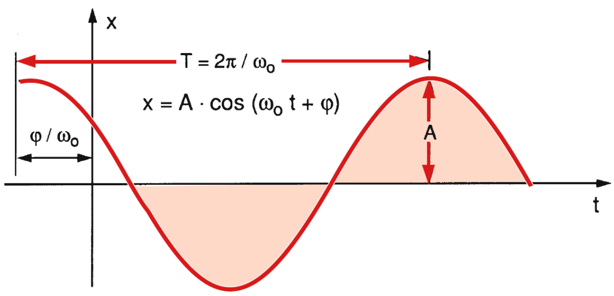
bringen. All diese Darstellungsformen sind **äquivalent**. Ein Vergleich mit Gl. (4) liefert

$$\begin{aligned} C_1 &= A\cos\varphi \\ C_2 &= -A\sin\varphi \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \tan\varphi = -\frac{C_2}{C_1} = \frac{\mathrm{Im}\{c\}}{\mathrm{Re}\{c\}}$$

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = 2|c|.$$

Der Faktor A bezeichnet die **Amplitude**, also die maximale Auslenkung der Schwingung. Das Argument der Kosinusfunktion, welches den momentanen Wert der Auslenkung $x(t)$ bestimmt, heißt **Phase** der Schwingung.

Jedes Mal nach der Zeit $t = 2\pi/\omega_0 =: T$ wird derselbe Wert von $x(t)$ erreicht, also $x(t) = x(t + T)$. Diese Zeitspanne T heißt **Schwingungsdauer** und ist mit der **Schwingungsfrequenz** ν über $\nu = 1/T$ verknüpft. Die **Kreisfrequenz** ω ist durch $\omega = 2\pi\nu$ gegeben.



1.2 Freie gedämpfte Schwingung

Während bei der freien ungedämpften Schwingung die Reibungskraft vernachlässigt wurde, können wir sie hier ganz allgemein in der Form

$$\boldsymbol{F}_\mathrm{r} = -b\dot{x}\hat{\boldsymbol{e}}_x$$

berücksichtigen. Die Reibungskraft ist also entgegengerichtet zum Geschwindigkeitsvektor und proportional zum Geschwindigkeitsbetrag (z.B. Stokessche Reibung). Mit den Abkürzungen $\omega_0^2 = D/m$ und $2\gamma = b/m$ erhält man die allgemeine Bewegungsgleichung

$$\boxed{\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0 \qquad (6)}$$

der gedämpften Schwingung mit der **Dämpfungskonstanten** γ. Wie auch bei der freien ungedämpften Schwingung handelt es sich hier um eine homogene lineare DGL 2.Ordnung mit konstanten Koeffizienten und der Ansatz $x(t) = c\mathrm{e}^{\lambda t}$ führt zum Ziel. Man erhält somit für λ die Bestimmungsgleichung (sog. charakteristische Gleichung)

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$$

mit den Lösungen

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}.$$

Die allgemeine Lösung der Schwingungsgleichgung (6) lautet also

$$\boxed{x(t) = \mathrm{e}^{-\gamma t}\left[c_1\mathrm{e}^{\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}t} + c_2\mathrm{e}^{-\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}t}\right]. \qquad (7)}$$

Das zeitliche Verhalten $x(t)$ hängt nun von der relativen Größe von ω_0 und γ ab. Wir unterscheiden daher folgende drei Fälle:

a) $\gamma < \omega_0$: **schwache Dämpfung (Schwingungsfall)**

Die Exponenten der Exponentialfunktion sind nun komplex. Mit der Abkürzung $\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$ ergibt sich die allgemeine Lösung zu

$$\boxed{x(t) = \mathrm{e}^{-\gamma t}\left(c\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + c^*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right) = A\mathrm{e}^{-\gamma t}\cos(\omega t + \varphi) \qquad (8)}$$

mit A und φ wie bei der freien ungedämpften Schwingung. Der Unterschied zur freien ungedämpften Schwingung ist der, durch den Term $\mathrm{e}^{-\gamma t}$ bedingte, **exponentielle Abfall** der Schwingungsamplitude und die veränderte Kreisfrequenz ω, die bei gleicher Rückstellkraft **kleiner** ist als die der ungedämpften Schwingung. Als Maß für die Stärke des Amplitudenabfalls definiert man das sog. **logarithmische Dekrement** δ durch

$$\delta = \gamma T = \ln\frac{x(t)}{x(t+T)}.$$

b) $\gamma > \omega_0$: **starke Dämpfung (Kriechfall)**

Die Exponenten der Exponentialfunktion sind nun reell. Führen wir die Abkürzung $\alpha^2 = \gamma^2 - \omega_0^2$ ein ergibt sich die allgemeine Lösung zu

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\gamma t}\left(c_1 \mathrm{e}^{\alpha t} + c_2 \mathrm{e}^{-\alpha t}\right). \tag{9}$$

Es gibt nun **keine** Schwingung mehr. Nach einmaliger Auslenkung "kriecht" die Amplitude für $t \to \infty$ gegen Null.

c) $\gamma = \omega_0$: **aperiodischer Grenzfall**

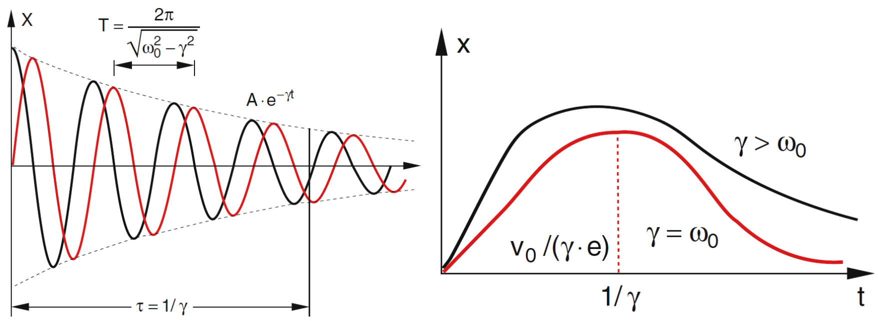
Die Exponenten der Exponentialfunktion sind nun reell und entartet, d.h. also $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = -\gamma$. Die allgemeine Lösung (7) der DGL (6) muss aber zweie freie Integrationskonstanten enthalten. Daher wird der Ansatz (cf. Analysis)

$$x(t) = C(t)\mathrm{e}^{\lambda t}$$

mit dem zeitabhängigen Vorfaktor $C(t)$ gemacht. Nach einer kleinen Rechnung liefert dies die allgemeine Lösung

$$x(t) = (c_1 t + c_2)\mathrm{e}^{-\gamma t}. \tag{10}$$

Die Lösung verhält sich ähnlich wie im Kriechfall, nur wird der Nullpunkt hier **schneller** angestrebt.



1.3 Erzwungene Schwingung

Wirkt auf das Pendel nun zusätzlich noch eine antreibende Kraft $F_{\mathrm{ext}}(t)$ (z.B. eine kontinuierliche sinusförmige antreibende Kraft), so muss die die Bewegungsgleichung um diese Kraft ergänzt werden und man erhält mit den Abkürzungen $\omega_0^2 = D/m$, $2\gamma = b/m$, $K(t) = F_{\mathrm{ext}}(t)/m$ die Bewegungsgleichung

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = K(t). \tag{11}$$

Die Lösung dieser inhomogenen linearen DGL 2.Ordnung mit konstanten Koeffizienten erhält man durch die Lösung $x_\mathrm{h}(t)$ der homogenen DGL und einer speziellen, sog. partikulären Lösung $x_\mathrm{p}(t)$ der inhomogenen DGL (als Ansatz für die partikuläre Lösung wählt man eine allgemeine Funktion vom Typ der Inhomogenität). Die allgemeine Lösung ist dann gegeben durch

$$x(t) = x_\mathrm{h}(t) + x_\mathrm{p}(t)$$

Für den Spezialfall einer periodischen Kraft können wir annehmen, dass wir die Kraft als Summe von Kosinus- und/oder Sinusfunktionen darstellen können. Das ist eine zulässige Annahme, da wir jede periodische Funktion in eine Fourierreihe entwickeln können und die partikuläre Lösung einer Summe von Inhomogenitäten als Summe der partikulären Lösungen der einzelnen Terme der Inhomogenität dargestellt werden kann. Wir untersuchen also die partikuläre Lösung der DGL

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = K_0 \cos(\Omega t).$$

Die Lösung der homogenen DGL ist gerade Gl. (7), für welche die Amplitude $A_1 \mathrm{e}^{-\gamma t}$ nach einem Einschwingvorgang gegen Null geht. Für den **stationären Zustand** (bei dem die gedämpfte Schwingung bereits abgeklungen ist) trägt also nur noch die partikuläre Lösung bei, für welche wir den Ansatz

$$x_\mathrm{p}(t) = A_2 \cos(\Omega t + \varphi)$$

wählen. Eingesetzt in die DGL (11) erhält man

$$\begin{aligned}&\underbrace{\left[(\omega_0^2 - \Omega^2)A_2 \cos\varphi - 2\gamma A_2 \Omega \sin\varphi - K_0\right]}_{\overset{!}{=}0} \cos(\Omega t) - \\ &- \underbrace{\left[(\omega_0^2 - \Omega^2)A_2 \sin\varphi + 2\gamma A_2 \Omega \cos\varphi\right]}_{\overset{!}{=}0} \sin(\Omega t) = 0.\end{aligned}$$

Da diese Gleichung für beliebige Zeiten gelten soll, müssen die Vorfaktoren der Sinus- und Kosinusfunktion verschwinden. Aus den resultierenden Gleichungen erhält man

$$\boxed{\varphi(\Omega) = -\arctan \frac{2\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}.} \qquad (12)$$

Die Phasenverschiebung $\varphi(\Omega)$ einer erzwungenen Schwingung mit $\gamma > 0$ wächst für $\Omega \leq \omega_0$ von 0 bis $-\pi/2$, für $\Omega \geq \omega_0$ von $-\pi/2$ bis $-\pi$. Sie ist **negativ**, d.h. die erzwungene Schwingung "hinkt" der Erregerschwingung hinterher.

Löst man die Gleichungen nach $A_2 \cos\varphi$ und $A_2 \sin\varphi$ auf, quadriert die Gleichungen und addiert sie, ergibt sich mit $K_0 = F_0/m$

$$A_2(\Omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2}}. \tag{13}$$

Betrachtet man dieses Ergebnis genauer, ergeben sich drei Fälle:

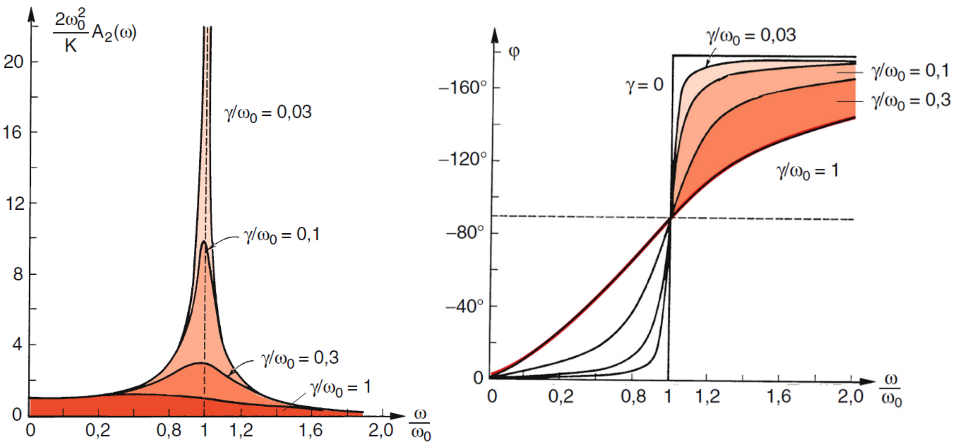
- $\Omega \ll \omega_0$: $A_2 = K_0/\omega_0^2$ und $\varphi = 0$, die Masse m bewegt sich in Phase mit dem Antrieb.
- $\Omega \gg \omega_0$: $A_2 \to 0$, die Masse m kann der schnellen Bewegung des Antriebs nicht folgen.
- $\Omega = \omega_0$: In diesem Fall spricht man von **Resonanz**. Das Maximum der Amplitude erhält man für die Resonanzfrequenz $\omega_{\text{res}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$, welche nicht ganz der Resonanzfrequenz des freien gedämpften Oszillators $\omega_{\text{frei}} = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ entspricht, für $\gamma \ll \omega_0$ aber auch nicht stark davon abweicht. Die Amplitude im Resonanzfall beträgt

  $$A_2(\omega_{\text{res}}) = \frac{K_0}{2\gamma\sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}}$$

  und divergiert für $\gamma \to 0$ (sog. **Resonanzkatastrophe**). Die Phasenverschiebung geht im Falle der Resonanz gegen $-\pi/2$.

  Da $x(t) \propto \cos(\Omega t - \pi/2)$ und somit $\dot{x}(t) \propto \sin(\Omega t - \pi/2) = \cos(\Omega t)$, wirkt F_{ext} zu jeder Zeit in Richtung der Geschwindigkeit der schwingenden Masse m. Es wird also laufend Energie in das System gesteckt.

  (Mathematica Applets: http://bit.ly/caadwa, http://bit.ly/8ZDqUk)



1.4 Energiebilanz bei der Schwingung eines Massenpunktes

Die kinetische Energie des harmonischen Oszillators ist

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 \sin^2(\omega_0 t).$$

Ihr Mittelwert über eine Schwingungsperiode T ist

$$\overline{E_{\text{kin}}} = \frac{1}{T}\int\limits_0^T \mathrm{d}t\, E_{\text{kin}} = \frac{1}{T}\frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 \underbrace{\int\limits_0^T \mathrm{d}t\, \sin^2(\omega_0 t)}_{=T/2} = \frac{1}{4}m\omega_0^2 A^2.$$

Die potentielle Energie des harmonischen Oszillators ist mit $D = m\omega_0^2$

$$E_{\text{pot}} = \int\limits_0^x \mathrm{d}x'\, F = \frac{1}{2}Dx^2 = \frac{1}{2}DA^2\cos^2(\omega_0 t) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 \cos^2(\omega_0 t).$$

Ihr Mittelwert über eine Schwingungsperiode T ist

$$\overline{E_{\text{pot}}} = \frac{1}{T}\int\limits_0^T \mathrm{d}t\, E_{\text{pot}} = \frac{1}{T}\frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 \underbrace{\int\limits_0^T \mathrm{d}t\, \cos^2(\omega_0 t)}_{=T/2} = \frac{1}{4}m\omega_0^2 A^2.$$

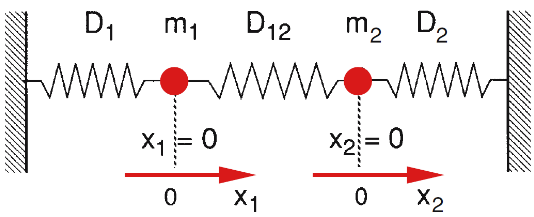
Die Summe von kinetischer und potentieller Energie beim harmonischen Oszillator

$$\boxed{E_{\text{kin}}(t) + E_{\text{pot}}(t) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2\left[\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t)\right] = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 = E = \text{const.} \qquad (14)}$$

ist zu **jedem** Zeitpunkt gleich der konstanten Gesamtenergie des Systems (Energiesatz). Die Mittelwerte $\overline{E_{\text{kin}}}$ und $\overline{E_{\text{pot}}}$ sind bei der harmonischen Schwingung gleich. Sie sind proportional zum Quadrat der Schwingungsamplitude A und der Frequenz ω_0.

1.5 Gekoppelte Oszillatoren

Gekoppelte Pendel spielen in der Natur eine wichtige Rolle. Wie wir später sehen werden, ist eine Welle nichts anderes als eine Reihe gekoppelter Pendel, die ihre Energie jeweils auf den Nachbarn übertragen.



In diesem Kapitel betrachten wir zunächst den einfachen Fall von zwei gekoppelten Federpendeln. Die Bewegungsgleichungen müssen nun für beide Massepunkte m_1 und m_2 einzeln aufgestellt werden. Dadurch, dass sich die Bewegungen gegenseitig beeinflussen, kommt es zu einem **gekoppelten DGL-System**.

Wir bezeichnen die Koordinate der ersten Masse m_1 mit x_1 und die der zweiten Masse m_2 mit x_2. Die Bewegungsgleichungen lauten dann

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= -D_1x_1 - D_{12}(x_1 - x_2) \\ m_2\ddot{x}_2 &= -D_2x_2 - D_{12}(x_2 - x_1). \end{aligned} \tag{15}$$

Für $m_1 = m_2 = m$ und $D_1 = D_2 = D$ lässt sich das gekoppelte DGL-System (15) durch eine geschickte **Koordinatentransformation** entkoppeln. Addition bzw. Subtraktion beider Gleichungen liefert

$$\begin{aligned} m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) &= -D(x_1 + x_2) \\ m(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) &= -D(x_1 - x_2) - 2D_{12}(x_1 - x_2). \end{aligned}$$

Durch Einführung der neuen Koordinaten $\xi_\pm = (x_1 \pm x_2)/2$ (sog. **Normalkoordinaten**) ergibt dies die einfachen Gleichungen

$$\begin{aligned} m\ddot{\xi}_+ &= -D\xi_+ \\ m\ddot{\xi}_- &= -(D + 2D_{12})\xi_- \end{aligned}$$

deren allgemeine Lösungen durch die harmonischen Schwingungen (sog. **Normalschwingungen**)

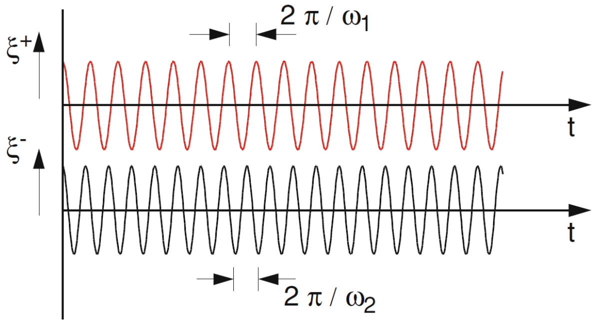
$$\xi_\pm(t) = A_{1,2}\cos(\omega_{1,2}t + \varphi_{1,2}) \text{ mit } \omega_1 = \sqrt{D/m},\ \omega_2 = \sqrt{(D + 2D_{12})/m}$$

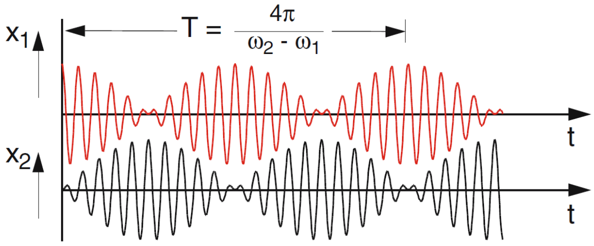
gegeben sind. Für $A_1 = A_2 = A$ lässt sich die Rücktransformation leicht durchführen und wir erhalten

$$\begin{aligned} x_1 &= \xi_+ + \xi_- = 2A\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right)\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) \\ x_2 &= \xi_+ - \xi_- = -2A\sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right)\sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right). \end{aligned} \tag{16}$$

Dabei handelt es sich um **Schwebungen** deren Maxima für die beiden Massenpunkte gegeneinander versetzt sind, wobei die Versetzung von den Phasen φ_1, φ_2 abhängt.

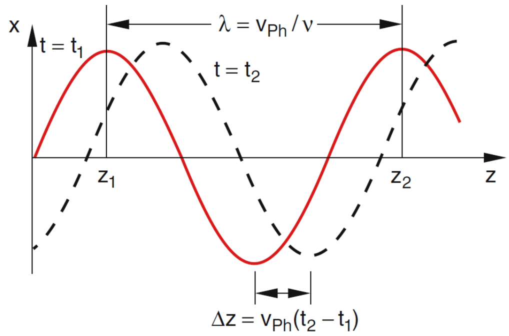
(Mathematica Applet: http://bit.ly/azwF6q)





Bei speziellen Anfangsbedingungen lassen sich die Normalschwingungen direkt anregen, sodass man in diesen Fällen rein harmonische Schwingungen erhält. Um ξ_+ anzuregen, müssen beide Pendel genau **in Phase** ($x_1 = x_2$) schwingen, sodass die Kopplung nicht beansprucht wird. Schwingen beide Pendel genau **gegenphasig** ($x_1 = -x_2$), so wird ξ_- direkt angeregt.

2 Mechanische Wellen



Breiten sich Schwingungen durch die Kopplung von Oszillatoren aus, so spricht man von einer **Welle**. Eine Welle transportiert Energie und Impuls ohne gleichzeitigen Materietransport. Sie ist eine zeitlich und räumlich periodische Bewegung. Ihre Ausbreitungs-/Phasengeschwindigkeit v_{ph} hängt von der Stärke der Kopplung zwischen den Oszillatoren ab. Die Intensität der Welle ist proportional zum Quadrat ihrer Amplitude A und Frequenz ν.

Man unterscheidet nun zwischen **longitudinalen** Wellen, bei denen die Oszillatoren parallel zur Ausbreitungsrichtung ausgelenkt werden (z.B. Schallwellen) und **transversalen** Wellen, bei denen die Oszillatoren senkrecht zur Bewegungsrichtung ausgelenkt werden (z.B. Wasserwellen).

2.1 Darstellungen harmonischer Wellen

In einer Dimension lässt sich die Auslenkung x der Welle an einem bestimmten Ort z zu einer bestimmten Zeit t schreiben als

$$x(z,t) = A\sin(kz - \omega t) = A\sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(z - vt)\right] \quad \text{oder } x(z,t) = C\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}. \tag{17}$$

Bei Gl. (17) handelt es sich um **ebene** Wellen die sich in z-Richtung ausbreiten. Wichtige Kenngrößen einer Welle sind (weiteren Kenngrößen sind äquivalent zur Schwingung):

- **Wellenlänge** λ: Abstand $\Delta z = z_2 - z_1$ zwischen zwei äquivalenten (gleich ausgelenkten) Punkten z_1 und z_2, für die sich das Argument der Sinusfunktion um 2π unterscheidet.
- **Wellenzahl** $k = 2\pi/\lambda$: Allgemein definiert man den Wellenvektor $\boldsymbol{k} = k\hat{\boldsymbol{n}}$ mit dem Einheitsvektor $\hat{\boldsymbol{n}}$ der die Ausbreitungsrichtung der Welle angibt.
- **Phasengeschwindigkeit** $v_{\text{ph}} \equiv c = \omega/k = \nu\lambda$: Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle (sog. **Dispersionsrelation**).

Transversale Wellen (in einer Dimension) werden durch die partielle DGL (**Wellengleichung**)

$$\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \tag{18}$$

beschrieben. Die Lösungen dieser Gleichung sind von der Form

$$x(z,t) = f(z - vt) + g(z + vt).$$

Abhängig von der Art der Ausbreitung unterscheidet man die Wellen noch weiter. Die zwei wichtigsten Typen (hier allgemein in drei Dimensionen) lauten:

- **ebene Welle**: $x(\boldsymbol{r},t) = A\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)$ bzw. $x(\boldsymbol{r},t) = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)}$
- **Kugelwelle**: $x(r,t) = A/r\cos(kr - \omega t)$ bzw. $x(r,t) = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kr-\omega t)}/r$

2.2 Ausbreitung von Wellen in verschiedenen Medien

Die Ausbreitung von Wellen in verschiedenen Medien unterscheidet sich vor allem in der Phasengeschwindigkeit. Die fünf wichtigsten Fälle sind hier zusammengefasst:

a) Elastische Longitudinalwellen in festen Körpern:

$$v_{\text{ph}} = \sqrt{E/\varrho} \tag{19}$$

mit dem Elastizitätsmodul E und der Dichte ϱ.

b) Transversalwellen in festen Körpern:

$$v_{\text{ph}} = \sqrt{G/\varrho} \tag{20}$$

mit dem Schermodul G und der Dichte ϱ.

c) Transversalwellen entlang in einer gespannten Saite:

$$v_{\mathrm{ph}} = \sqrt{F/\mu} \tag{21}$$

mit der Saitenspannung F und der linearen Massendichte μ.

d) Schallwellen in Gasen:

$$v_{\mathrm{ph}} = \sqrt{p/\varrho} \tag{22}$$

mit dem Druck p und der Dichte ϱ.

e) Wellen in Flüssigkeiten:

$$v_{\mathrm{ph}} = \sqrt{K/\varrho} \tag{23}$$

mit dem Kompressionsmodul K und der Dichte ϱ.

2.3 Überlagerung von Wellen

Für die Überlagerung von Wellen gilt das **Superpositionsprinzip**, d.h. sie können mathematisch durch das Addieren der einzelnen Auslenkungen ausgedrückt werden. Wenn sich zwei Wellen mit selber Frequenz überlagern, die an jedem Ort eine zeitlich konstante Phasendifferenz aufweisen, so sind diese Wellen **kohärent**. Kohärenz ist die Bedingung für stationäre **Interferenz**. Abhängig von der Phasendifferenz, sieht die Überlagerung an verschiedenen Orten unterschiedlich aus. Man unterscheidet zwei Extremfälle:

- **Konstruktive Interferenz** (maximale Verstärkung): $\Delta\varphi = 2n\pi,\ n \in \mathbb{N}_0$
- **Destruktive Interferenz** (Auslöschung): $\Delta\varphi = (2n+1)\pi,\ n \in \mathbb{N}_0$

Überlagert man unendlich viele harmonische Wellen, so erhält man eine **Wellengruppe** bzw. **Wellenpaket**. Die **Gruppengeschwindigkeit**

$$v_{\mathrm{gr}} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} \tag{24}$$

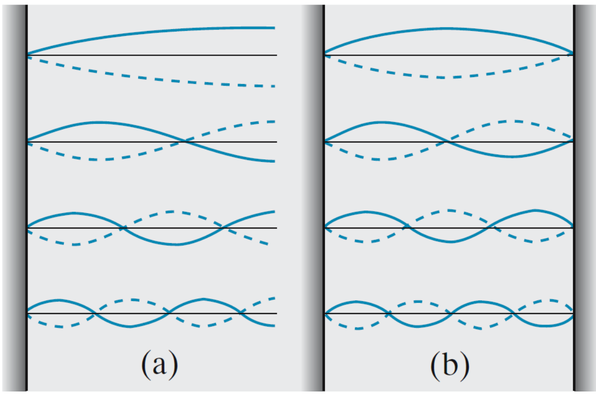
ist diejenige Geschwindigkeit, mit der sich das Maximum des Wellenpakets bewegt. Sie darf nicht mit der Phasengeschwindigkeit v_{ph} der einzelnen Wellenkomponenten verwechselt werden, die für alle Teilwellen unterschiedlich sein kann.

Eine Überlagerung von Wellen gleicher Frequenz ergibt eine harmonische Welle gleicher Frequenz. Bei unterschiedlichen Frequenzen entsteht eine komplizierte Schwingung mit zeitabhängiger Amplitude. Bei Wellen mit nicht zu weit entfernten Frequenzen kommt es zu Schwebungen. Ein weiteres mögliches Ergebnis der Überlagerung von Wellen sind **stehende Wellen**.

2.4 Stehende Wellen

Bei geeigneter Überlagerung laufender Wellen kann es zu einem räumlich stationären Schwingungsmuster kommen. Dies ist zum Beispiel durch **Reflexion** und anschließender Überlagerung der ein- und auslaufenden Welle möglich. Im Gegensatz zur laufenden Welle breiten sich die Maxima nicht aus, sondern schwingen **ortsfest**. Es wird also auch keine Energie übertragen. Man unterscheidet zwei Fälle:

- **Reflexion an festem Ende**: Es tritt ein Phasensprung von π auf und die Überlagerung ergibt am Ende einen **Knoten**.
- **Reflexion an freiem Ende**: Es tritt kein Phasensprung auf und die Überlagerung ergibt am Ende einen **Bauch**



Die Gleichung für eine ebene stehende Welle ergibt sich indem man zwei entgegengesetzte Wellen addiert zu

$$x(z,t) = 2A\cos(kz - \varphi/2)\cos(\omega t + \varphi/2). \tag{25}$$

Stehende Wellen treten auf einem **begrenzten** Wellenträger der Länge l nur auf, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- **Ein festes und ein freies Ende**: $\lambda_n = 4l/(2n+1),\ n \in \mathbb{N}_0$
- **Zwei feste oder zwei freie Enden**: $\lambda_n = 2l/(n+1),\ n \in \mathbb{N}_0$

Das heißt, nur bei bestimmten (Eigen-)Frequenzen, können sich stehende Wellen ausbilden. Man spricht bei der niedrigsten Frequenz von **Grundschwingung**, bei der nächst höheren von erster **Oberschwingung** usw..

(Mathematica Applet: http://bit.ly/95D2gf)