Ferienkurs Experimentalphysik 1

Vorlesung 1

Klassische Mechanik des Massenpunktes, Bezugssysteme

28.03.2011

Inhaltsverzeichnis

1 Klassische Mechanik des Massenpunktes

1.1 Kinematik

Unter Vernachlässigung seiner Ausdehnung werden Objekte in der klassischen Mechanik oft als Massenpunkte idealisiert, d.h. die Gesamtmasse vereinigt sich im Schwerpunkt und die räumliche Ausdehnung hat keinen Einfluss auf die Bewegung des Objekts. (z.b. Billardkugeln, Planenten im Orbit,...). Die Position des Objektes wird im kartesischen Koordinatensystem mit dem Ortsvektor

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \tag{1}$$

beschrieben. Je nach Problemstellung sollte man das am besten geeignete Koordinatensystem wählen, neben den kartesischen könnten das z.b. Polar-, Zylinder- oder Kugelkoordinaten sein. Bei der Fallbewegung beispielsweise sollte man eine der kartesischen Achsen in Richtung der Bewegung wählen.

Durch ableiten des Ortsvektors $\vec{r}(t)$ nach der Zeit erhält man die Geschwindigkeit des Objektes, also

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} \tag{2}$$

und durch abermaliges Ableiten nach t die Beschleunigung

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \ddot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{pmatrix} \tag{3}$$

Für eindimensionale Bewegungen (z.b. Senkrechter Fall) kann statt mit Vektoren, mit Skalaren gerechnet werden, also $r(t)$, $v(t)$ und $a(t)$.

Um aus der Beschleunigung die Geschwindigkeit zu erhalten wird $\vec{a}(t)$ komponentenweise über den Zeitraum t integriert

$$\vec{v}(t) - \vec{v}(0) = \int\limits_0^t \mathrm{d}t'\,\vec{a}(t') \tag{4}$$

ebenso verfährt um den Ortsvektor aus der Geschwindigkeit zu ermitteln

$$\vec{r}(t) - \vec{r}(0) = \int\limits_0^t \mathrm{d}t'\,\vec{v}(t') \tag{5}$$

Bewegung mit konstanter Beschleunigung

Bei konstanter Beschleunigung in x-Richtung ($a_x = \text{const.}$) folgt aus (4)

$$v_x(t) = v_x(0) + \int\limits_0^t \mathrm{d}t'\, a_x = v_x(0) + a_x t \tag{6}$$

und mit (5)

$$x(t) = x(0) + \int\limits_0^t \mathrm{d}t'\, (v_x(0) + a_x t') = x(0) + v_x(0)t + \frac{1}{2}a_x t^2 \tag{7}$$

Da dies analog auch für die anderen Komponenten gilt, erhält man mit

$$\begin{pmatrix} v_x(0) \\ v_y(0) \\ v_z(0) \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} v_{0x} \\ v_{0y} \\ v_{0z} \end{pmatrix} =: \vec{v}_0 \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} =: \vec{r}_0$$

die allgemeine Form der Bewegungsgleichungen für nicht konstante Beschleunigung

$$\boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot t + \frac{1}{2}\vec{a} \cdot t^2} \tag{8}$$

$$\boxed{\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t} \tag{9}$$

Eliminiert man t aus diesen beiden Gleichungen, erhält man

$$\vec{v}^2 = \vec{v}_0^{\,2} + 2\vec{a}(\vec{r} - \vec{r}_0) \tag{10}$$

Diese Formel kann sehr nützlich sein, wenn man keine Zeitangabe hat. Für $v_0 = 0$ ergib sich in einer Raumrichtung (analog für andere Richtungen):

$$v = \sqrt{2a(r - r_0)} \tag{11}$$

Kreisbewegungen

Wir beschreiben nun die Bewegung eines Massenpunktes auf einer Kreisbahn. Dazu wechseln wir in Polarkoordinaten

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\phi(t)) \\ r \cdot \sin(\phi(t)) \end{pmatrix} \tag{12}$$

r bezeichnet den konstanten Radius und $\phi(t)$ ist der zeitabhängige Winkel zwischen x-Achse und der Verbindungslinie Koordinatenursprung-Massenpunkt. Die Winkelgeschwindigkeit (oft auch als Kreisfrequenz bezeichnet) ω ist die zeitliche Ableitung des Winkels $\phi(t)$

$$\omega = \frac{d\phi(t)}{dt} = 2\pi f = \frac{v}{r} \tag{13}$$

hierbei bezeichnet $f = \frac{1}{T}$ die Frequenz. T ist jene Zeit, die der Massenpunkt für eine Kreisbewegung benötigt. v bezeichnet die tangentiale Geschwindigkeit (oder auch Bahngeschwindigkeit). Sie ändert ständig ihre Richtung, während ihr Betrag gleich bleibt. Verantwortlich für diese Richtungsänderung ist die Zentripetalbeschleunigung

$$a_Z = \omega^2 \cdot r = \frac{v^2}{r} \tag{14}$$

Sie steht senkrecht zum Tangentialvektor und zeigt immer zum Kreismittelpunkt. Vektoriell gelten folgende Zusammenhänge zwischen Bahngeschwindigkeit v, Winkelgeschwindigkeit ω und Zentripetalbeschleunigung a_Z:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \tag{15}$$

$$\vec{\omega} = \frac{1}{r^2}(\vec{r} \times \vec{v}) \tag{16}$$

$$\vec{a}_Z = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \tag{17}$$

Hieraus ist ersichtlich, dass der Vektor der Winkelgeschwindkeit senkrecht zur Bewegungsebene steht, er bildet mit dem Ortsvektor $\vec{r}$ und der Tangentialgeschwindigkeit $\vec{v}$ ein rechtshändiges System.

Wird der Massenpunkt beschleunigt so kommt zusätzlich zur Zentripetalbeschleunigung noch eine tangentiale Beschleunigung α hinzu. Ist diese konstant so gilt für Winkelgeschwindigkeit $\omega(t)$ und Winkel $\phi(t)$

$$\omega(t) = \alpha \cdot t + \omega_0 \tag{18}$$

$$\phi(t) = \frac{1}{2}\alpha \cdot t^2 + \omega_0 \cdot t + \phi_0 \tag{19}$$

1.2 Kräfte

Bisher haben wir uns mit Bewegungsabläufen beschäftigt ohne zu hinterfragen, wie diese eigentlich zustandekommen. Es sind Kräfte die Objekte bzw. im idealiserten Fall Massenpunkte dazu zwingen bestimmte Bewegungen auszuführen. Der Begriff der Kraft lässt gut mit den 3 newton'schen Axiom beschreiben:

1. Ein Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmig-geradlinigen Bewegung, solange keine Kräfte auf ihn wirken. Der Impuls $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ und somit auch die Geschwindigkeit $\vec{v}$ bleiben also konstant, solange keine Kräfte auf den Körper wirken oder sich alle beteiligten Kräfte gegenseitig aufheben.
2. Die Beschleunigung eines Körpers mit konstanter Masse ist proportional zur Kraft, welche auf den Körper wirkt, also
$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \tag{20}$$
3. Die Kraft welche ein Körper auf einen anderen Körper ausübt (actio) ist stets entgegengesetzt gleich jener Kraft welche der andere Körper auf den einen ausübt (reactio), also
$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \tag{21}$$

Für alle Kräfte (wie auch für Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung) gilt das Superpositionsprinzip, d.h. Kräfte dürfen in ihre einzelnen Komponenten zerlegt und getrennt behandelt werden. Mittels Vektoraddition kann die Gesamtkraft ermittelt werden, verschwindet diese, so ist das System im Kräftegleichgewicht.

Gravitationskraft

Die Wechselwirkung zwischen zwei Massenpunkten mit den Massen m_1 und m_2 wird beschrieben durch die Gravitationskraft

$$\vec{F}_G = -\frac{G m_1 m_2}{r^2} \hat{r} \tag{22}$$

hierbei bezeichnet $G = 6.674 \cdot 10^{-11}$ m^3/kg s^2 die Gravitationskonstante und $\hat{r}$ den Einheitsvektor in Verbindungsrichtung, d.h. die Gravitationskraft wirkt immer in Richtung der Verbindungslinie der beiden Massen. Im Schwerefeld der Erde kann r näherungsweise mit dem Erdradius gleichgesetzt werden und es folgt

$$F_G = -m \cdot g \tag{23}$$

wobei $g = G \cdot M_{Erde}/r_{Erde}^2 = 9.81$ m/s^2 die Erdbeschleunigung ist.

Zentripetalkraft

Bei der gleichmäßigen Kreisbewegung ist wie bereits besprochen eine Zentripetalbeschleunigung notwenig, um einen Körper auf einer Kreisbahn zu halten. Mit dem 2. Axiom ergibt sich die so genannte Zentripetalkraft

$$F_Z = m \cdot a_Z = m \cdot \frac{v^2}{r} = m \cdot \omega^2 \cdot r \tag{24}$$

F_Z zeigt ebenso wie a_Z immer zum Kreismittelpunkt.

Normalkraft

Übt ein Körper eine Kraft senkrecht zu einer Oberfläche auf diese aus, so bezeichnet die Normalkraft jene Kraft, welche die Oberfläche auf den Körper ausübt (actio=reactio). Die Normalkraft steht somit immer senkrecht auf der Oberfläche.

Reibungskraft

Übt ein Körper eine Kraft tangential zu einer Oberfläche auf diese aus, so bezeichnet die Reibungskraft die Gegenkraft welche die Oberfläche auf den Körper ausübt. Man unterscheidet zwischen Haftreibung und Gleitreibung, dies drückt sich durch unterschiedliche Reibungskoeffizienten μ_H bzw. μ_G aus, es gilt

$$F_{R,H} = \mu_H \cdot F_N \quad \text{und} \quad F_{R,G} = \mu_G \cdot F_N \tag{25}$$

wobei F_N die Normalkraft bezeichnet.

Übt ein Körper eine Kraft in beliebiger Richtung auf eine Oberfläche aus, so kann die Gegenkraft immer in Normalkraft und Reibungskraft zerlegt werden.

1.3 Arbeit, Energie, Leistung

Arbeit

Kann jedem Ort $\vec{r}$ eine Kraft zugeordnet werden so spricht man von einem Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$. Legt ein Körper in diesem Kraftfeld die infinitesimale Wegstrecke $d\vec{r}$ zurück so wird an ihm die mechanische Arbeit $dW = \vec{F}(\vec{r})d\vec{r}$ verrichtet. Integriert man nun über dW so erhält man die Gesamtarbeit die entlang des Weges γ von A nach B verrichtet wurde

$$W = \int_\gamma \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \tag{26}$$

Ist die Kraft konstant und der Weg geradling so vereinfacht sich (26) zu

$$W = \vec{F} \cdot \vec{r} \tag{27}$$

Hieraus sieht man, dass Kräfte die senkrecht auf $\vec{r}$ stehen keine Arbeit verrichten.

Potentielle Energie

Für *konservative* Kraftfelder (z.b. Gravitationsfeld) gilt, dass die durch das Bewegen des Körpers verrichtete Arbeit in potentieller Energie gespeichert wird. Die zwischen A und B verrichtete Arbeit ist gleich der Energiedifferenz zwischen A und B

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\Delta E_{pot} = E_{A,pot} - E_{B,pot} \tag{28}$$

Dieses Integral ist bei konservativen Kraftfelder wegunabhängig, es genügt also die potentielle Energie bei Start- bzw. Endpunkt zu kennen. Entlang eines geschlossenen Weges wird keine Arbeit verrichtet, es gilt also $E_{A,pot} = E_{B,pot}$. Wenn $W < 0$ wird dem Körper Energie zugeführt. Eine absolute Angabe der potentiellen Energie ohne Bezugspunkt ist nicht möglich. Betrachten wir als Beispiel einen Stein, den wir von Höhe h_1 auf h_2 heben möchten, so ergibt sich eine Potentialdifferenz von

$$\Delta E_{pot} = -\int_{h_1}^{h_2} (-m \cdot g) dz = m \cdot g \cdot h_2 - m \cdot g \cdot h_2 = m \cdot g(h_2 - h_1)$$

Setzt man den Bezugspunkt (also dort wo $E_pot = 0$) auf die Erdoberfläche so besitzt ein Körper der Masse m im Abstand h von der Erdoberfläche die potentielle Energie

$$\boxed{E_{pot} = m \cdot g \cdot h} \tag{29}$$

Kinetische Energie

Betrachten wir nun einen Körper der mit der Kraft $\vec{F}$ von A nach B beschleunigt werden soll, um dies zu ermöglichen ist die Arbeit

$$W = \int_A^B (m \cdot \vec{a}) \cdot d\vec{r} = m \int_A^B \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = m \int_{v_A}^{v_B} \vec{v} \cdot d\vec{v} = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2$$

aufzuwenden. Wird ein Körper von $v = 0$ auf v beschleunigt besitzt er die kinetische Energie also

$$\boxed{E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2} \tag{30}$$

Energieerhaltung

In einem nach außen abgeschlossenen System gilt allgemein stets die Erhaltung der Gesamtenergie

$$E_{1,kin} + E_{1,pot} = E_{2,kin} + E_{2,pot} + Q \tag{31}$$

dabei bezeichnet Q jene Energie die während des Prozesses in Wärme umgewandelt wurde (z.b. durch Reibungsverlust). Für konservative Kraftfelder (keine Reibungsverluste) gilt die Erhaltung der Summe aus potentieller und kinetischer Energie

$$E_{1,kin} + E_{1,pot} = E_{2,kin} + E_{2,pot} \tag{32}$$

Leistung

Leistung ist definiert als jene Arbeit die pro Zeiteinheit verrichtet wird, sie berechnet sich aus der zeitlichen Ableitung der Arbeit

$$\boxed{P = \frac{dW}{dt}} \tag{33}$$

1.4 Drehmoment, Drehimpuls

Der Drehimpuls einer Masse die sich auf einer beliebigen Bahn bewegt ist definiert als Kreuzprodukt zwischen Ort und Impuls, also

$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m \cdot (\vec{r} \times \vec{v})} \tag{34}$$

In Polarkoordinaten ist der Betrag des Drehimpulses gegeben durch

$$|\vec{L}| = mr^2\dot{\phi} = mr^2\omega \tag{35}$$

Das Drehmoment ist die zeitliche Ableitung des Drehimpluses

$$\boxed{\vec{D} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) \times \vec{p} + \vec{r} \times \left(\frac{d\vec{p}}{dt}\right) = \vec{r} \times \vec{F}} \tag{36}$$

dabei wurde benutzt das $\vec{v}$ und $\vec{p}$ in die gleiche Richtung zeigen und somit ihr Kreuzprodukt verschwindet.

1.5 Gravitation, Planetenbewegungen

Um Planetenbewegungen zu beschreiben benutzt man die 3 Keplerschen Gesetze, diese sind

1. Die Planeten bewegen sich auf elliptischen Bahnen. Im Brennpunkt der Ellipse liegt die Sonne
2. In gleichen Zeiten überstreicht die Verbindungslinie zwischen Sonne und Planeten gleiche Flächen
3. Die Quadrate der Umlaufzeiten verhalten sich wie die dritten Potenzen der großen Halbachse der elliptischen Bahn, also

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{ const. (für alle Planeten)}$$

Aus diesen 3 Gesetzen lassen sich die Abhängigkeiten der Gravitationskraft herleiten, der Wert der Gravitationskonstante G muss allerdings experimentell bestimmt werden.

2 Bezugssysteme

In vielen Fällen kann die Wahl des richtigen Bezugssystems den Rechenweg einer Aufgabe erheblich vereinfachen. Beim Stoß zweier Teilchen (siehe Vorlesung Dienstag) beispielsweise ist es oft sinnvoll im Schwerpunktsystem (welches ein sich mit bestimmter Geschwindigkeit relativ zum ruhenden System bewegendes Bezugsystem darstellt) zu rechnen.

2.1 Galilei-Transformation

In weiterer Folge werden für das ruhende System ungestrichene Koordinaten und für das sich mit einer Geschwindigkeit $\vec{u}$ bewegende System gestrichene Koordinaten verwendet. Die Galilei-Transformationen lauten dann wie folgt:

$$\vec{r'}(t) = \vec{r}(t) - \vec{u}(t) \cdot t \tag{37}$$

$$\vec{v'}(t) = \vec{v}(t) - \vec{u}(t) \cdot t \tag{38}$$

Beschleunigung, Kraft und Zeit sind in beiden Bezugsystemen gleich, es galten also die gleichen physikalischen Gesetze. Diese Beziehungen sind nur dann gültig, wenn u sehr viel kleiner als die Lichtgeschwindigkeit c (hier gilt die Faustregel $u < 0.1c$). Andernfalls ist relativistisch (Lorentz-Transformation) zu rechnen.

2.2 Beschleunigte Bezugssysteme

Bei beschleunigten Bezugssystemen gilt obige Behauptung das Kräfte in beiden Bezugssystemen gleich ist, nicht mehr. Würde man das ignorieren, käme man auf unterschiedliche Naturgesetze, durch Einführung so genannter Scheinkräfte läßt sich dies allerdings kompensieren.

Geradlinig beschleunigte Bezugssysteme

Das ruhende System sei abermals das ungestrichene und das mit $\vec{\xi}$ (= const.) beschleunigte sei das gestrichene System, dann gilt

$$\vec{a'} = \vec{a} - \vec{\xi} \tag{39}$$

Wenn nun $\vec{a} = 0$ also eine nicht beschleunigte Bewegung (im Ruhesystem), dann gilt für Kräfte im gestrichenen System

$$F = m\vec{a'} = -m\vec{\xi}$$

es wirkt also eine Kraft, welche im ruhenden System gar nicht existiert, also eine Scheinkraft, man nennte diese Kraft Trägheitskraft.

rotierende Bezugssysteme

Nun betrachten wir ein sich mit $\vec{\omega}$ gleichmäßig rotierendes Bezugssystem, welches den selben Ursprung wie das ruhende besitzt. Wenn $\vec{r}$ bzw. $\vec{v}$ Ort bzw. Bahngeschwindigkeit im ungestrichenen (ruhenden) System und $\vec{v'}$ die Bahngeschwindigkeit im gestrichenen (mit $\vec{\omega}$ rotierenden System) dann gilt

$$\vec{v'} = \vec{v} - \vec{\omega} \times \vec{r} \tag{40}$$

Für die Beschleunigung gilt folgendes

$$\vec{a'} = \vec{a} - 2(\vec{\omega} \times \vec{v'}) - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r'}) \tag{41}$$

also ist die Kraft, die ein Beobachter im gestrichenen System misst

$$\vec{F} = m\vec{a'} = m\vec{a} - 2m(\vec{\omega} \times \vec{v'}) - m[\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r'})] \tag{42}$$

diese unterschiedet sich von jener Kraft, die ein Beobachter im ruhenden System misst. Bei den zusätzlichen Kräften handelt es sich um die Corioliskraft $\vec{F}_C = -2m(\vec{\omega} \times \vec{v'})$ und die Zentrifugalkraft $\vec{F}_{Zf} = -m[\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r'})] = -\vec{F}_Z$