KOMPLEXE ZAHLEN

Komplexe Zahlen: Eine komplexe Zahl ist ein geordnetes Paar (x, y) reeller Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$.
Zwei komplexe Zahlen $w = (u, v)$ und $z = (x, y)$ sind genau dann gleich, wenn $u = x$ und $v = y$ gelten.
Man definiert die Addition und die Multiplikation wie folgt:

$$w + z = (u + x, v + y)$$

$$wz = w \cdot z = (ux - vy, uy + vx)$$

Die Menge der komplexen Zahlen bezeichnet man mit $\mathbb{C}$.
$\mathbb{C}$ ist ein Körper mit den neutralen Elementen $(0,0)$ bezüglich Addition und $(1,0)$ bezüglich Multiplikation.
$\mathbb{R}$ bildet einen Teilkörper mit $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (x, 0) \in \mathbb{C}$.
Sind $x, y \in \mathbb{R}$, so gilt mit $i := (0,1)$

$$(x, y) = (x, 0) + (y, 0)(0, 1) = x + iy.$$

Dabei nennt man $x = \mathrm{Re}(z)$ den Realteil von $z = (x, y)$ und $y = \mathrm{Im}(z)$ den Imaginärteil.
Bezeichnet man mit $\bar{z} = (x, -y) = x - iy$ die Konjugierte von z, so gilt für $w, z \in \mathbb{C}$:

- $\overline{w + z} = \bar{w} + \bar{z}$, $\overline{wz} = \bar{w}\,\bar{z}$
- $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$
- $z\bar{z}$ ist reell und $z\bar{z} > 0$ für $z \neq 0$

Für $z \in \mathbb{C}$ definiert man den Betrag $|z|$ als

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} \quad (\text{nicht-negative Quadratwurzel})$$

Dann gelten für $w, z \in \mathbb{C}$

$$|z| = |\bar{z}|, \quad |wz| = |w||z|, \quad |\mathrm{Re}(z)| \le |z|, \quad |\mathrm{Im}(z)| \le |z|$$

und die Dreiecksungleichung

$$\big||w| - |z|\big| \le |w+z| \le |w| + |z|$$

[Rechte Hälfte: folgt aus

$$\begin{aligned} |w+z|^2 &= (w+z)(\bar{w}+\bar{z}) = |w|^2 + 2\,\mathrm{Re}(w\bar{z}) + |z|^2 \\ &\le |w|^2 + 2|w\bar{z}| + |z|^2 \\ &= |w|^2 + 2|w||z| + |z|^2 = (|w| + |z|)^2 \end{aligned}$$

Linke Hälfte: aus der rechten mit $|w| = |(w-z) + z|$].

EXPONENTIALFUNKTION: Die durch

$$\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$$

definierte Funktion $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oder $\exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt Exponentialfunktion.

Für alle $w, z \in \mathbb{C}$ gilt $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$
(Funktionalgleichung)

Natürlicher Logarithmus: Die Umkehrfunktion von $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ heißt natürlicher Logarithmus und wird mit $\ln: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ bezeichnet.

Für $a \in \mathbb{R}_+$ und $z \in \mathbb{C}$ definiert man die allgemeine Potenz $a^z := \exp(\ln(a) z)$.

- Für alle $x, y \in \mathbb{R}_+$ gilt $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
- $\ln: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ ist stetig.
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

Trigonometrische Funktionen: Die Funktionen $\cos: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $\sin: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ werden definiert durch

$$\cos(z) := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}$$

$$\sin(z) := \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\exp(iz) = \cos(z) + i \sin(z)$$

$$\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1$$

Insbesondere gilt für reelle $x \in \mathbb{R}$

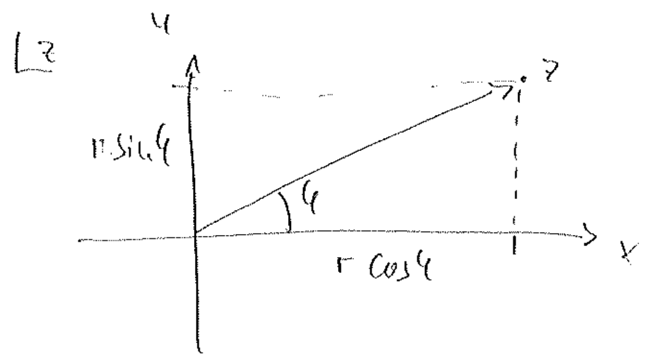
$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \iff \begin{array}{l} \mathrm{Re}(e^{ix}) = \cos x \\ \mathrm{Im}(e^{ix}) = \sin x \end{array}$$

$$|e^{ix}| = \sqrt{e^{ix}\,\overline{e^{ix}}} = \sqrt{e^{ix}\,e^{-ix}} = \sqrt{1} = 1$$

$e^z = 1$ genau dann, wenn $z = 2\pi i k \quad k \in \mathbb{Z}$

Polardarstellung komplexer Zahlen:
Für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gibt es genau ein $r \in (0, \infty)$ und ein $\varphi \in [0, 2\pi)$ mit der Eigenschaft, dass
$z = r e^{i\varphi}$.

$|z| = r$. Dann ist $z = r e^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$
$= x + iy$



$\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{y}{x}$

Hyperbolische Funktionen: Die Funktionen
$\cosh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $\sinh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ werden definiert durch

$$\cosh(z) := \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}$$

$$\sinh(z) := \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Eigenschaften:
$\cosh(z) = \cos(iz)$
$\sinh(z) = -i \sin(iz)$
$\cosh(z) = \cosh(-z)$
$\sinh(z) = -\sinh(-z)$

$\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$

Natürlicher Logarithmus aus Polardarstellung:

$$\ln(z) = \ln(r) + i\arg(z)$$

→ "Hauptzweig", da $\arg(z) \in [0, 2\pi)$, aber $e^{i\varphi + 2\pi i k} = e^{i\varphi}$ $\forall k \in \mathbb{Z}$

→ $+2\pi i k$ liefert "Nebenzweige"

Polardarstellung ist besonders hilfreich, wenn man mit Wurzeln oder Potenzen rechnet:

$$z^s = r^s e^{is\varphi} \qquad \sqrt[s]{z} = z^{1/s} = r^{1/s} e^{i\varphi/s}$$

Multiplikation: $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2} \in \mathbb{C}$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

Lösungen der Gleichung $z^n = w$, komplexe Wurzelfunktion

Jedes Polynom mit Koeffizienten $a_k \in \mathbb{R}$ oder $a_k \in \mathbb{C}$ vom Grad n

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z^1 + a_0$$

besitzt nach dem Fundamentalsatz der Algebra über den komplexen Zahlen ($z \in \mathbb{C}$) genau n Nullstellen (wobei mehrfach auftretende Nullstellen auch mehrfach gezählt werden).

Insbesondere besitzt dann auch die Gleichung

$$z^n = w \qquad z^n - w = 0$$

n Lösungen über den komplexen Zahlen. Um zu sehen, wie man diese findet, betrachten wir die Gleichung

$$z^n = 1$$

Für $n = 2$ besitzt $z^2 = 1$ die beiden Lösungen $z_{1,2} = \pm 1 = \pm\sqrt{1}$

$z^2 = a > 0,\ a \in \mathbb{R}$ $\qquad z_{1,2} = \pm\sqrt{a}$

Definitionsgemäß versteht man unter der Wurzel einer Zahl $a \in \mathbb{R}$ den Wert $\sqrt{a} > 0$ der beiden Lösungen der Gleichung $(\sqrt{a})^2 = a$.

Definieren wir nun, dass die n-te Wurzel einer komplexen Zahl $w \in \mathbb{C}$ die Eigenschaft habe, dass $(\sqrt[n]{w})^n = w$, so sehen wir, dass mit $z = \sqrt[n]{w}$, $z^n = w$ nach dem Fundamentalsatz n Lösungen existieren müssen, und daher die komplexe Wurzelfunktion auch n Werte annimmt. Bei den verschiedenen Werten, die $\sqrt[n]{w}$ annimmt, spricht man von den Zweigen der Wurzelfunktion.

Für die Quadratwurzel $\sqrt[2]{w}$ gilt im reellen $\sqrt[2]{a} = \pm\sqrt{a}$ für $a \geq 0$, und man identifiziert $\sqrt{a} \geq 0$ mit dem Hauptwert von $\sqrt[2]{a}$.

Da gilt $e^{i2\pi k} = \left(e^{i2\pi}\right)^k = 1^k = 1$ für $k \in \mathbb{Z}$

finden wir im komplexen für die n-te Wurzel von 1 (d.h. die Lösung der Gleichung $z^n = 1 = \left(\sqrt[n]{1}\right)^n = 1$

$$\sqrt[n]{1} = (1)^{1/n} = e^{i2\pi k/n}$$

d.h. n Lösungen mit $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ (da $e^{i2\pi 0} = e^0 = 1$ $= e^{i2\pi\frac{n}{n}} = e^{i2\pi} = 1$ wieder übereinstimmen).

Daher gibt es im komplexen n n-te Wurzeln der Zahl 1 oder n Einheitswurzeln.

Für $n = 2$ sind die Einheitswurzeln gerade

$$\sqrt[2]{1} = e^{i\pi k} \qquad k = 0, 1$$

$$= \begin{cases} 1 \\ e^{i\pi} = -1 \end{cases}$$

für $n = 3$ gilt $\sqrt[3]{1} = e^{i\frac{2\pi}{3}k}$ $\quad k = 0, 1, 2$

$$= \begin{cases} 1 \\ e^{i\frac{2\pi}{3}} \\ e^{i\frac{4\pi}{3}} = e^{-i\frac{2\pi}{3}} \end{cases}$$

Da $e^{i\frac{4\pi}{3}} = e^{i\frac{4\pi}{3}} \underbrace{e^{-i2\pi}}_{=1} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ sind die beiden komplexen Wurzeln zueinander konjugiert: $\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^* = e^{-i\frac{2\pi}{3}} = e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

Allgemein hat die Gleichung

$$z^n = w = re^{i\varphi} \quad \text{die } n \text{ Lösungen}$$

$$z = \left(re^{i\varphi + 2\pi k}\right)^{1/n} = \underbrace{\sqrt[n]{r}}_{\text{reell}, >0}\, e^{i\frac{\varphi}{n}}\, e^{i\frac{2\pi}{n}k} \qquad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

Die Lösung mit $-\pi < \varphi + 2\pi k < \pi$ oder $-\frac{\pi}{n} < \frac{\varphi + 2\pi k}{n} < \frac{\pi}{n}$

i.e. mit $-\frac{\pi}{n} < \arg(z) < \frac{\pi}{n}$ bezeichnet man als den Hauptzweig der n-ten Wurzel.

Für reelle Zahlen $a \in \mathbb{R}$ mit

$$z^n = a \qquad z = \underbrace{\sqrt[n]{a}}_{\text{reell}, >0}\, e^{i\frac{2\pi}{n}k} \quad \text{ist der Hauptzweig}$$

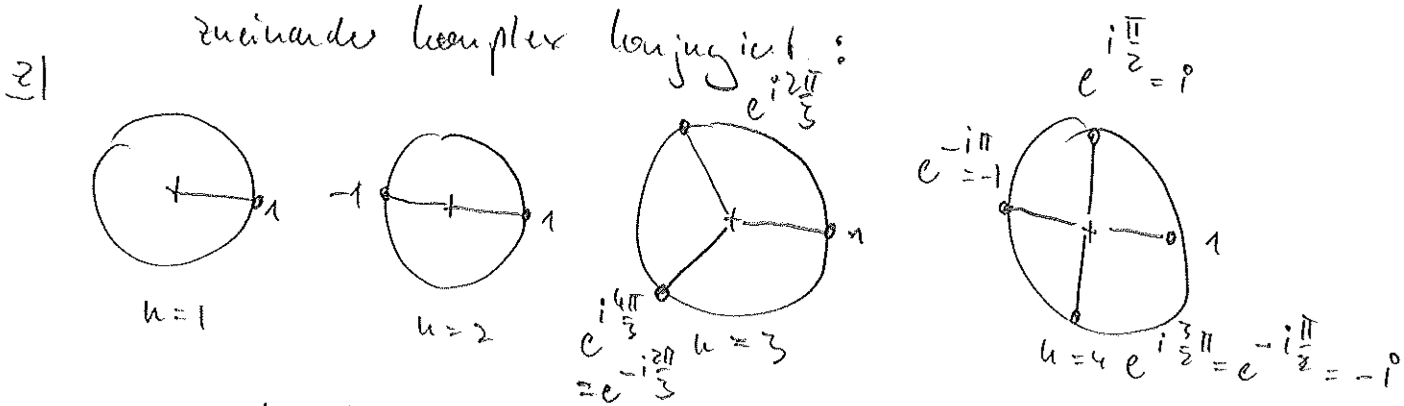
$k = 0$ immer reell. Dann sind wegen

$$e^{i\frac{2\pi}{n}k}\underbrace{e^{-i2\pi}}_{=1} = e^{i\frac{2\pi}{n}(k-n)} = \left(e^{-i\frac{2\pi}{n}(k-n)}\right)^* = \left(e^{i\frac{2\pi}{n}(n-k)}\right)^*$$

für $k = 1, 2, \dots, n-1$ jeweils die Lösungen für

$(1, n-1), (2, n-2), \dots, (k, n-k) \qquad k = 0, 1, 2, \dots, [\frac{n}{2}]$

zueinander komplex konjugiert:



Allgemein für komplexes $w \in \mathbb{C}$ erhält man alle Wurzeln $z = \sqrt[n]{w}$, indem man den Hauptwert $\sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\varphi}{n}}$ mit $-\frac{\pi}{n} < \frac{\varphi}{n} < \pi$ mit $e^{i\frac{2\pi}{n}k}$ $k = 1, 2, \dots, n-1$ multipliziert.