INTEGRATION

Hier: nur einfachste Integralbegriff, wir führen das Riemann-Integral ein. Alle Aussagen gelten nur dafür.

Eindimensionale Integrationen: Geometrische Interpretation als Flächeninhalt unter einer Kurve.

Man definiert das Integral über eine einfache Funktion, und verallgemeinert dann durch Approximation auf kompliziertere Funktionen. Startpunkt ist die

<u>Treppenfunktion</u>: Eine Funktion $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt <u>Treppenfunktion</u>, falls es eine Unterteilung

$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ von $[a,b]$ gibt, mit der Eigenschaft, dass φ auf jedem Teilintervall (x_{k-1}, x_k) konstant ist, d.h. dass $\varphi|_{(x_{k-1},x_k)} = c_k$ mit Konstanten $c_1, \ldots, c_n$ ist. Die Menge aller Treppenfunktionen auf $[a,b]$ wird mit $\mathcal{T}[a,b]$ bezeichnet.

<u>Integral einer Treppenfunktion</u>: Sei $\varphi \in \mathcal{T}[a,b]$ und $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ eine Unterteilung von $[a,b]$ mit $\varphi|_{(x_{k-1},x_k)} = c_k$ mit Konstanten $c_k \in \mathbb{R}$. Dann definiert man als das <u>(Riemann-)Integral von φ</u> die Zahl

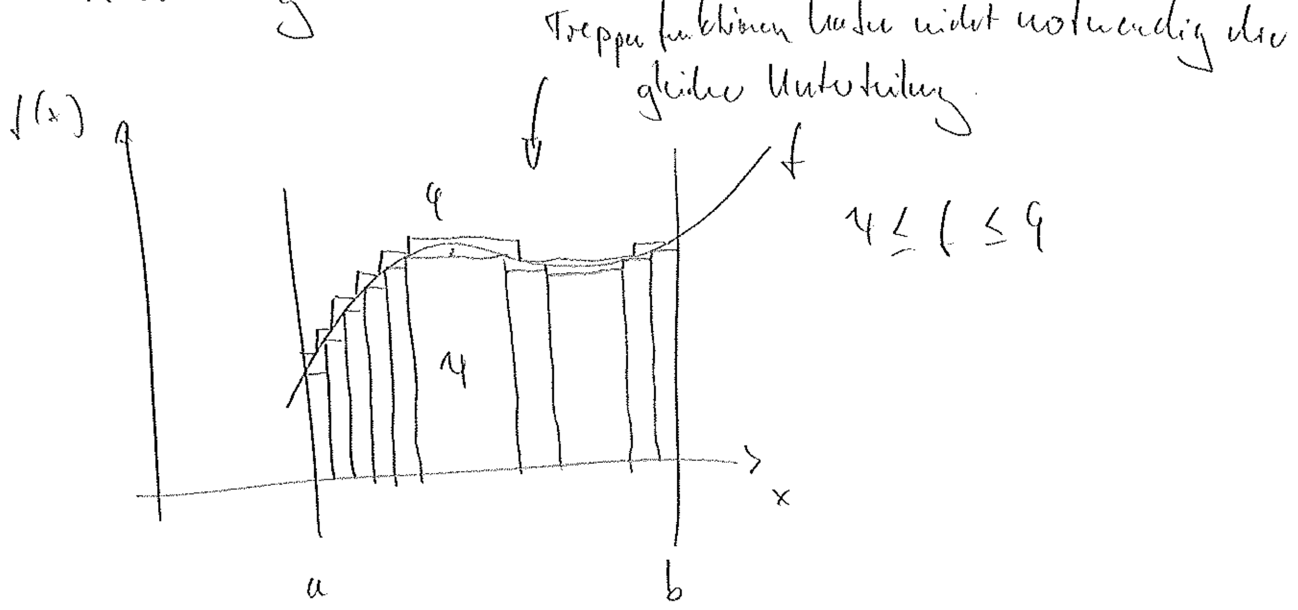
$$\int_a^b \varphi(x)\,dx := \sum_{k=1}^{n} c_k (x_k - x_{k-1}).$$

Mit Hilfe von Treppenfunktionen, die eine beliebige, beschränkte Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ approximieren, kann man nun ein Integral von f definieren.

<u>(Riemann-) Integral</u>: Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion.

- Das <u>Oberintegral</u> von f ist $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx := \inf\left\{ \int_a^b \varphi(x)\,dx : \varphi \in \mathcal{T}[a,b] \text{ und } \varphi \geq f \right\}$
- Das <u>Unterintegral</u> von f ist
$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx := \sup\left\{ \int_a^b \psi(x)\,dx : \psi \in \mathcal{T}[a,b] \text{ und } \psi \leq f \right\}.$$
- f heißt <u>(Riemann-)</u> <u>integrierbar</u>, falls
$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$
Dann nennt man die Zahl
$$\int_a^b f(x)\,dx := \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$$
das <u>Integral von f</u>.
- Die Menge aller (Riemann-) integrierbaren Funktionen (Regelfunktionen) nennt man $\mathcal{R}[a,b]$.

Anschauung:



[illegible] **Integrabilität**: Eine beschränkte Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, wenn es zu jedem $\varepsilon>0$ Treppenfunktionen $\varphi,\psi\in\mathcal{T}[a,b]$ gibt mit den Eigenschaften, dass $\psi(x)\le f(x)\le\varphi(x)$ für alle $x\in[a,b]$ und

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx-\int_a^b \psi(x)\,dx<\varepsilon .$$

[illegible] **Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:**
Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

- Sei $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ definiert durch $F(x):=\int_a^x dt\, f(t)$. Dann ist F eine Stammfunktion von f.
- Sei F eine Stammfunktion von f. Dann ist

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a).$$

Erinnerung: Stammfunktionen F, G einer Funktion f können sich durch Konstanten unterscheiden: $F-G$ ist eine konstante Funktion.

Eigenschaften integrierbarer Funktionen

Seien $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ und $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

- $\mathcal{R}[a,b]$ ist ein Vektorraum über den reellen Zahlen $\mathbb{R}$.
- Linearität des Integrals:

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\, dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx + \mu \int_a^b g(x)\, dx$$

- Monotonie: Ist $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a,b]$, dann gilt $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx$.

- Für $c \in (a,b)$ gilt

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx.$$

Außerdem gilt

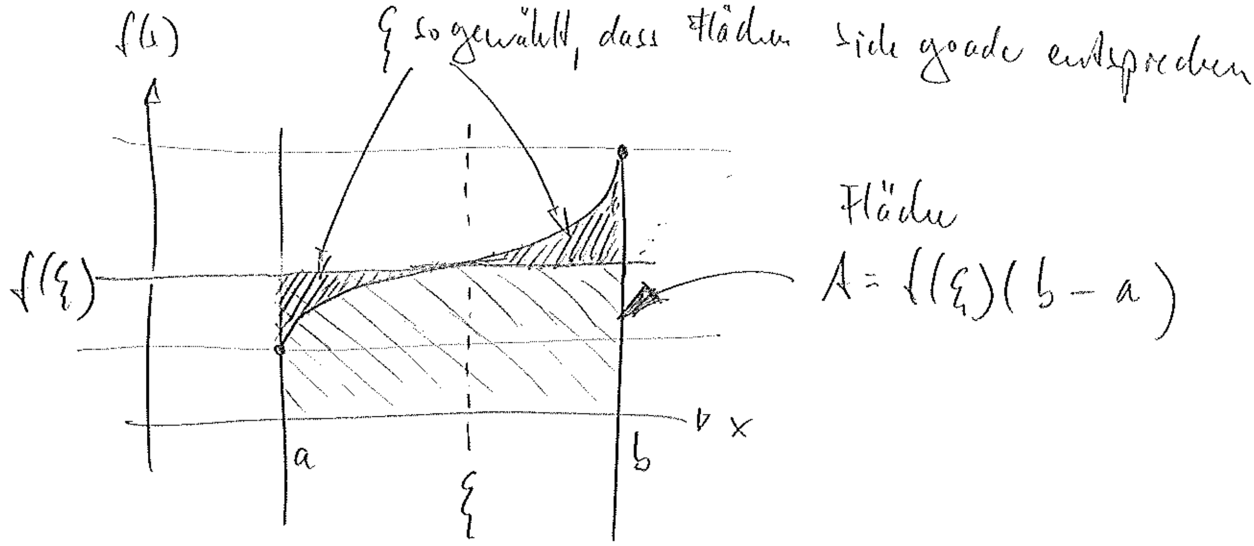
$$\int_a^a f(x)\, dx = 0$$

und man definiert

$$\int_b^a f(x)\, dx := -\int_a^b f(x)\, dx \quad \text{für } a < b.$$

Mittelwertsatz der Integralrechnung: Sei $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es ein $\xi \in [a,b]$ mit der Eigenschaft

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a).$$



INTEGRATIONSTECHNIKEN

Partielle Integration (Umkehrung der Produktregel)

Seien $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ zwei stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

Folgt direkt aus dem Hauptsatz mit $p(x) = f(x)g(x)$ und $p'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ (Produktregel)

Beispiel:

$$\begin{aligned}\int x^2 \sin x\,dx &= -x^2\cos x + \int 2x\cos x\,dx \\ &= -x^2\cos x + 2x\sin x - 2\int \sin x\,dx \\ &= -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C\end{aligned}$$

Häufiger Trick bei trigonometrischen Funktionen: Umformen, bis der Ausgangsterm wieder auftaucht, und dann auflösen!

Beispiel:
$$\int \ln^2(x)\,dx = \int 1\cdot \ln^2(x)\,dx =$$
$$= x\ln^2(x) - \int 2x\ln(x)\frac{1}{x}\,dx$$
$$= x\ln^2(x) - 2\int 1\cdot \ln(x)\,dx =$$
$$= x\ln^2(x) - 2x\ln(x) + 2\int \frac{x}{x}\,dx$$
$$= x\ln^2(x) - 2x\ln(x) + 2x + C$$

☒ <u>Substitution</u> (Umkehrung der Kettenregel)

Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ zwei stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt:
$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy$$

Beweis: Sei F eine Stammfunktion von f auf $g([a,b])$. Dann ist $(F\circ g)'(x) = f(g(x))\,g'(x)$ nach Kettenregel. Einsetzen in den Hauptsatz liefert
$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = (F\circ g)(b) - (F\circ g)(a)$$
$$= F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy \quad ☒$$

Beispiel:
$$\int_0^\pi \exp(\cos(x))\sin(x)\,dx \qquad g(x) = \cos(x)$$
$$g'(x) = -\sin(x)$$
$$= \int_0^\pi \exp(g(x))(-g'(x))\,dx = -\int_{g(0)}^{g(\pi)} \exp(y)\,dy$$
$$= -\int_{\cos(0)}^{\cos(\pi)} \exp(y)\,dy = \int_{-1}^{1} e^y\,dy = \left[e^y\right]_{-1}^{+1} = e - \frac{1}{e}.$$

- $\int \ln^4(x)\,\frac{1}{x}\,dx$ $\qquad g(x) = \ln(x)$, $\quad g'(x) = \frac{1}{x}$

$$= \int g^4(x)\, g'(x)\, dx = \int y^4\, dy = \frac{1}{5} y^5 + C$$

- $$\int \frac{1}{\sin(x)}\,dx = \int \frac{1}{2\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2})}\,dx = \int \frac{\cos(\frac{x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}\,\frac{1}{2\cos^2(\frac{x}{2})}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{\tan(\frac{x}{2})}\,\frac{1}{2\cos^2(\frac{x}{2})}\,dx$$

$$g(x) = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$
$$g'(x) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\cos^2(\frac{x}{2})}$$

$$= \int \frac{1}{g(x)}\, g'(x)\, dx = \ln(g(x)) + C$$
$$= \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + C \,.$$

PARTIALBRUCHZERLEGUNG. Rationale Funktionen (Quotienten zweier Polynome) besitzen immer eine elementare Stammfunktion. Diese lässt sich also bei komplizierten Brüchen nicht unmittelbar finden; man kann einen integrierbaren Ausdruck mittels Partialbruchzerlegung finden.

Jedes reelle Polynom kann geschrieben werden als

$$q(x) = (x-\alpha_1)^{r_1} \cdots (x-\alpha_k)^{r_k}\, Q_{k+1}(x)^{r_{k+1}} \cdots Q_\ell(x)^{r_\ell} \quad (*)$$

wobei $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ die paarweise verschiedenen reellen Nullstellen mit Vielfachheiten r_k sind, und $Q_{k+1}, \ldots, Q_\ell$ paarweise verschiedene quadratische Polynome ohne reelle Nullstellen (also mit Paaren komplex konjugierter Nullstellen).

Dann kann jede rationale Funktion $\frac{p(x)}{q(x)}$ geschrieben werden in der Form

$$\frac{p(x)}{q(x)} = H_1(x) + H_2(x) + \dots + H_\ell(x) + r(x) \quad (**)$$

mit $r(x)$ dem Ergebnis der Polynomdivision von p und q, und H_m die Form haben

$$H_m(x) = \frac{c_1}{x-\alpha_m} + \frac{c_2}{(x-\alpha_m)^2} + \dots + \frac{c_{r_m}}{(x-\alpha_m)^{r_m}}$$

für $m = 1, \dots, k$

$$H_m(x) = \frac{c_1 x + d_1}{Q_m(x)} + \frac{c_2 x + d_2}{Q_m(x)^2} + \dots + \frac{c_{r_m} x + d_{r_m}}{Q_m(x)^{r_m}}$$

für $m = k+1, \dots, \ell$

$c_j, d_j \in \mathbb{R}$ für alle j.

Die Stammfunktionen der $H_m(x)$ lassen sich dann einfach bestimmen.

Man geht also wie folgt vor:

1) Man bestimmt r in $(**)$ durch Polynomdivision.
2) Man zerlegt das Nennerpolynom $q(x)$ gemäß $(*)$
3) Man setzt die Partialbruchzerlegung in der Form $(**)$ an
4) Man bringt $(**)$ auf den Hauptnenner und bestimmt die Koeffizienten durch Koeffizientenvergleich aus einem linearen Gleichungssystem.

5) Man bestimmt die Stammfunktion durch Integration der $H_{ii}(x)$.

Beispiel: $\displaystyle\int \frac{1}{(x+2)^2(x^2+1)}\,dx$

hat nur ein Nennerpolynom $q(x) = (x+2)^2(x^2+1)$, das bereits faktorisiert ist.

Damit machen wir den Ansatz

$$\frac{1}{q(x)} = H_1(x) + H_2(x)$$

$$= \frac{c_1}{x+2} + \frac{c_2}{(x+2)^2} + \frac{ax+b}{(x^2+1)}$$

Auf den Hauptnenner bringen:

$$1 = c_1(x+2)(x^2+1) + c_2(x^2+1) + (ax+b)\overbrace{(x+2)^2}^{(x^2+4x+4)}$$

$$= c_1(\underline{x^3} + \underline{2x^2} + \underline{x} + \underline{2}) + c_2(\underline{x^2}+1) + a(\underline{x^3} + \underline{4x^2} + \underline{4x}) + b(\underline{x^2} + \underline{4x} + 4)$$

$$= x^3(c_1 + a) + x^2(2c_1 + c_2 + 4a + b) + x(c_1 + 4a + 4b) + 2c_1 + c_2 + 4b$$

Durch Koeffizientenvergleich lineares Gleichungssystem.

$$\left.\begin{array}{l} a + c_1 = 0 \\ 4a + b + 2c_1 + c_2 = 0 \\ 4a + 4b + c_1 = 0 \\ 4b + 2c_1 + c_2 = 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} a = -\frac{4}{25} \\ b = \frac{3}{25} \\ c_1 = \frac{4}{25} \\ c_2 = \frac{1}{5} \end{array}$$

(s. S. 9a)

Nebenrechnung: unsystematisches Lösen

$$\begin{array}{lccccr}
(1) & a & & +c_1 & & =0 \\
(2) & 4a & +b & +2c_1 & +c_2 & =0 \\
(3) & 4a & +4b & +c_1 & & =0 \\
(4) & & 4b & +2c_1 & +c_2 & =1
\end{array}$$

$$\begin{array}{lccccr}
(1) & a & & +c_1 & & =0 \\
(2)-4\cdot(1) & 0 & +b & -2c_1 & +c_2 & =0 \\
(3)-4\cdot(1) & 0 & +4b & -3c_1 & & =0 \\
(4) & & 4b & +2c_1 & +c_2 & =1
\end{array}$$

$$\begin{array}{lccccr}
(1) & a & & +c_1 & & =0 \\
(2) & & b & -2c_1 & +c_2 & =0 \\
(3)-4\cdot(2) & & 0 & +5c_1 & -4c_2 & =0 \\
(4)-4\cdot(2) & & 0 & +10c_1 & -3c_2 & =1
\end{array}$$

$$\begin{array}{lccccr}
(1) & a & & +c_1 & & =0 \\
(2) & & b & -2c_1 & +c_2 & =0 \\
(3) & & & 5c_1 & -4c_2 & =0 \\
(4)-2\cdot(3) & & & 0c_1 & +5c_2 & =1
\end{array} \Rightarrow c_2 = \frac{1}{5}$$

---

(3): $c_1 = \frac{4}{5} \cdot c_2 = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{25}$

(2): $b = 2c_1 - c_2 = 2 \cdot \frac{4}{25} - \frac{5}{25} = \frac{3}{25}$

(1): $a = -c_1 = -\frac{4}{25}$

Damit

$$\frac{1}{(x+2)^2(x^2+1)} = \frac{1}{25}\left[\frac{-4x+3}{(x^2+1)} + \frac{4}{(x+2)} + \frac{5}{(x+2)^2}\right]$$

Benutze dann:

$$\int \frac{1}{(x^2+1)}\,dx = \arctan(x) + C$$

$$\int \frac{2x}{(x^2+1)}\,dx = \ln(1+x^2) + C$$

$$\int \frac{1}{x+2}\,dx = \ln|(x+2)| + C$$

$$\int \frac{1}{(x+2)^2}\,dx = -\frac{1}{(x+2)} + C$$

UNEIGENTLICHE INTEGRALE

Uneigentliche Integrierbarkeit: • Sei $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit $a < b$. Eine Funktion $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ heißt <u>uneigentlich integrierbar</u> <u>über $[a, b)$</u>, wenn f über jedem Intervall $[a, y]$ mit $a < y < b$ integrierbar ist und der Grenzwert $\lim_{y \nearrow b} \int_a^y f(x)\,dx =: \int_a^b f(x)\,dx$ existiert.

- Analog für $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ mit $b \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ für die untere Integralgrenze
- Seien $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ mit $a < b$ und $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Dann heißt f <u>uneigentlich integrierbar</u> über (a, b), wenn es ein $c \in (a, b)$ gibt mit der Eigenschaft, dass f sowohl über $(a, c]$ als auch über $[c, b)$ uneigentlich integrierbar ist.

In diesem Fall setzt man

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{y \searrow a} \int_y^c f(x)\,dx + \lim_{y \nearrow b} \int_c^y f(x)\,dx .$$

- Eine über dem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ uneigentlich integrierbare Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ heisst <u>absolut integrierbar</u>, wenn $|f|$ über I uneigentlich integrierbar ist.

<u>Majorantenkriterium</u> für Integrale.

Seien $f, g : [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ zwei Funktionen mit den Eigenschaften, dass

- f über jedem Intervall $[a,y]$ mit $y < b$ integrierbar ist
- $|f(x)| \le g(x)$ für alle $x \in [a,b)$ gilt und
- g über $[a,b)$ uneigentlich integrierbar ist (wegen $0 \le |f(x)| \le g(x)$ ist $|g(x)| = g(x)$ und damit g über $[a,b)$ auch absolut integrierbar)

Dann ist auch f über $[a,b)$ absolut integrierbar.

Das impliziert auf der anderen Seite auch wieder ein <u>Minorantenkriterium</u>: Wenn $f(x) \ge |g(x)|$ und das uneigentl. Integral über $|g(x)|$ divergiert, so wird auch das über $f(x)$ divergieren.