

FERIENKURS EXPERIMENTALPHYSIK 1

Vorlesung 3

Deformierbare Körper und Flüssigkeiten

Benedikt Daurer, Michael Schrapp, Markus Perner

29.03.2011

1 Deformierbare Körper

1.1 Beschreibung von Festkörpern

Bevor die Verformung fester Körper näher betrachtet wird, sollen zunächst zwei Begriffe erläutert werden, die für den Aufbau eines Festkörpers von Bedeutung sind. Die folgenden Begriffsdefinitionen gelten für alle Aggregatzustände, d.h. für Festkörper, Flüssigkeiten und Gase:

- **Homogenität:** Eine Substanz heißt homogen, wenn in ihrem Inneren die physikalischen Eigenschaften im makroskopischen Maßstab überall gleich sind.
- **Isotropie:** Eine Substanz heißt isotrop, wenn ihre physikalischen Eigenschaften von der Richtung unabhängig sind. Es ist wichtig, sich zu merken, dass die meisten Festkörper anisotrop sind, d.h. die physikalischen Eigenschaften verändern sich in Abhängigkeit der Richtung.

Wirkt auf einen Festkörper eine externe Kraft \mathbf{F} , so ändert der Körper seine Gestalt. Man unterscheidet:

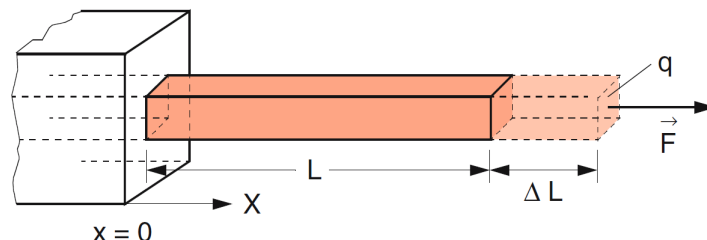
- **Elastische Verformung:** Die Deformation des Körpers nach Einwirkung der Kraft ist reversibel, d.h. der Körper kann seine ursprüngliche Gestalt wieder annehmen.
- **Plastische Verformung:** Die Deformation ist irreversibel, d.h. der Festkörper kann seinen Ausgangszustand nach dem Einwirken der Kraft nicht wieder annehmen. Hierzu gehört auch die Zerstörung des Festkörpers

1.2 Das Hookesche Gesetz

Wirkt auf einen elastischen Körper der Länge L mit dem Querschnitt q , der bei $x = 0$ festgehalten wird, eine Zugkraft \mathbf{F} in x -Richtung, so verlängert sich die Länge L um ΔL . Experimentell zeigt sich, dass bei genügend kleinem ΔL

$$F = Eq \frac{\Delta L}{L}$$

gilt. Die Proportionalitätskonstante E heißt **Elastizitätsmodul** mit der Dimension N/m^2 . Je größer das Elastizitätsmodul eines Körpers bzw. Materials ist, umso größer ist die für eine feste Längenänderung vorgegebene Kraft.



Führt man die **Zugspannung** $\sigma = F/q$ (Zugkraft pro Fläche) und die relative Dehnung $\epsilon = \Delta L/L$ ein, so erhält man das Hookesche Gesetz in der übersichtlichen Form

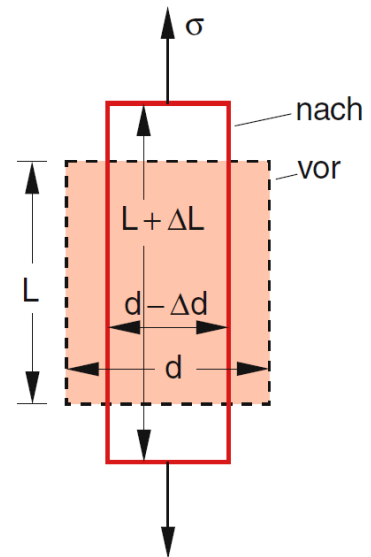
$$\sigma = E\epsilon. \quad (1)$$

1.3 Querkontraktion

Bisher wurde nur die Dehnung in eine Raumrichtung betrachtet. Im dreidimensionalen Raum muss man jedoch beachten, dass eine Dehnung in z -Richtung eine Kontraktion in x - und y -Richtung zur Folge hat, wenn die externe Kraft in z -Richtung senkrecht zur Oberfläche angreift. Je nachdem, ob der Effekt der Kontraktion oder der Dehnung größer ist, kann sich das Volumen des Körpers verkleinern oder vergrößern. Ein Maß hierfür ist die **Querkontraktionszahl** oder **Poissonzahl** μ

$$\mu = -\frac{\Delta d/d}{\Delta L/L}$$

die über das Verhältnis von Querkontraktion zu Dehnung definiert ist. Somit erhält man für die relative Volumenänderung bei einem quadratischen Querschnitt



$$\frac{\Delta V}{V} \simeq \frac{\Delta L}{L} + 2\frac{\Delta d}{d} = \epsilon(1 - 2\mu) = \frac{\sigma}{E}(1 - 2\mu). \quad (2)$$

Wirkt auf den Körper von **allen Seiten** anstatt einer Zugspannung ein Druck $p = -\sigma$, so erhält man für die relative Volumenänderung

$$\frac{\Delta V}{V} = -3\frac{p}{E}(1 - 2\mu).$$

Führt man den **Kompressionsmodul** K [N/m^2] durch die Definition

$$\Delta p = -K\frac{\Delta V}{V}$$

und die **Kompressibilität** $\kappa = 1/K$ ein, so erhält man die Relation

$$\kappa = 1/K = \frac{3}{E}(1 - 2\mu). \quad (3)$$

2 Flüssigkeiten

Zunächst werden **ideale Flüssigkeiten** betrachtet. Sie können keine tangentialen Kräfte übertragen und es gibt keine Reibung.

2.1 Hydrostatik

2.1.1 Statischer Druck

Der statische Druck ist definiert, als der Quotient aus der auf die Oberfläche A wirkenden Kraft F_{\perp} und der Oberfläche.

$$p = \frac{F_{\perp}}{A} \quad \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \text{Pa} \right]. \quad (4)$$

Vernachlässigt man den Schweredruck (s. Abschnitt 2.1.2), so ist der Druck isotrop. In ruhenden Flüssigkeiten ist der statische Druck konstant.

2.1.2 Schweredruck

Das Eigengewicht der Flüssigkeit führt zum sogenannten **Schweredruck** oder **hydrostatischen Druck**.

Die Gewichtskraft des Wassers am Boden einer quaderförmigen Flüssigkeitssäule mit der Grundfläche dA , der bis zur Höhe h mit einer inkompressiblen ($\rho = \text{const.}$) Flüssigkeit gefüllt ist beträgt

$$dF_G = \rho g h dA.$$

Der Schweredruck der am Boden des Gefäßes herrscht ist dann

$$p = \frac{dF_G}{dA} = gh\rho. \quad (5)$$

Der Schweredruck ist nur noch abhängig von der Höhe des Flüssigkeitsstands und **unabhängig** von der Form eines Gefäßes und seiner Grundfläche (hydrostatisches Paradoxon).

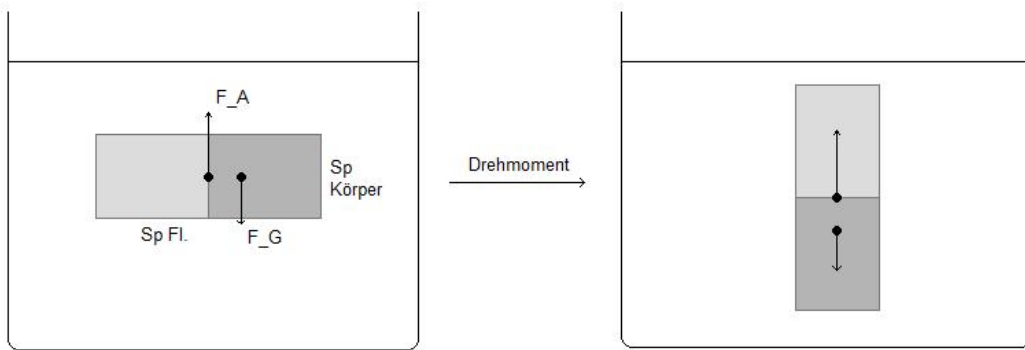
2.1.3 Auftrieb

Befindet sich ein Körper der Dichte ρ_K in einer Flüssigkeit der Dichte ρ_F , so spürt er eine Kraft, die antiparallel zur Gewichtskraft wirkt. Diese Kraft ist die **Auftriebskraft**. Sie ist so groß wie die Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeit.

Die effektive Kraft auf einen Körper der sich in einer Flüssigkeit befindetet berechnet sich zu

$$F = \rho_K V g - \rho_F V' g \quad (6)$$

Dabei ist V das Volumen des Körpers und V' der Teil des Volumens, der von der Flüssigkeit umgeben ist. Ist $\rho_K > \rho_F$ geht der Körper unter, ist $\rho_K < \rho_F$ schwimmt der Körper an der Flüssigkeitsoberfläche, und ist so weit eingetaucht, dass er sich im Kräftegleichgewicht befindet.



Bei inhomogenen Körpern wirkt so lange ein Drehmoment, bis der Schwerpunkt der verdrängten Flüssigkeit senkrecht über dem Schwerpunkt des Körpers ist. Ist der Schwerpunkt der verdrängten Flüssigkeit senkrecht unter dem des Körpers so ist die Lage instabil.

2.2 Oberflächenspannung

Atome, die sich an der Oberfläche einer Flüssigkeit befinden erfahren eine Kraft, die in die Flüssigkeit hinein gerichtet ist. Deshalb muss, um ein Molekül an die Oberfläche zu bringen, gegen diese Kraft die Arbeit W_s verrichtet werden. Die **spezifische Oberflächenenergie** ist definiert als

$$\sigma = \frac{dW_s}{dA}, \quad (7)$$

wobei σ die **Oberflächenspannung** ist. Ihr Wert ist abhängig von den beiden angrenzenden Substanzen. Die Arbeit um eine Oberfläche ΔA zu bilden ist dann

$$\Delta W = \sigma \cdot \Delta A.$$

Beispiel: Verschmelzung zweier Wassertropfen

Ein kugelförmiger Wassertropfen (Radius r) besitzt die spezifische Oberflächenenergie

$$E(r) = A\sigma = 4\pi r^2 \sigma$$

Bei der Verschmelzung entsteht ein neuer Wassertropfen mit Radius R

$$\frac{4}{3}\pi r^3 + \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi R^3$$

woraus folgt:

$$R = 2^{2/3}r$$

Für die Differenz der Oberflächenenergie ergibt sich daher

$$\Delta E = E(R) - 2E(r) = 4\pi r^2 \sigma (2^{2/3} - 2) < 0$$

Da die Differenz negativ ist, ist es energetisch günstiger, dass sich die Wassertropfen verschmelzen. Die Oberfläche des neuen Wassertropfens ist geringer als die Summe der Oberflächen der beiden kleineren Tropfen. Eine Flüssigkeit versucht daher die Form **minimaler Oberfläche** einzunehmen.

2.3 Hydrodynamik

Um Strömungen zu beschreiben führt man **Stromfäden** ein. Sie verfolgen die Bahn eines Massenpunktes und kreuzen sie sich nicht, so ist die Strömung **laminar**. Das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v} = (\mathbf{r}, t)$ beschreibt die momentane Geschwindigkeit an jedem Ort. Liegt keine explizite Zeitabhängigkeit vor, also $\partial \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) / \partial t = 0$, so spricht man von einer **stationären** Strömung.

2.3.1 Kontinuitätsgleichung

Der Strom durch eine Oberfläche \mathcal{S} , die ein Volumen V einschließt ist definiert als

$$I_M = \int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}, \quad (8)$$

wobei $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$ die Massenstromdichte ist. **Der Strom gibt also an, wie viel Flüssigkeit insgesamt pro Zeiteinheit durch die Oberfläche hinein oder heraus fließt.**

Aus der Bedingung, dass das Volumen genauso viel Flüssigkeit verliert/aufnimmt wie aus-/einströmt lässt sich die **Kontinuitätsgleichung** herleiten

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) = 0. \quad (9)$$

Für **inkompressible** Flüssigkeiten gilt $\partial\rho/\partial t = 0$, und die Kontinuitätsgleichung vereinfacht sich zu

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Für die Strömung von Wasser durch ein Rohr, dessen Querschnittfläche sich von A_1 auf A_2 ändert sich die durchschnittliche Geschwindigkeit gemäß der Kontinuitätsgleichung für inkompressible Flüssigkeiten

$$A_1 v_1 = A_2 v_2.$$

Für den Volumenstrom gilt:

$$I = Av = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

2.3.2 Bernoulli-Gleichung

An den beiden Enden eines Rohrs durch das eine inkompressible Flüssigkeit fließt, herrschen unterschiedliche Drücke p_1 und p_2 . Außerdem ist die Querschnittfläche am einen Ende A_1 und am anderen A_2 . Der Druck p_1 verrichtet nun die Arbeit am Volumenelement $\Delta V = A_1 \Delta x_1$

$$\Delta W_1 = F_1 \cdot \Delta x_1 = p_1 A_1 \cdot \Delta x_1 = p_1 \cdot \Delta V.$$

ΔW_1 dient der Überwindung des Gegendruckes ($\Delta W_2 = p_2 \cdot \Delta V$) und der Beschleunigung von v_1 auf v_2 . Die Änderung der kinetischen Energie ist

$$\Delta W_{kin} = \frac{1}{2} \rho \cdot \Delta V (v_2^2 - v_1^2).$$

Die Energiebilanz ergibt also

$$p_1 \Delta V = p_2 \cdot \Delta V + \frac{1}{2} \rho \cdot \Delta V (v_2^2 - v_1^2).$$

Ist p_0 der Druck, der in der ruhenden Flüssigkeit herrschen würde (z.B. hydrostatisch $p_0 = \rho gh$) so gilt

$$p_0 + p + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{const.} \quad (10)$$

bzw.

$$\rho gh + p + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{const.}$$

Gleichung (10) ist die **Bernoulli-Gleichung**. Beim hydrostatischen Druck ist es wichtig, die Höhe immer positiv anzugeben.

2.3.3 Hagen-Poiseuillesches Gesetz

Bei nichtidealen Flüssigkeiten muss man die Reibung mit der den umgebenden Flächen und auch die innere Reibung in der Flüssigkeit berücksichtigen. Dadurch ergibt sich ein **Geschwindigkeitsprofil** und Druckverluste.

Für den Volumenstrom Zwischen den Enden eines Rohrs mit Radius R , Länge l und Druckgefälle $\Delta p = p_1 - p_2$ gilt das Hagen-Poiseuillesche Gesetz.

$$I = \frac{dV}{dt} = \frac{\pi \Delta p}{8 \eta l} R^4.$$

Analog zum ohmschen Gesetz kann man den **Strömungswiderstand** Ω definieren

$$\Omega = \frac{\Delta p}{I} = \frac{8 \eta l}{\pi R^4}.$$

Voraussetzung für die Gültigkeit des Hagen-Poiseuilleschen Gesetzes ist die Bedingung $r \ll l$, d.h. der Radius muss deutlich kleiner sein als die Rohrlänge.

2.3.4 Stokessche Reibung

Bewegt sich eine Kugel in einer zähen Flüssigkeit so wird sie durch die Reibungskraft abgebremst. Für die Reibungskraft gilt

$$F_r = 6\pi\eta r v. \quad (11)$$

Sie ist also proportional zur Geschwindigkeit v und dem Radius r der Kugel.

Durch die Reibungskraft erreicht die Kugel eine Maximalgeschwindigkeit, wenn der Betrag der nach oben wirkenden Reibungskraft gleich groß wie die effektive Gewichtskraft ($F_{g,\text{eff}} = F_g - F_a$) ist. Die Kugel befindet sich dann im Kräftegleichgewicht.

$$\begin{aligned} F_r &= F_{g,\text{eff}} \\ 6\pi\eta r v_{\text{max}} &= \frac{4\pi}{3} r^3 (\rho_K - \rho_F) g \end{aligned}$$

Mit diesem Zusammenhang kann man zum Beispiel im Kugelfallviskosimeter die Viskosität einer Flüssigkeit bestimmen.

3 Gase

3.1 Ideales Gas

Zu Beginn betrachten wir das **ideale Gas** (d.h. es werden gewisse Dinge in unserem Modell eines Gases vereinfacht bzw. idealisiert) und passen dieses Modell später an die Realität an. Wir machen dabei folgende Annahmen:

- Die Gasteilchen sind Massenpunkte, d.h. sie haben keine Ausdehnung, kein Volumen und kein Trägheitsmoment und besitzen somit ausschließlich die drei Freiheitsgrade der Translation.
- Es herrscht keine anziehende Wechselwirkung zwischen den einzelnen Gasmolekülen, d.h. diese können sich frei bewegen und es findet keine Kondensation statt.
- Es finden nur elastische Stöße der Moleküle untereinander und mit den Wänden des Behälters statt.
- Die kinetische Energie ist deutlich größer als die potentielle Energie (bei einer eventuellen äußeren Kraft)

Da die Dichte ρ in Gasen sehr viel kleiner ist als in Flüssigkeiten oder Festkörpern, nehmen Gase das komplette ihnen zur Verfügung stehende Volumen ein. Neben der Dichte gibt es noch andere Variablen, sog. **Zustandsgrößen**, welche den Zustand des Gases vollständig charakterisieren. Diese sind im Wesentlichen die Temperatur T in Kelvin, die Teilchenzahl N , der Druck p und das Volumen V .

3.2 Die ideale Gasgleichung

Experimentell findet man zwischen den Zustandsgrößen folgende Zusammenhänge:

a) Gesetz von Boyle und Mariotte ($T = \text{const.}$, $N = \text{const.}$):

$$pV = \text{const.}$$

b) Gesetz von Gay-Lussac ($p = \text{const.}$, $N = \text{const.}$):

$$V/T = \text{const.}$$

c) Gesetz von Amontons ($V = \text{const.}$, $N = \text{const.}$):

$$p/T = \text{const.}$$

d) Außerdem findet man für $V = \text{const.}$, $T = \text{const.}$:

$$p \propto N$$

Aus a-c) folgt für ein Gas mit konstanter Teilchenzahl N

$$\frac{pV}{T} = \text{const.}$$

und mit d) bei variabler Teilchenzahl N

$$\frac{pV}{T} = Nk_{\text{B}}$$

mit dem Proportionalitätsfaktor $k_{\text{B}} = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$ die als Boltzmann-Konstante bekannt ist. Man erhält letztendlich die **Zustandsgleichung** für ideale Gase

$$pV = Nk_{\text{B}}T = nRT \quad (12)$$

mit der Gaskonstante $R = 8.31 \text{ Jmol}^{-1}\text{K}^{-1}$ und der Stoffmenge $n = N/N_{\text{A}}$ mit der Avogadro-Konstante $N_{\text{A}} = 6.02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.

3.3 Kompressibilität

Eine Eigenschaft des idealen Gases ist die sog. **Kompressibilität** κ . Die Kompressibilität gibt an um welchen Bruchteil sich das Volumen des Gases verringert, wenn man den Druck erhöht (und umgekehrt). Sie ist gegeben durch

$$\kappa = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial p} \quad (13)$$

und besitzt die Einheit m^2N^{-1} . Das Minuszeichen steht davor, damit die Kompressibilität beim normalen Verhalten von Gasen immer positiv ist (eine Druckerhöhung soll eine Verkleinerung des Volumens bewirken). Für eine konstante Temperatur lässt sich diese Gleichung vereinfacht als

$$\kappa = 1/p \quad (14)$$

schreiben. Ein Gas lässt sich also desto leichter komprimieren, je kleiner sein Druck ist.

3.4 Barometrische Höhenformel

Betrachtet man eine infinitesimal dünne Luftschicht mit der Dicke dz und Fläche A , dann hat diese die Masse

$$dm = \rho dV = \rho A dz.$$

Diese infinitesimale Luftschicht erzeugt einen durch die Schwerkraft bedingten Druck

$$dp = \frac{dF_g}{A} = -\frac{dm g}{A} = -\rho g dz.$$

Aus dem Gesetz von Boyle und Mariotte und der Definition der Dichte ergibt sich, dass der Druck eines Gases proportional zur Dichte ist

$$pV = \frac{pm}{\rho} = \text{const.} \Rightarrow \frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0} = \text{const.} \Rightarrow \rho = \frac{\rho_0}{p_0} p.$$

Setzt man diesen Ausdruck in die Gleichung darüber für ρ ein, so erhält man

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\rho_0}{p_0} g dz \Rightarrow \int_{p_0}^p \frac{dp'}{p'} = -g \frac{\rho_0}{p_0} \int_0^z dz'.$$

Löst man diese separierbare DGL unter der Bedingung, dass auf Höhe $z = 0$ der Druck p_0 herrsche, so erhält man die **barometrische Höhenformel**

$$p(z) = p_0 e^{-gz\rho_0/p_0} \quad (15)$$

die den Luftdruck abhängig von der Höhe beschreibt. Dabei ist das Verhältnis ρ_0/p_0 temperaturabhängig. Die Barometrische Höhenformel gilt bis zu einer Höhe von etwa 10 km. Ab dieser Höhe führt der Einfluss der Temperatur zu Abweichungen.

3.5 Kinetische Gastheorie

Die **mittlere kinetische Energie** von Gasmolekülen, die sich in einem endlichen Volumen V befinden, ergibt sich mit Hilfe der idealen Gasgleichung zu

$$\overline{E_{\text{kin}}} = \frac{m}{2} \overline{v^2} = \frac{3}{2} k_B T. \quad (16)$$

Dabei gilt der **Gleichverteilungssatz**, der besagt, dass sich bei einem Gas, das genügend lange bei einer konstanten Temperatur gehalten wird, die Energie der einzelnen Atome/Moleküle durch Stöße gleichmäßig auf alle **Freiheitsgrade** f verteilt, so dass im Mittel jedes Teilchen die Energie

$$\overline{E_{\text{kin}}} = \frac{f}{2} k_B T$$

besitzt, wobei f die Zahl der ihm zur Verfügung stehenden Freiheitsgrade ist.

In der kinetischen Gastheorie spielen **Wahrscheinlichkeitsdichten** bzw. **Verteilungsfunktionen** eine große Rolle. Eine Verteilungsfunktion $f(u)$ gibt an, wie die Größe u unter den Teilchen verteilt ist, sie ist also die Wahrscheinlichkeitsdichte für die Größe u in einem System.

Nehmen wir als Beispiel die Geschwindigkeit: Das System sei ein Gas, also ein Volumen mit vielen Teilchen. Dann haben die Teilchen nicht alle genau die gleiche Geschwindigkeit (sonst würde sich das Gasvolumen als Ganzes bewegen wie z.B. beim Wind) und manche Geschwindigkeiten treten häufiger auf als andere. Die Verteilungsfunktion $f(v)$ gibt nun an welche Geschwindigkeiten häufig auftreten und welche selten. Desweiteren ist $f(v)dv$ die **Wahrscheinlichkeit** ein Teilchen zu finden, dessen Geschwindigkeitsbetrag v sich im Intervall $[v, v + dv]$ befindet. Will man ein größeres (nicht infinitesimales) Intervall $[v_1, v_2]$ betrachten, so ist die Wahrscheinlichkeit P ein Teilchen mit einer Geschwindigkeit $v_1 \leq v \leq v_2$ zu finden, über das Integral

$$P(v_1 \leq v \leq v_2) = \int_{v_1}^{v_2} dv f(v)$$

gegeben.

Bemerkungen:

- i) Es lässt sich keine Wahrscheinlichkeit dafür angeben, dass ein Teilchen in einem System eine **bestimmte** Geschwindigkeit hat bzw. diese Wahrscheinlichkeit wäre dann Null.
- ii) Die Wahrscheinlichkeit ein Teilchen mit **irgendeiner** Geschwindigkeit zu finden muss Eins betragen (sog. **Normierung**), also

$$\int_0^{\infty} dv f(v) = 1.$$

Im Allgemeinen (also wenn man keine Beträge sondern z.B. die Komponenten der Geschwindigkeit betrachtet) sind natürlich auch negative Werte zulässig.

Eine wichtige Verteilungsfunktion in der kinetischen Gastheorie ist die **Verteilung der Teilchengeschwindigkeiten** in einem idealen Gas. Für eine Komponente $i = x, y, z$ lautet sie

$$f(v_i) = \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} \exp\left(-\frac{mv_i^2/2}{k_B T}\right). \quad (17)$$

Da die Geschwindigkeitskomponenten voneinander unabhängig sind, ist die Wahrscheinlichkeit dafür, eine Geschwindigkeit im Intervall $[\mathbf{v}, \mathbf{v}+d\mathbf{v}]$ zu finden, einfach das Produkt der Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Komponenten und damit die Verteilungsfunktion für den Geschwindigkeitsvektor \mathbf{v} gleich dem Produkt der Verteilungsfunktion der Geschwindigkeitskomponenten v_x, v_y und v_z

$$f(\mathbf{v}) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m\mathbf{v}^2/2}{k_B T}\right).$$

Um nun die Verteilungsfunktion für den Geschwindigkeitsbetrag zu erhalten, integriert man obige Gleichung zuerst über den gesamten Raum in **Kugelkoordinaten**

$$\iiint dv_x dv_y dv_z f(v_x, v_y, v_z) = \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \sin \vartheta}_{=4\pi} \int_0^{\infty} dv \underbrace{v^2 f(|\mathbf{v}|, \varphi, \vartheta)}_{=:f(v)}.$$

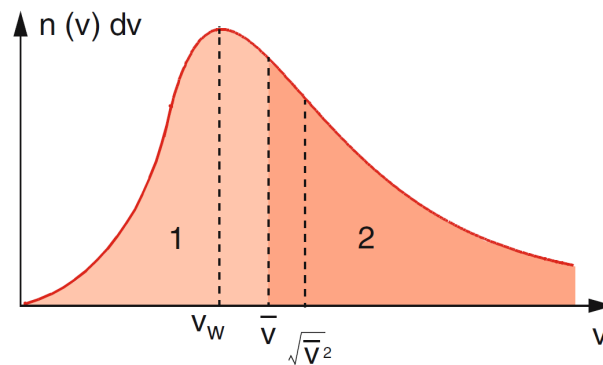
Da uns die Richtung der Geschwindigkeit nicht interessiert sondern nur deren Betrag, können wir die Integration über alle Richtungen direkt ausführen. Multipliziert mit der Teilchendichte n , also der Anzahl an Teilchen pro Volumen in dem Gas, erhält man eine Verteilungsfunktion $n(v)$ für die Teilchendichte in der Geschwindigkeit. Genauer gesagt gibt $n(v)dv$ an, wieviele Teilchen pro Volumeneinheit sich in dem Gas mit einer

Geschwindigkeit zwischen v und $v+dv$ bewegen. Dies ist die **Maxwell-Boltzmannsche Geschwindigkeitsverteilung**

$$n(v)dv = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{m}{k_B T} \right)^{3/2} n v^2 \exp\left(-\frac{mv^2/2}{k_B T}\right). \quad (18)$$

Es gilt $f(v) = n(v)/n$. Das Maximum dieser Verteilung liegt bei der wahrscheinlichsten Geschwindigkeit

$$v_w = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}. \quad (19)$$



Immer wenn man den **Mittel-** oder **Erwartungswert** $\bar{A} \equiv \langle A \rangle$ einer Größe $A(v)$ (die von v abhängig sein kann oder nicht) berechnen will, multipliziert man diese Größe mit der Verteilungsfunktion $f(v)$ und integriert über alle möglichen Werte von v (beim Betrag also von 0 bis ∞ , bei einer Komponente von $-\infty$ bis ∞). Die **mittlere Geschwindigkeit** ist also demnach

$$\bar{v} = \int_0^{\infty} dv v f(v) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{m}{k_B T} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} dv v^3 \exp\left(-\frac{mv^2/2}{k_B T}\right) = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} v_w. \quad (20)$$

wobei das Integral durch partielle Integration gelöst wurde.

Durch z.B. zweimalige partielle Integration lässt sich auch noch das **mittlere Geschwindigkeitsquadrat**

$$\overline{v^2} = \frac{3k_B T}{m} = \frac{3}{2} v_w^2. \quad (21)$$

berechnen. Dieses Ergebnis haben wir bereits in Gl. (16) verwendet. Man beachte, dass $\overline{v^2} \neq \bar{v}^2$ und somit $\sqrt{\overline{v^2}} \neq \bar{v}$ (man kann leicht zeigen, dass $\overline{v^2} = \bar{v}^2 \cdot 3\pi/8$ gilt).

Mit diesem Ergebnis lässt sich außerdem die **mittlere freie Weglänge**

$$\Lambda = \frac{1}{n\sigma} \quad (22)$$

herleiten, wobei σ der sog. **Stoßquerschnitt** ist. Sie gibt die Strecke an, die ein Teilchen im Mittel durchläuft bevor es mit einem anderen Teilchen zusammenstößt. Die mittlere Zeit zwischen zwei Stößen ist dann durch

$$\tau = \frac{\Lambda}{\bar{v}} = \frac{1}{n\sigma\sqrt{2\overline{v^2}}}$$

gegeben, wobei bei einer Bewegung von beiden Teilchen \bar{v} durch die mittlere Relativgeschwindigkeit $\overline{\Delta v} = \sqrt{2\overline{v^2}}$ ersetzt werden muss.

(Mathematica Applets: <http://bit.ly/9nmnOK>, <http://bit.ly/bl1vLo>, <http://bit.ly/bI18Rh>)