GEWÖHNLICHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

[A] Trennung der Variablen. Gegeben sei ein Anfangswertproblem mit $g: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t_0 \in I$ von der Form

$$\dot{y} = g(t)\,h(y) \qquad y(t_0) = y_0.$$

Sofern die folgenden Ausdrücke definiert sind, gilt dann

$$\frac{\dot{y}(t)}{h(y(t))} = g(t)$$

und damit kann das Anfangswertproblem durch direkte Integration gelöst werden

$$\int_{t_0}^{t} dt' \, \frac{\dot{y}(t')}{h(y(t'))} = \int_{t_0}^{t} dt' \, g(t')$$

$$= \int_{y(t_0)}^{y(t)} d\tilde{y} \, \frac{1}{h(\tilde{y})} = \int_{t_0}^{t} dt' \, g(t')$$

durch Substitution.

Ist dann H eine Stammfunktion von $\frac{1}{h}$ und G eine Stammfunktion von g, so gilt

$$H(y(t)) = H(y_0) + G(t) - G(t_0)$$

und es gibt eine explizite Lösung $y(t)$, wenn die Umkehrfunktion H^{-1} der Stammfunktion H existiert.

[2] Lineare Differentialgleichung 1. Ordnung

$$y'(t) - a(t)\,y(t) = f(t)$$

$f(t)$ heisst Inhomogenität der Gleichung, für $f(t) \equiv 0$ heisst die Gleichung homogen

Eine Lösung des homogenen Anfangswertproblems

$$y'(t) - a(t)\,y(t) = 0 \qquad y(t_0) = y_0$$

ist gegeben durch

$$y(t) = y_0 \exp\left(\int_{t_0}^{t} dt'\, a(t')\right) = y_0 \exp\left(A(t)\right)$$

wobei $A(t) = \int_{t_0}^{t} dt'\, a(t)$ Stammfunktion von $a(t)$ ist.

Überprüfen durch Nachrechnen: $y(t_0) = y_0 \exp\Big(\underbrace{\int_{t_0}^{t_0} dt'\, a(t')}_{=0}\Big)$

$$= y_0$$

$$y'(t) = a(t)\, y_0 \exp\left(\int_{t_0}^{t} dt'\, a(t')\right) = a(t)\, y(t)$$

$$y'(t) - a(t)\,y(t) = 0 \qquad \checkmark$$

Eine Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems

$$y'(t) - a(t)\,y(t) = f(t)$$

ist gegeben durch den Ausdruck

$$y(t) = y_0 \exp\left(\int_{t_0}^{t} dt' a(t) \right) + $$

$$+ e^{A(t)} \int_{t_0}^{t} ds\, f(s) e^{-A(s)}$$

$$= y_0 e^{A(t)} + e^{A(t)} \int_{t_0}^{t} ds\, f(s)\, e^{-A(s)}$$

mit $A(t) = \int_{t_0}^{t} dt'\, a(t')$

Verifikation durch Ableiten. $\qquad y(t_0) = y_0$

$$y'(t) = a(t) y_0 e^{A(t)} + a(t) e^{A(t)} \int_{t_0}^{t} ds\, f(s) e^{-A(s)}$$

$$+ e^{A(t)} f(t) e^{-A(t)}$$

$$= a(t) \left[y_0 e^{A(t)} + e^{A(t)} \int_{t_0}^{t} ds\, f(s)\, e^{-A(s)} \right] + f(t)$$

$$y'(t) - a(t) y(t) = a(t) y(t) + f(t) - a(t) y(t) = f(t) \quad \blacksquare$$

IV Gewöhnliche Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.

Eine homogene, lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten hat die Form

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}\, y^{(n-1)}(t) + a_{n-2}\, y^{(n-2)}(t) + \ldots$$
$$\ldots + a_1\, y'(t) + a_0\, y(t) = 0$$

Um ein Anfangswertproblem mit einer eindeutigen Lösung zu spezifizieren, muss man an einem t_0 n Bedingungen $y(t_0), y'(t_0), y''(t_0), \ldots, y^{(n-1)}(t_0)$ angeben. Die letzte Bedingung für $y^{(n)}(t_0)$ ergibt sich dann aus der Dgl an t_0.

Wir betrachten Dgl mit reellen Koeffizienten $a_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, \ldots, n-1$

Dann kann man eine Lösung finden mit dem Ansatz

$$y(t) = e^{\lambda t}$$
$$y'(t) = \lambda e^{\lambda t}$$
$$y^{(n)}(t) = \lambda^n e^{\lambda t}$$

Das führt auf

$$(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \ldots + a_0)\overbrace{e^{\lambda t}}^{\neq 0} = 0$$

und stellt genau dann eine Lösung der Dgl dar, wenn λ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \ldots + a_0$$

der Dgl ist.

über den komplexen Zahlen hat ein Polynom vom Grad n gerade n (komplexe) Nullstellen $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n$, so dass der Satz von Funktionen

$\{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, .., e^{\lambda_n t}\}$ eine Basis des Lösungsraums der linearen Dgl (ein Fundamentalsystem) darstellt, wenn die λ_i paarweise verschieden sind.

Für ein Polynom mit reellen Koeffizienten $a_k \in \mathbb{R}$ treten die komplexen Nullstellen immer in komplex konjugierten Paaren auf, i.e. wenn $\lambda = \alpha + i\beta$ eine Nullstelle ist, so auch $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$. Mit

$$e^{\lambda t} = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i\sin(\beta t)) \quad \text{und}$$
$$e^{\bar{\lambda} t} = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) - i\sin(\beta t))$$

kann man durch Linearkombination aus $\{e^{\lambda t}, e^{\bar{\lambda} t}\}$ immer ein reelles System von Basisfunktionen $\{e^{\alpha t}\cos(\beta t), e^{\alpha t}\sin(\beta t)\}$ finden.

Wenn alle Nullstellen paarweise verschieden sind, lässt sich jetzt schon das Anfangswertproblem lösen: Im Ansatz

$y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + .. + C_n e^{\lambda_n t}$ gibt es n Konstanten, die aus den n Bedingungen $y(t_0), y'(t_0), .., y^{(n-1)}(t_0)$ des Anfangswertproblems eindeutig bestimmt werden können.

(Lineares Gleichungssystem mit n Koeffizienten und n Gleichungen)

Ein Problem tritt auf, wenn das charakteristische Polynom der Dgl Nullstellen mit einer Multiplizität größer als 1 enthält, also z.B. eine doppelte Nullstelle:

Sei für eine Dgl 3. Ordnung

$$y''' + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

das charakteristische Polynom

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^2 (\lambda - \lambda_2)$$

i.e. sei λ_1 eine doppelte Nullstelle. Dann finden wir zuerst nur die Lösungen $\{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}\}$ als Basis unseres Lösungsraums. Damit können wir also das Anfangswertproblem nicht lösen, denn unser Ansatz

$$y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_1 e^{\lambda_2 t}$$

hat nur <u>zwei</u> Konstanten, aber das Anfangswertproblem hat $y''(t_0), y'(t_0), y(t_0)$ und damit <u>drei</u> Bedingungen vorgegeben!

Wir benötigen also eine weitere Lösung! Wie kann man die finden?

In unserem Beispiel oben ist

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (\lambda^2 - 2\lambda_1\lambda + \lambda_1^2)(\lambda - \lambda_2) \\ &= \lambda^3 - (\lambda_2 + 2\lambda_1)\lambda^2 + (\lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_2)\lambda - \lambda_2\lambda_1^2 \\ &= \lambda^3 - a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 \end{aligned}$$

In Operatorschreibweise können wir die Dgl schreiben als

$$\left(\left(\frac{d}{dt}\right)^3 + a_2\left(\frac{d}{dt}\right)^2 + a_1\left(\frac{d}{dt}\right) + a_0\right)y = 0$$

Mit der bekannten Faktorisierung von $p(\lambda)$ mittels der Nullstellen kann man das Faktorisieren als

$$\left[\left(\frac{d}{dt} - \lambda_1\right)^2\left(\frac{d}{dt} - \lambda_2\right)\right]y = 0$$

wobei es auf die Reihenfolge der Differentialoperatoren im Produkt nicht ankommt, so lange wir differenzierbare Funktionen y betrachten.

Wir beobachten jetzt, dass jede Funktion aus unserer Lösungsbasis $\{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}\}$ von einem der Operatoren im Produkt eliminiert wird:

$$\left(\frac{d}{dt} - \lambda_1\right)e^{\lambda_1 t} = \lambda_1 e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{\lambda_1 t} = 0$$

$$\left(\frac{d}{dt} - \lambda_2\right)e^{\lambda_2 t} = 0$$

Um die noch fehlende Basisfunktion zu finden, die das Fundamentalsystem vervollständigt, nutze ich folgende Idee:
Kann ich eine Funktion finden, die nicht von $\left(\frac{d}{dt} - \lambda_1\right)$ eliminiert wird, aber von der doppelten Anwendung (die zur doppelten Nullstelle korrespondiert)

$$\left(\frac{d}{dt} - \lambda_1\right)^2 \quad ?$$

So eine Funktion gibt es: $t e^{\lambda_1 t}$

$$\left(\frac{d}{dt} - \lambda_1\right) t e^{\lambda_1 t} = \frac{d}{dt}\left(t e^{\lambda_1 t}\right) - \lambda_1 t e^{\lambda_1 t} = e^{\lambda_1 t} + \lambda_1 t e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 t e^{\lambda_1 t}$$
$$= e^{\lambda_1 t}$$

$$\left(\frac{d}{dt} - \lambda_1\right)^2 t e^{\lambda_1 t} = \left(\frac{d}{dt} - \lambda_1\right) e^{\lambda_1 t} = (\lambda_1 - \lambda_1) e^{\lambda_1 t} = 0$$

Daher erfüllt auch $t e^{\lambda_1 t}$ die Dgl und mein vollständiges Fundamentalsystem ist $\{e^{\lambda_1 t}, t e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}\}$, so dass der Ansatz $y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + D_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$ das Anfangswertproblem mit $y(t_0)$, $y'(t_0)$, $y''(t_0)$ löst!

Das Ganze gilt allgemein. Für eine dreifache Nullstelle brauche ich zusätzlich $t^2 e^{\lambda t}$, denn

$$\left(\frac{d}{dt} - \lambda\right) t^2 e^{\lambda t} = \frac{d}{dt}\left(t^2 e^{\lambda t}\right) - \lambda t^2 e^{\lambda t} = 2t e^{\lambda t} + \lambda t^2 e^{\lambda t} - \lambda t^2 e^{\lambda t}$$
$$= 2t e^{\lambda t}$$

$$\left(\frac{d}{dt} - \lambda\right)^2 t^2 e^{\lambda t} = \left(\frac{d}{dt} - \lambda\right)\left(2t e^{\lambda t}\right) = 2e^{\lambda t} + \lambda 2t e^{\lambda t} - \lambda 2t e^{\lambda t}$$
$$= 2e^{\lambda t}$$

$$\left(\frac{d}{dt} - \lambda\right)^3 t^2 e^{\lambda t} = \left(\frac{d}{dt} - \lambda\right) 2e^{\lambda t} = 0$$

Damit kann ich sehen, dass allgemein gilt:

$$\left(\frac{d}{dt} - \lambda\right) t^n e^{\lambda t} = n\, t^{n-1} e^{\lambda t}$$

i.e. der Operator erniedrigt den Grad des Polynoms um eins.
Es ist

$$\left(\frac{d}{dt} - \lambda\right)^n t^n e^{\lambda t} = n!\, e^{\lambda t}$$

und – am wichtigsten für uns –

$$\left(\frac{d}{dt} - \lambda\right)^{n+1} t^n e^{\lambda t} = 0$$

Daher gilt allgemein: Ist die Nullstelle λ_i des charakteristischen Polynoms n-fach entartet, enthält das Fundamentalsystem

$$\{ e^{\lambda_i t}, t e^{\lambda_i t}, t^2 e^{\lambda_i t}, \ldots, t^{n-1} e^{\lambda_i t} \}$$

so dass diese Nullstelle n Basisfunktionen beiträgt.

<u>Lösung der inhomogenen Gleichung</u>: Die inhomogene, lineare Dgl mit konstanten Koeffizienten

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f(t)$$

wird gelöst, indem man zu einer partikulären Lösung

$y_p(t)$ mit (Lösung muss man raten, für $f(t) = e^{\alpha t}$ probiere $y_p(t) = e^{\alpha t}$)

$$y_p^{(n)} + a_{n-1} y_p^{(n-1)} + \ldots + a_1 y_p' + a_0 y_p = f(t)$$

eine Lösung $y_h(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + D_1 t e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \ldots + C$

der homogenen Dgl. addiert und die Konstanten so bestimmt, dass $y(t) = y_p(t) + y_h(t)$ zusammen die Anfangsbedingungen erfüllt.

Systeme linearer, gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung

Jede gewöhnliche Dgl n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten läßt sich umschreiben in ein System linearer Dgl erster Ordnung.

Für $y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + a_{n-2} y^{(n-2)}(t) + \ldots + a_1 y'(t) + a_0 y = f$

setze
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}, \quad \vec{x}\,' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ y''' \\ \vdots \\ y^{(n)} \end{pmatrix}$$

Dann gilt
$$\vec{x}\,' = A\vec{x} + \vec{b}$$

mit
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & 0 \\ & & & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & & -a_{n-1} \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \\ \vdots \\ 0 \\ f \end{pmatrix}$$

Beispiel: $\ddot{x} + \omega^2 x = F(t)$

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} \qquad \dot{\vec{y}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{y}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \vec{y} + \begin{pmatrix} 0 \\ F(t) \end{pmatrix}$$

Für eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ definiert man

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \qquad \text{mit } A^0 = \mathbb{1}_{n\times n}$$

Dann hat das homogene System von Dgl erster Ordnung

$$\dot{\vec{x}}(t) = A\, \vec{x}(t) \quad , \quad \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$$

die Lösung

$$\vec{x}(t) = \exp(A t)\, \vec{x}_0$$

(Beachte Reihenfolge! Vektor $\vec{x}_0$ wird an die Matrix von rechts dranmultipliziert!)

Es gilt nämlich auch für die Matrix-Exponentialfunktion

$$\frac{d}{dt}\left(\exp(tA)\right) = A e^{tA} = e^{tA} A$$

Beispiel:

$$\dot{\vec{y}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \vec{y} \qquad \vec{y}(t_0) = y_0$$

Dann gilt

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega^2 & 0 \\ 0 & -\omega^2 \end{pmatrix} = -\omega^2 \mathbb{1}_2$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}^3 = -\omega^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}^4 = -\omega^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} = (-\omega^2)^2 \mathbb{1}_2$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}^5 = (-\omega^2)^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Allgemein:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}^{2k} = (-\omega^2)^k \, \mathbb{1}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}^{2k+1} = (-\omega^2)^k \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Dann gilt weiter für die Exponentialreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} A^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} A^{2k+1}$$

$$= \mathbb{1}_2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (t\omega)^{2k}}{(2k)!} + \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t\omega)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$= \mathbb{1}_2 \cos(\omega t) + \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \sin(\omega t)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\omega t & \frac{1}{\omega}\sin(\omega t) \\ -\omega\sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix}$$

Wähle eine Anfangsbedingung: $\vec{y}(t_0) = \vec{y}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \end{pmatrix}$

Dann ist die Lösung

$$\vec{y}(t) = \exp(At)\,\vec{y}_0 = \begin{pmatrix} \cos\omega t & \frac{1}{\omega}\sin\omega t \\ -\omega\sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\omega t + \sin\omega t \\ \omega(-\sin\omega t + \cos\omega t) \end{pmatrix} \qquad \text{o.k.}$$