Ferienkurs Experimentalphysik 1

Vorlesung 2

Systeme von Massenpunkten, Stöße, Starre Körper

29.03.2011

Inhaltsverzeichnis

1 Systeme von Massenpunkten

Für einen Massenpunkt der Masse m gilt bekanntlich

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Wir betrachten nun System aus mehreren Teilchen (Massenpunkten), diese haben die Massen m_i, befinden sich an den Orten r_i und bewegen sich mit v_i. Die Gesamtmasse des Systems beträgt

$$\boxed{M = \sum_i m_i} \tag{1}$$

1.1 Schwerpunktkoordinaten

Sehr hilfreich in der Beschreibung von Mehrteilchensystemen sind Schwerpunktkoordinaten. Der Schwerpunkt eines Systems aus N Teilchen ist definiert als

$$\boxed{\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \vec{r}_i} \tag{2}$$

und seine Geschwindigkeit

$$\boxed{\vec{V} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \vec{v}_i} \tag{3}$$

Im Spezialfall $N = 2$ erhalten wir

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

bzw.

$$\vec{V} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

1.2 Impulserhaltung

Wirken keine äußeren Kräfte auf das System so gilt Impulserhaltung. Für den Gesamtimpuls gilt

$$\vec{P} = \sum_i m_i v_i = \text{ const.} \tag{4}$$

Anhand des Spezialfalls eines Systems bestehend aus 2 Massen, die miteinander wechselwirken lässt dies verdeutlichen

$$\begin{aligned}
\vec{p}_1 + \vec{p}_2 &= \text{const.} \\
\dot{\vec{p}}_1 + \dot{\vec{p}}_2 &= 0 \\
\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} &= 0 \\
\vec{F}_{12} &= -\vec{F}_{21}
\end{aligned}$$

Letzteres kennen wir als das 3. newton'sche Axiom.

1.3 Drehimpulserhaltung

Wir wissen, das ein Massenpunkt bezüglich eines anderen Punktes einen Drehimpuls besitzt

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \tag{5}$$

dieser Drehimpuls ändert sich zeitlich sobald ein Drehmoment wirkt

$$\vec{D} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{6}$$

Analog zu obiger Betrachtung gilt, dass der Drehimpuls eines Systems erhalten ist, sofern kein äußeres Drehmoment wirkt.

1.4 Stöße

Wenn wir Stoßprozesse betrachten (z.b. stoßende Kugeln, kollidierende Fahrzeuge oder stoßende Elektronen) benutzen wir die Tatsache, dass in abgeschlossenen Systemen stets Energie- und Impulserhaltung gilt. Da die Systeme abgeschlossen sind spielen potentielle Energien dabei keine Rolle, die Gesamtenergie des Stoßsystems besteht somit aus kinetischen Energien bzw. eventuellen Wärmeenergien (welche aufgrund von Reibungsverlusten entstehen).

Elastische Stöße

Bei elastischen Stößen entsteht keine Wärme (keine Reibungsverluste), d.h. es wird nur kinetische Energie übertragen. Wir betrachten den Fall des Stoßes in einer Dimension (zentraler Stoß). Die beteiligten Körper haben die Massen m_1 und m_2. Es gilt **Energieerhaltung**

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2$$

und **Impulserhaltung**

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 &= p_1' + p_2' \\ m_1v_1 + m_2v_2 &= m_1v_1' + m_2v_2' \end{aligned}$$

Wir schreiben nun die Ausrücke der Energien in Abhängigkeit der jeweiligen Impulse

$$\begin{aligned} \frac{p_1^2}{m_1} + \frac{p_2^2}{m_2} &= \frac{p_1'^2}{m_1} + \frac{p_2'^2}{m_2} \\ \frac{p_1^2 - p_1'^2}{m_1} &= \frac{p_2'^2 - p_2^2}{m_2} \\ \frac{(p_1 - p_1')(p_1 + p_1')}{m_1} &= \frac{(p_2' - p_2)(p_2' + p_2)}{m_2} \end{aligned}$$

Aus der Impulserhaltung folgt das $(p_1 - p_1') = p_2' - p_2)$, also können diese Klammern beidseitig kürzen und erhalten

$$m_2(p_1 + p_1') = m_1(p_2' + p_2)$$

Ersetzen wir nun p_2' durch $(p_1 + p_2 - p_1')$ (Impulserhaltung) finden wir einen Ausdruck für die Geschwindigkeit v_1' des ersten Körpers nach dem Stoß in Abhängigkeit der Geschwindigkeiten vor dem Stoß

$$\begin{aligned} m_2p_1 + m_2p_1' &= m_1(p_1 + 2p_2 - p_1') \\ m_2p_1' + m_1p_1' &= (m_1 - m_2)p_1 + 2m_1p_2 \\ m_2m_1v_1' + m_1^2v_1' &= (m_1 - m_2)m_1v_1 + 2m_1m_2v_2 \\ (m_2 + m_1)v_1' &= (m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2 \\ v_1' &= \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2} \end{aligned}$$

Für die Geschwindigkeit v'_2 erhält man analog

$$v'_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

Wir wollen ein paar Spezialfälle betrachten. Wenn $v_1 = v_2 = v$ dann erhalten wir auch für die Geschwindigkeiten nach dem Stoß $v'_1 = v'_2 = v$, es hat also kein Energieaustausch stattgefunden. Sind die Massen identisch, also $m_1 = m_2 = m$, erhalten wir $v'_1 = v_2$ und $v'_1 = v_2$. Der erste Körper hat also seine Energie auf den zweiten übertragen und umgekehrt.

Wenn einer der Körper vor dem Stoß ruht (z.B. $v_2 = 0$) und seine Masse sehr groß gegenüber der Masse des anderen ist ($m_2 \gg m_1$) erhalten wir

$$\begin{aligned} v'_1 &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_1 \\ &= \frac{m_2 \left(\frac{m_1}{m_2} - 1\right)}{m_2 \left(\frac{m_1}{m_2} + 1\right)} \cdot v_1 \\ &= -v_1 \end{aligned}$$

Die Geschwindigkeit des leichten Körpers bleibt also erhalten und ändert das Vorzeichen, während sich der schwere ruhende Körper nicht bewegt.

Erfolgt der Stoß nicht mehr zentral muss vektoriell gerechnet werden, da die Impulse vor bzw. nach dem Stoß in unterschiedliche Richtungen zeigen können. Für den Spezialfall dass $m_1 = m_2 = m$ und $v_2 = 0$ kann man zeigen, dass gilt

$$\vec{p'_1} \cdot \vec{p'_2} = 0$$

die Impulsvektoren nach dem Stoß stehen also senkrecht zueinander. Beim Billardspiel (ohne Eigenrotation der Kugeln) herrschen genau diese Bedingungen.

Inelastische Stöße

Stoßen zwei Körper inelastisch gilt die Erhaltung der kinetischen Energie nicht mehr. Die Energieerhaltung lässt sich aber weiter formulieren in dem man berücksichtigt, dass die restliche Energie in Wärme (Reibung) umgewandelt wurde. Impulserhaltung gilt weiter wie bisher. Im Allgemeinen ist dieses System nicht mehr zu lösen, man kann allerdings den sehr nützlichen Spezialfall des **vollkommen inelastischen Stoßes** betrachten. Dabei vereinigen sich die Massen m_1 und m_2 nach dem Stoß zu einer Masse $m_1 + m_2$ und bewegen sich mit einer Geschwindigkeit v, so als würden sie zusammenkleben. Diese Geschwindigkeit erhält man direkt aus der Impulserhaltung

$$
\begin{aligned}
m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2} &= (m_1+m_2)\vec{v} \\
\frac{m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2}}{m_1+m_2} &= \vec{v}
\end{aligned}
$$

Stöße im Schwerpunktsystem

Da wir das Inertialsystem in dem wir den Stoß beobachten frei wählen können, ist es möglich dies im Schwerpunktsystem zu tun. Es gilt weiterhin die Erhaltung des Gesamtimpulses, dieser entspricht dem Schwerpunktimpuls

$$
\vec{P} = M\vec{V} = \sum_i m_i v_{is} = 0 \tag{7}
$$

dieser ist verschwindet per Definition im Schwerpunktsystem, da sich alle auf den Schwerpunkt wirkenden Kräfte gegenseitig aufheben. Im Zweikörperfall gilt also

$$
m_1\vec{v}_{1s} = -m_2\vec{v}_{2s} \tag{8}
$$

Die Transformation zwischen Laborsystem und Schwerpunktsystem entspricht einer Galilei-Transformation, bei der sich das bewegte Bezugssystem mit der Schwerpunktsgeschwindigkeit bewegt

$$
\begin{aligned}
\vec{r}_{is} &= \vec{r_i} - \vec{R} \quad \text{für i=1,2} \\
\vec{v}_{is} &= \vec{v_i} - \vec{V} \quad \text{für i=1,2}
\end{aligned}
$$

Für die Gesamtenergie im Laborsystem gilt dann

$$
E = \frac{1}{2}\left[m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2\right] = \frac{1}{2}\left[MV^2 + m_1 v_{1s}^2 + m_2 v_{2s}^2\right]
$$

Betrachten wir nun einen Stoß im Schwerpunktsystem. 2 Körper bewegen sich aufeinander zu, der Betrag ihres Impulses ist dabei der selbe. Nach dem Stoß bewegen sie sich in entgegengesetzter Richtung wieder auseinander, der Betrag ihres Impulses ist dabei abermals der selbe. Im Fall eines zentralen Stoß gilt ausserdem, dass sich bloß die Richtung der Impulse umkehrt

$$
\begin{aligned}
p_{1s} &= -p'_{1s} \quad (9) \\
v_{1s} &= -v'_{1s} \quad (10)
\end{aligned}
$$

2 Starrer Körper

2.1 Eigenschaften starrer Körper

Ein starrer Körper ist nun der Spezialfall eines Mehrteilchensystems, in dem die Teilchen alle ihre Abstände zueinander beibewaren. Da man in Problemen mit starren Körpern häufig Gegenstände wie Kreisel und Rollen betrachtet ist es praktisch, wenn man sich einen starren Körper als Grenzfall von vielen Punktmassen m_i vorstellt. Die Angabe von Massen m_i und Orten $\vec{r_i}$ wird dann ersetzt durch die Angabe einer Dichteverteilung $\rho(\vec{r}) = \frac{dm}{dV}$.

Andersherum kann man das Bild einer Dichteverteilung auch verwenden, um ein System aus diskreten Punktmassen zu beschreiben. Die zugehörige Dichte ist dann

$$\rho(\vec{r}) = \sum_i \rho_i(\vec{r}) \tag{11}$$

Eine Masseverteilung besitzt

- eine Masse:

$$M = \int_V dV \rho(\vec{r}) \tag{12}$$

- einen *Schwerpunkt*:

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \int_V dV \rho(\vec{r})\vec{r} \tag{13}$$

- und einen Trägheitstensor I, bzw. drei Hauptträgheitsmomente I_1,I_2,I_3. Dieser wird später diskutiert werden, wenn sein Zweck deutlich geworden ist.

Jede Bewegung eines starren Körpers lässt sich zerlegen in eine **Bewegung des Schwerpunktes** und eine **Drehung um den Schwerpunkt**, dass heisst für jeden im Körper fixierten Ortsvektor $\vec{r_i}$ gilt:

$$\dot{\vec{r_i}} = \dot{\vec{R}} + \omega \times (\vec{r_i} - \vec{R}) \tag{14}$$

Diese Gleichung vereinfacht sich im skalaren Fall zu der wichtigen Formel

$$v = \omega r \tag{15}$$

Dabei ist $\vec{\omega}$ ein Vektor, der in die Richtung der Drehachse zeigt und den Betrag der Winkelgeschwindigkeit ω besitzt. Dabei muss die Orentierung nach der Rechte-Hand-Regel beachtet werden: Zeigt der Daumen der rechten Hand in die Richtung des Vektors, erfolgt die Drehung im Sinn in dem sich die Finger der rechten Hand krümmen.
Ein starrer Körper kann also verschoben und gedreht werden, aber nicht gedehnt, gestaucht, gebogen, verdreht oder gespalten. Durch die Wahl von $\vec{R}$ und $\vec{\omega}$ hat er also $3 + 3 = 6$ Freiheitsgrade der Bewegung.

Der **Drehimpuls** ist definiert als

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Wenn der Drehimpuls skalar bestimmt werden soll, so ist darauf zu achten, dass der Impuls p mit der senkrechten Komponente des Weges $r_\perp$ multipliziert wird. Auch ein einzelnes linear bewegtes Teilchen (Impuls p) hat bzgl. eines festen Bezugspunkts einen Drehimpuls $L = p \cdot d$, wobei d der Abstand zwischen Bezugspunkt und Bahnkurve ist. Wirken keine äußeren Kräfte bzw. Drehmomente so gilt der Drehimpulserhaltungssatz, d.h.der Drehimpuls bleibt zeitlich konstant.

2.2 Trägheitsmomente

Der Schwerpunktsdrehimpuls hängt mit der Winkelgeschwindigkeit linear zusammen:

$$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}$$

Ein linearer Zusammenhang zwischen Vektoren bedeutet, dass I eine Matrix (ein Tensor zweiter Stufe) ist, der sogenannte Trägheitstensor. Im allgemeinen fälllt daher die Richtung des Drehimpulses nicht mit der Drehachse überein. Dies heisst jedoch nicht, dass erst $3 \cdot 3 = 9$ Werte die Trägheit bestimmen! Für jeden Körper lassen sich nämlich drei sogenannte Hauptträgheitsachsen angeben, so dass eine Drehung in dieser Richtung tatsächlich einen parallen Drehimpuls hervorruft. Anders ausgedrückt ist der Trägheitstensor in der Basis dieser Achsen diagonal. Meistens werden diese sehr leicht zu finden sein; eine zylindersymmetrische Massenverteilung hat zum Beispiel bereits die z-Achse als Hauptträgheitsachse. Symmetrieachsen sind also immer Hauptträgheitsachsen. Definiert ist der **Trägheitstensor** in Schwerpunktskoordinaten wie folgt:

$$I_{ij} = \int_V dV \rho(\vec{r})(\delta_{ij} r^2 - x_i x_j)$$

Weil man den Körper aber zum Beispiel in seiner Drehachse fixieren kann oder die Hauptträgheitsachsen gefunden hat, ist die folgende Formel hilfreicher (und anschaulicher), mit der man das **Trägheitsmoment** der Drehung um eine bestimmte Achse erhält:

$$I = \sum_i m_i r^2 \tag{16}$$

Dabei ist r der Abstand zur Achse und m_i die einzelnen Massepunkte des starren Körpers. Anschaulich beschreibt das Trägheitsmoment um eine Achse, dass sich einzelne Massepunkte in der Rotation umso mehr auswirken, je weiter sie von der Drehachse entfernt sind.

Die **kinetische Energie eines rotierenden Körpers** mit fester Achse ist

$$E_{kin} = \frac{I}{2}\omega^2 \tag{17}$$

Für allgemeine Rotationsachsen ist dies

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{x}z \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

Hat man drei Hauptträgheitsachsen a,b,c gefunden und ω in die neue Basis umgewandelt, ergibt sich

$$\begin{aligned} E_{kin} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \omega_a & \omega_b & \omega_c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_{aa} & 0 & 0 \\ 0 & I_{bb} & 0 \\ 0 & 0 & I_{cc} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_a \\ \omega_b \\ \omega_c \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} I_{aa}\omega_a^2 + \frac{1}{2} I_{bb}\omega_b^2 + \frac{1}{2} I_{cc}\omega_c^2 \end{aligned}$$

2.3 Satz von Steiner

Geht die Achse nicht durch den Schwerpunkt, sondern hat von ihr die Entfernung d, so erhält man das Trägheitsmoment I' aus dem Trägheitsmoment I für eine parallele Achse durch den Schwerpunkt und der Gesamtmasse M nach dem **Satz von Steiner** durch

$$I' = I + Md^2 \tag{18}$$

Kennt man das Trägheitsmoment eines Körpers für die Rotation um eine Achse in bestimmtem Abstand zum Schwerpunkt, kann man durch doppeltes Anwenden des Satzes von Steiner die Trägheitsmomente für jede dazu parallele Achse bestimmen!

2.4 Dynamik starrer Körper

Damit sich ein Körper aber überhaupt bewegt, müssen allgemein Kräfte wirken. Sind davon mehrere vorhanden, konnte man sie für eine Punktmasse einfach addieren. Bei einem starren, ausgedehnten Körper macht sich jedoch bemerkbar, dass der Angriffspunkt wichtig ist. Deshalb gelten folgende Regeln zur Kombination von zwei Kräften:

- Der Angriffspunkt einer Kraft darf in Richtung der Kraft verschoben werden. Die Menge der so äquivalenten Angriffspunkte heisst Wirklinie. Man verschiebt die Angriffspunkte der zwei Kräfte also zum Schnittpunkt ihrer Wirklinien. Ist dieser nicht vorhanden, (in 2D müssen sie dazu parallel sein, in 3D ist das viel leichter möglich), kann man die Kräfte nicht kombinieren, sondern nur später ihre Wirkungen auf den Körper.
- In einem gemeinsamen Angriffspunkt addieren sich die Kräfte dann wie bekannt.
- Eine weitere Verschiebung der Wirklinie kann zum Schluss noch hilfreich sein; vielleicht hat die Konstruktion vorher ja den Angriffspunkt ausserhalb des Körpervolumens gebracht.

Wie wirkt eine $\vec{F}$ im Angriffspunkt $\vec{r}$ relativ zum Schwerpunkt auf den Körper?

- Zuerst kann sie allein als Kraft auf den Schwerpunkt verstanden werden und ruft nach Newton 2 eine Beschleunigung $M\ddot{\vec{R}} = \vec{F}$ hervor.
- Zweitens erzeugt sie auch ein **Drehmoment**

$$\vec{D} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{19}$$

Verschiebt man den Angriffspunkt und damit den Verbindungsvektor $\vec{r}$ in seiner eigenen Linie, ändert sich das Kreuzprodukt nicht!
Für statische Systeme muss immer die Gesamtkraft und das Gesamtdrehmoment Null ergeben.

- Das Drehmoment erzeugt wiederrum eine **Änderung des Drehimpulses**

$$\dot{\vec{L}} = \vec{D} = I \cdot \dot{\vec{\omega}} \tag{20}$$

Diese Gleichung kann als Analogon zu Newton 2 für die Drehbewegung aufgefasst werden, wobei der Impuls durch den Drehimpuls, die Kraft durch ein Drehmoment, die Geschwindigkeit durch eine Winkelgeschwindigkeit und die Masse durch den Trägheitstensor/das Trägheitsmoment ersetzt wurde.

2.5 Vergleich Translation-Rotation

Translation und Rotation hängen sehr eng miteinander zusammen. In Diagramm 1 sieht man sehr schön das Analogon der beiden. Es ist sehr hilfreich sich diese Zusammenhänge einzuprägen.

2.6 Rollbewegungen

Ein häufiges Problem ist die Beschreibung eines starren, zylindersymmetrischen Körpers, der unter Einfluss einer äusseren Kraft auf einer Unterlage rollt. Dabei liegt er

Translation		Rotation	
Größe	**Definition**	**Größe**	**Definition**
Ort	x	**Winkel**	φ
Geschwindigkeit	$v = \frac{dx}{dt}$	**Winkelgeschwindigkeit**	$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$
Impuls	$p = m \cdot v$	**Drehimpuls**	$L = I \cdot \omega$
Masse	**m**	**Trägheitsmoment**	$I = \rho \int_V r^2 dV$
Kinetische Energie	$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2$	**Rotationsenergie**	$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I \omega^2$
Beschleunigung	$\frac{d^2x}{dt^2}$	**Winkelbeschleunigung**	$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$
Kraft	$F = m\frac{d^2x}{dt^2}$	**Drehmoment**	$M = I\frac{d^2\varphi}{dt^2}$

Abbildung 1: Vergleich Translation-Rotation

in der konstanten Entfernung r (seinem Radius) auf der Oberfläche auf, sein Schwerpunkt bewegt sich mit der Geschwindigkeit V parallel zur Oberfläche. Er dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω um seine Symmetrieachse, die parallel zur Oberfläche und senkrecht zur Rollrichtung liegt. Rollen, ohne zu rutschen, wird beschrieben durch die **Rollbedingung**

$$v = \omega r \tag{21}$$

Kurze Rechtfertigung dieser: Vollführt der Körper in der Zeit T eine ganze Umdrehung, bewegt sich der Schwerpunkt um den Umfang des Rollkreises weiter: $Tv = 2\pi R = TR\frac{2\pi}{T} = T\omega R$.

Der rollende Körper ist ein Spezialfall eines Rotators mit bewegtem Schwerpunkt und fixierter Drehachse; allerdings ist hierbei nur die Kraft auf den Schwerpunkt des Körpers von Interesse, das Drehmoment ergibt sich automatisch aus der Rollbedingung. Physikalisch ist es die Reibung zwischen Körper und Oberfläche, die mit dem **Reibungskoeffizienten** μ und der Normalkraft senkrecht zur Fläche auf den Auflagepunkt (zum Beispiel durch das Gewicht des Körpers) eine **Schwellkraft**

$$F_R = \mu F_N$$

bestimmt; solange die Kraft, mit der der Auflagepunkt normalerweise über die Oberfläche gezogen werden würde diese nicht überschreitet, rollt der Körper. Vorsicht: Dies ist zu unterscheiden von der **Rollreibung**, welche für die Abbremsung eines rollenden Körpers verantwortlich ist.

Die **kinetische Energie eines rollenden Körpers** kann mit der Rollbedingung wie folgt angegeben werden:

$$E = E_{SP} + E_{rot} = \frac{M}{2}v^2 + \frac{I}{2}\omega^2 = \frac{\frac{I}{r^2} + M}{2}v^2 = \frac{I + Mr^2}{2}\omega^2 \tag{22}$$