Lösungsvorschlag 5

1) Anfangswertproblem

$$\dot{y} = t\,y^2 \qquad y(0) = y_0 \in \mathbb{R}$$

1. Fall $y_0 = 0$ Dann ist aus der Dgl $\dot{y}(0) = 0$
und $y(t) \equiv 0$ ist die eindeutige Lösung der Dgl.

2. Fall $y_0 \neq 0$ Lösung mit Trennung der Variablen.

$$\frac{\dot{y}}{y^2} = t$$

Integration beider Seiten

$$\int_0^t dt' \, \frac{\dot{y}(t')}{y(t')^2} = \int_0^t dt' \, t' \qquad \text{mit Substitution}$$

$$\int_{y(0)}^{y(t)} d\tilde{y} \, \frac{1}{\tilde{y}^2} = \frac{1}{2} t^2 = \left(-\frac{1}{\tilde{y}} \right) \Bigg|_{y(0)}^{y(t)} = -\frac{1}{y(t)} + \frac{1}{y(0)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{y(t)} = \frac{1}{y(0)} - \frac{1}{2} t^2 = \frac{1}{y_0} - \frac{1}{2} t^2$$

$$y(t) = \frac{1}{\frac{1}{y_0} - \frac{1}{2} t^2} \qquad \text{löst das Anfangswertproblem.}$$

2) Lösung der Dgl gesucht

a) $\ddot{x} + x = 0$ Ansatz $e^{\lambda t} = x$ $\dot{x} = \lambda e^{\lambda t}$ $\ddot{x} = \lambda^2 e^{\lambda t}$

$(\lambda^2 + 1) e^{\lambda t} = 0$ charakteristisches Polynom: $\lambda^2 + 1 = 0$

hat keine reellen Nullstellen, also zwei komplexe, zueinander konjugierte $\lambda_{1,2} = \pm i$

Fundamentalsystem $\{e^{it}, e^{-it}\}$ oder $\frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}), \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it})$

$\{\cos t, \sin t\}$

b) $\ddot{x} - x = 0$ Ansatz $e^{\lambda t}$,

$\lambda^2 - 1 = 0$ charakteristisches Polynom

$\lambda = \pm 1$ zwei reelle Nullstellen

Fundamentalsystem $\{e^{-t}, e^{+t}\}$

c) $\dddot{x} + \ddot{x} - \dot{x} - x = 0$ Ansatz $e^{\lambda t}$

$\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ charakteristisches Polynom

$\lambda_1 = 1$ ist Nullstelle, Polynomdivision $(\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1) : (\lambda - 1) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2$

$$
\begin{array}{l}
\lambda^3 - \lambda^2 \\
\hline
2\lambda^2 - \lambda - 1 \\
2\lambda^2 - 2\lambda \\
\hline
\lambda - 1
\end{array}
$$

$(\lambda - 1)(\lambda + 1)^2$

$\lambda_2 = -1$ ist Nullstelle, also 2fach entartet.

$\{e^t, e^{-t}\}$ ist also noch kein Fundamentalsystem: Beim Anfangswertproblem der Dgl 3. Ordnung sind $x(0), \dot{x}(0), \ddot{x}(0)$ und damit 3 Bedingungen vorgegeben, also der Ansatz $x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$ hat nur 2 Konstanten!

Eine Lösung fehlt!

Schreibe Dgl in Operatorschreibweise

$$\left(\left(\frac{d}{dt}\right)^3 + \left(\frac{d}{dt}\right)^2 - \frac{d}{dt} - 1\right) x = 0$$

und drücke das mit Hilfe der Nullstellen des charakteristischen Polynoms als Produkt von Differentialoperatoren aus:

$$\left(\frac{d}{dt} - 1\right)\left(\frac{d}{dt} + 1\right)^2 x = 0$$

Beobachtung: $\left.\begin{array}{l}\left(\frac{d}{dt} - 1\right) e^t = e^t - e^t = 0 \\ \left(\frac{d}{dt} + 1\right) e^{-t} = -e^{-t} + e^{-t} = 0\end{array}\right\} \Rightarrow$ Differentialoperatoren $\left(\frac{d}{dt} - \lambda\right)$ eliminieren Lösung $e^{\lambda t}$

Idee jetzt: Kann man das Fundamentalsystem vervollständigen, indem man eine Lösung findet, die von $\left(\frac{d}{dt}+1\right)$ nicht, wohl aber von $\left(\frac{d}{dt}+1\right)^2$ eliminiert wird?

Ansatz $t e^{-t}$

$$\left(\frac{d}{dt} + 1\right) t e^{-t} = e^{-t} + t(-e^{-t}) + t e^{-t} = e^{-t}$$

$$\left(\frac{d}{dt} + 1\right)^2 t e^{-t} = \left(\frac{d}{dt} + 1\right) e^{-t} = 0 \qquad \text{o.k.}$$

D.h. $t e^{-t}$ löst auch die Dgl und ist damit die fehlende Basisfunktion, die unser Fundamentalsystem vervollständigt:

$\{e^{-t}, t e^{-t}, e^t\}$. Dann hat der allgemeine Ansatz

$x(t) = c_{11} e^{-t} + c_{12} t e^{-t} + c_2 e^t$ drei Konstanten, die eindeutig aus den drei Anfangsbedingungen $x(0), \dot{x}(0), \ddot{x}(0)$ des Anfangswertproblems bestimmt werden können

d) $\ddot{x} - 10\dot{x} + 25x = 0$

$\lambda^2 - 10\lambda + 25 = 0$ charakteristisches Polynom.

$(\lambda - 5)^2 = 0$ $\lambda = 5$ ist doppelt entartete Nullstelle

Fundamentalsystem ist damit

$$\{e^{5t}, te^{5t}\}$$ und allgemeiner Lösungsansatz

$x(t) = c_1 e^{5t} + c_2 t e^{5t}$ hat zwei Konstanten, die an die beiden Anfangsbedingungen $x(0)$, $\dot{x}(0)$ des Anfangswertproblems mit Dgl zweiter Ordnung angepasst werden können.

e) $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$

$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0$ charakteristisches Polynom

$\lambda = -1$ ist Nullstelle $(\lambda+1)^3 = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1$ dreifach entartet.

Daher ist das Fundamentalsystem

$$\{e^{-x}, xe^{-x}, x^2 e^{-x}\}$$

(3 Basisfunktionen für Dgl 3. Ordnung, mit 3 Bedingungen im Anfangswertproblem).

3) Dgl $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad \gamma, \omega_0 \in \mathbb{R}, \; \omega_0 > \gamma$

Umschreiben in Dgl 1. Ordnung

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} \quad \dot{\vec{v}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} \dot{x} &= \dot{x} \\ \ddot{x} &= -2\gamma\dot{x} - \omega^2 x \end{aligned}$$

$$\dot{\vec{v}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ -\omega_0^2 x - 2\gamma\dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}$$

Lösung also über charakteristisches Polynom der Dgl 2. Ordn.

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \left(\gamma^2 - \omega_0^2\right)^{1/2} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \quad \text{da } \omega_0 > \gamma$$

$$= -\gamma \pm i\omega$$

Fundamentalsystem ist $\{ e^{-\gamma t} e^{i\omega t}, e^{-\gamma t} e^{-i\omega t} \}$

oder (reell) $\{ e^{-\gamma t} \cos\omega t, e^{-\gamma t} \sin\omega t \}$

Inhomogene Gleichung mit $f(t) = e^{imt}$ m

Hier: $f(t)$ hat die gleiche Form wie die Basisfunktionen des Fundamentalsystems, daher macht man Lösungsansatz

$$x_p(t) = A e^{imt} \quad \text{mit } A \in \mathbb{C}$$

nachdem man $A \in \mathbb{C}$ so bestimmt hat, dass es die inhomogene Gl. löst, bestimmt man mit der homogenen Lsg $x_h(t) = a e^{-\gamma t} \cos\omega t + b e^{-\gamma t} \sin\omega t$ die Konstanten a, b so, dass

$x_p(t) + x_h(t)$ die Anfangsbedingungen $\dot{x}(0), x(0)$ erfüllt.

4) Anfangswertproblem

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{b} \qquad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Zunächst Lösung des homogenen Problems. Formal ist die Lösung $\vec{x}(t) = \exp(tA)\,\vec{x}(0)$ mit der Matrixexponentialfunktion $\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \qquad A^0 = \mathbb{1}$

$$A = 2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2\,\mathbb{1}_2 + 2\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{1}_2^n = \mathbb{1}_2 \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ ist nilpotent.

$\mathbb{1}_2$ und $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ vertauschen (offensichtlich, da die Einheitsmatrix mit jeder Matrix vertauscht)

Dann können wir verwenden

$$\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B) \qquad (\text{wenn } AB = BA)$$

$$\exp(tA) = \exp\left(2t\,\mathbb{1}_2 + 2t\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \exp\left(2t\,\mathbb{1}_2\right)\exp\left(2t\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$= e^{2t}\,\mathbb{1}_2\left(\mathbb{1} + 2t\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$ (Reihe bricht ab wegen Nilpotenz der Matrix)

$$= \begin{pmatrix} e^{2t} & -2te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

Daher formale Lösung des homogenen Anfangswertproblems

$$\vec{x}(t) = \exp(tA)\,\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} e^{2t} & -2te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+2t)e^{2t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix}$$

Eine spezielle Lösung des inhomogenen Problems ist gegeben durch (aus "Variation der Konstanten")

$$\vec{x}_s(t) = \exp(tA)\int_0^t ds\, \exp(-sA)\, b(s)$$

Überprüfen, dass dies formal eine Lösung ist:

$$\dot{\vec{x}}_s(t) = A\exp(tA)\int_0^t ds\, \exp(-sA)\, b(s)$$

$$+ \exp(tA)\exp(-tA)\, b(t)$$

$$= A\vec{x}_s(t) + b(t) \quad \checkmark$$ erfüllt formal die inhomogene Dgl.

$$\exp(-sA) = \begin{pmatrix} e^{-2s} & +2se^{-2s} \\ 0 & e^{-2s} \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_s(t) = \exp(tA)\int_0^t ds \begin{pmatrix} e^{-2s} & +2se^{-2s} \\ 0 & e^{-2s} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \exp(tA)\int_0^t ds \begin{pmatrix} se^{-2s} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\int_0^t ds\, se^{-2s} = -\frac{1}{2}se^{-2s}\Big|_0^t + \int_0^t ds\,\frac{1}{2}e^{-2s} = -\frac{1}{2}te^{-2t} + \frac{1}{4}e^{-2s}\Big|_0^t =$$

$$= -\frac{1}{2}te^{-2t} - \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\left(1 - e^{-2t} + 2te^{-2t}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 - e^{-2t}(1+2t)\right)$$

$$\vec{x}_s(t) = \exp(tA)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\frac{1}{4}\left(1-e^{-2t}(1+2t)\right)$$

$$= \begin{pmatrix}e^{2t} & -2te^{2t}\\ 0 & e^{2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\frac{1}{4}\left(1-e^{-2t}(1+2t)\right)$$

$$= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\frac{1}{4}\left(e^{2t}-(1+2t)\right)$$

$\vec{x}_s(0) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\frac{1}{4}(1-1) = 0$ schon aufgrund der Konstruktion

(Ausdruck verschwindet, wenn die Integralgrenzen zusammenfallen).

Daher ändert $\vec{x}_s(0)$ die Anfangsbedingungen in diesem Fall nicht, und wir müssen sie nicht noch einmal bestimmen, sondern können direkt das Ergebnis des homogenen Falls übernehmen.

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_h(t) + x_s(t)$$

$$= \begin{pmatrix}(1+2t)e^{2t}\\ -e^{2t}\end{pmatrix} + \frac{1}{4}\left(e^{2t}-(1+2t)\right)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\left(\frac{5}{4}+2t\right)e^{2t}-\frac{1}{4}(1+2t)\\ -e^{2t}\end{pmatrix}$$

Anfangsbedingung überprüfen:

$$\vec{x}(0) = \begin{pmatrix}\frac{5}{4}-\frac{1}{4}\\ -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \quad \text{o.k.}$$