STETIGKEIT

☒ <u>Abschluss</u> einer Menge $D \subset \mathbb{R}$:

Die Menge $\bar{D} := \{x \in \mathbb{R} :$ es gibt eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D$, für die $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ist$\}$

heißt <u>Abschluss</u> von D. Ist $\bar{D} = D$, so heißt D <u>abgeschlossen</u>.

Bsp.: $(0,1]$ ist <u>nicht</u> abgeschlossen, da z.B. $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in (0,1]$, aber der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \notin (0,1]$.

Es gilt $\overline{(0,1]} = [0,1]$.

☒ <u>Grenzwert einer Funktion in einem Punkt</u>:

Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f: D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, und $p \in \bar{D}$.

Eine Zahl $q \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ heißt <u>Grenzwert</u> <u>von f in p</u>, wenn für jede Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D$, die gegen p konvergiert, $q = \lim_{n\to\infty} f(p_n)$ gilt. Dann schreibt man $\lim_{x\to p} f(x) = q$.

Man kann damit auch Grenzwerte für ∞ definieren (mittels Folgen mit uneigentlicher Konvergenz gegen ∞), oder einseitige Grenzwerte.

Damit können wir jetzt die <u>Stetigkeit</u> einer Funktion definieren.

<u>Stetigkeit einer Funktion:</u>

Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f: D \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

Dann heißt f <u>stetig im Punkt</u> $p \in D$, wenn

$$\lim_{x \to p} f(x) = f(p).$$

Dann heißt f <u>stetig auf D</u>, wenn sie in allen Punkten $p \in D$ stetig ist.

Bsp:

- alle Polynomfunktionen $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ sind stetig auf $\mathbb{R}$.
- die Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ mit $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $f(x) = \frac{1}{x}$ ist stetig auf D. $(0 \notin D!)$

<u>Stetige Fortsetzung:</u>

Sei $D \subset \tilde{D} \subset \mathbb{R}$ und $f: D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

Eine Funktion $\tilde{f}: \tilde{D} \to \mathbb{R}$ heißt <u>stetige Fortsetzung von f auf $\tilde{D}$</u>, wenn $\tilde{f}$ stetig ist und $\underbrace{\tilde{f}\big|_D}$ $= f$ gilt

(↑ Einschränkung von $\tilde{f}$ auf D.)

Rechenregeln für Funktionsgrenzwerte und stetige Funktionen:

Seien $D \subset \mathbb{R}$ und $f, g : D \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen, $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Wenn $p \in \overline{D}$ und $\lim_{x \to p} f(x)$ und $\lim_{x \to p} g(x)$ existieren, dann existieren auch die entsprechenden Grenzwerte für

  $g + f$, $f \cdot g$, λf und $\frac{f}{g}$, sowie $\lim_{x \to p} g(x) \neq 0$,

- Wenn f und g an $p \in D$ stetig sind, dann sind auch

  $g + f$, $f \cdot g$, λf und $\frac{f}{g}$ für $g(p) \neq 0$ stetig.

Komposition:

Seien $D, \tilde{D} \subset \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$, $g : \tilde{D} \to \mathbb{R}$ Funktionen.

- Wenn f stetig in $p \in D$ ist, wenn $y = f(p) \in \tilde{D}$ ist, und wenn g stetig in y ist, dann ist

  $(g \circ f) : D \to \mathbb{R}$ stetig in p.

ε - δ - Charakterisierung der Stetigkeit

(praktisch am bedeutungsvollsten)

Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f: D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $p \in D$.
Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- f ist stetig in p
- Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit der folgenden Eigenschaft: Für alle $x \in D$ mit $|x - p| < \delta$ gilt $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$.

praktisch am wichtigsten, beachte dass δ vom Punkt p abhängen kann und darf.

Gleichmäßige Stetigkeit:

Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ heißt <u>gleichmäßig stetig</u>, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit der folgenden Eigenschaft: Für alle $x, x' \in D$ mit $|x - x'| < \delta$ gilt $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

Beachte: hier darf δ nicht mehr vom Entwicklungspunkt p abhängen, sondern muss auf ganz D das gleiche sein!

Lipschitz - Stetigkeit:

Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ heißt <u>Lipschitz-stetig</u>, wenn es eine Konstante $L \geq 0$ mit der Eigenschaft gibt, dass $|f(x) - f(x')| \leq L|x - x'|$ für alle $x, x' \in D$.

Das kann man so interpretieren, dass die Steigung von $f(x)$ durch L beschränkt wird. Insbesondere kann eine Funktion nicht in einem Intervall Lipschitz-stetig sein, wenn dort an einem Punkt die Steigung divergiert. (Standard-Beispiel $\sqrt{x}$ bei $x=0$).

Eine lineare Funktion $f(x) = ax + b$ ist hingegen Lipschitz-stetig mit $L = |a|$.

Die Stetigkeitsbegriffe implizieren einander:

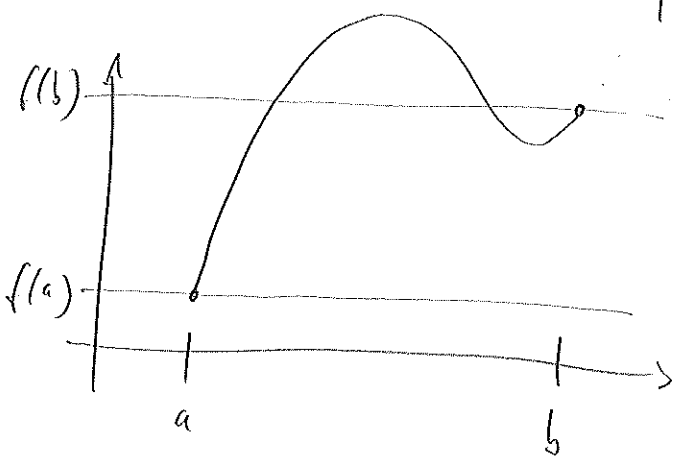
- Wenn eine Funktion f Lipschitz-stetig ist, dann ist sie auch gleichmäßig stetig.
- Wenn eine Funktion f gleichmäßig stetig ist, dann ist sie auch stetig.
- Ist f stetig und D kompakt, dann ist f sogar gleichmäßig stetig.

(Umkehrungen gelten also nicht!)

Eigenschaften stetiger Funktionen

Zwischenwertsatz:

Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gibt es zu jedem $y \in \mathbb{R}$ mit $\min\{f(a), f(b)\} \leq y \leq \max\{f(a), f(b)\}$ ein $x \in [a,b]$ mit $f(x) = y$.



Insbesondere gilt auch: Für $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ hat f mindestens eine Nullstelle in $[a,b]$.

Satz vom Maximum (Minimum):

Sei $[a,b]$ ein kompaktes (beschränktes u. abgeschlossenes) Intervall und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann nimmt f auf $[a,b]$ Maximum und Minimum an, d.h. es gibt $x_{max}, x_{min} \in [a,b]$ mit

$f(x_{max}) = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}$ und $f(x_{min}) = \inf\{f(x) : x \in [a,b]\}$

Insbesondere ist f beschränkt, d.h. es gibt ein $M > 0$ mit $|f(x)| < M$ für alle $x \in [a,b]$.

DIFFERENTIATION

Differenzierbarkeit: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

- Die Funktion f heißt differenzierbar im Punkt $p \in I$, wenn der Grenzwert

$$f'(p) := \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

existiert. Dann heißt $f'(p)$ die Ableitung von f in p.

- Die Funktion f heißt differenzierbar auf I, wenn f in jedem Punkt $p \in I$ differenzierbar ist. Dann heißt die Funktion $f': I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f'(x)$ Ableitung von f.

- Die Funktion f heißt stetig differenzierbar, wenn sie differenzierbar ist und ihre Ableitung f' stetig ist.

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- f ist differenzierbar in p
- Der Grenzwert $\lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}$ existiert.

Stetigkeit und Differenzierbarkeit:

- Wenn f in p differenzierbar ist, dann ist f in p stetig.

Stammfunktion: Eine differenzierbare Funktion $F: I \to \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion von $f: I \to \mathbb{R}$, falls $F' = f$ ist.

Nicht-Eindeutigkeit der Stammfunktion:

Sei $F: I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $f: I \to \mathbb{R}$. Eine Funktion $G: I \to \mathbb{R}$ ist genau dann eine Stammfunktion von f, wenn $G - F$ eine konstante Funktion ist.

Rechenregeln für Ableitungen:

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $p \in I$ und $f, g: I \to \mathbb{R}$ zwei in p differenzierbare Funktionen, $\lambda \in \mathbb{R}$.
Dann gilt:

- $f + g$ ist in p differenzierbar mit $(f+g)'(p) = f'(p) + g'(p)$
- λf ist in p differenzierbar mit $(\lambda f)'(p) = \lambda f'(p)$
- $f \cdot g$ ist in p differenzierbar mit (Produktregel)
$$(f \cdot g)'(p) = f'(p)\, g(p) + f(p)\, g'(p)$$
- falls $g(p) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ ist in p differenzierbar mit
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(p) = \frac{g(p) f'(p) - f(p) g'(p)}{g(p)^2}$$
(Quotientenregel)

Verknüpfungen:

Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ Intervalle, $p \in I$; $f: I \to \mathbb{R}$ und $g: J \to \mathbb{R}$ mit $f(I) \subset J$.

Wenn f in p differenzierbar ist und g in $f(p)$, dann ist $g \circ f$ in p differenzierbar und es gilt:

$$(g \circ f)'(p) = g'(f(p))\, f'(p).$$

(Kettenregel)

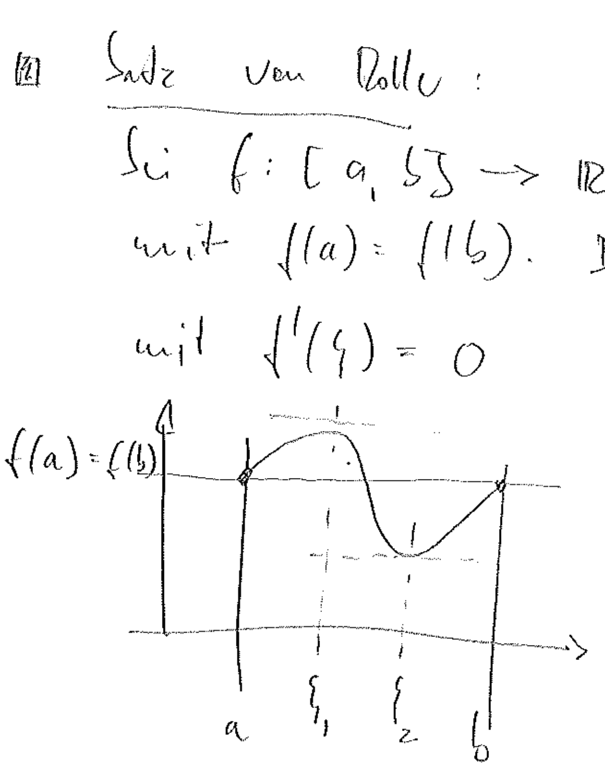
☒ Anwendungen

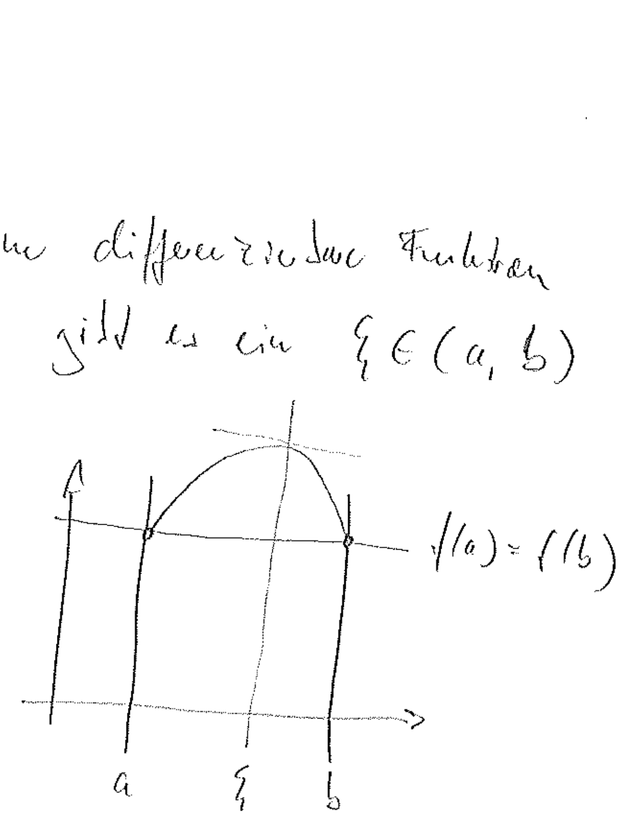
☒ Extrema differenzierbarer Funktionen:

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die in $p \in I$ ein lokales Extremum hat und in diesem Punkt differenzierbar ist. Dann gilt $f'(p) = 0$.

☒ Satz von Rolle:

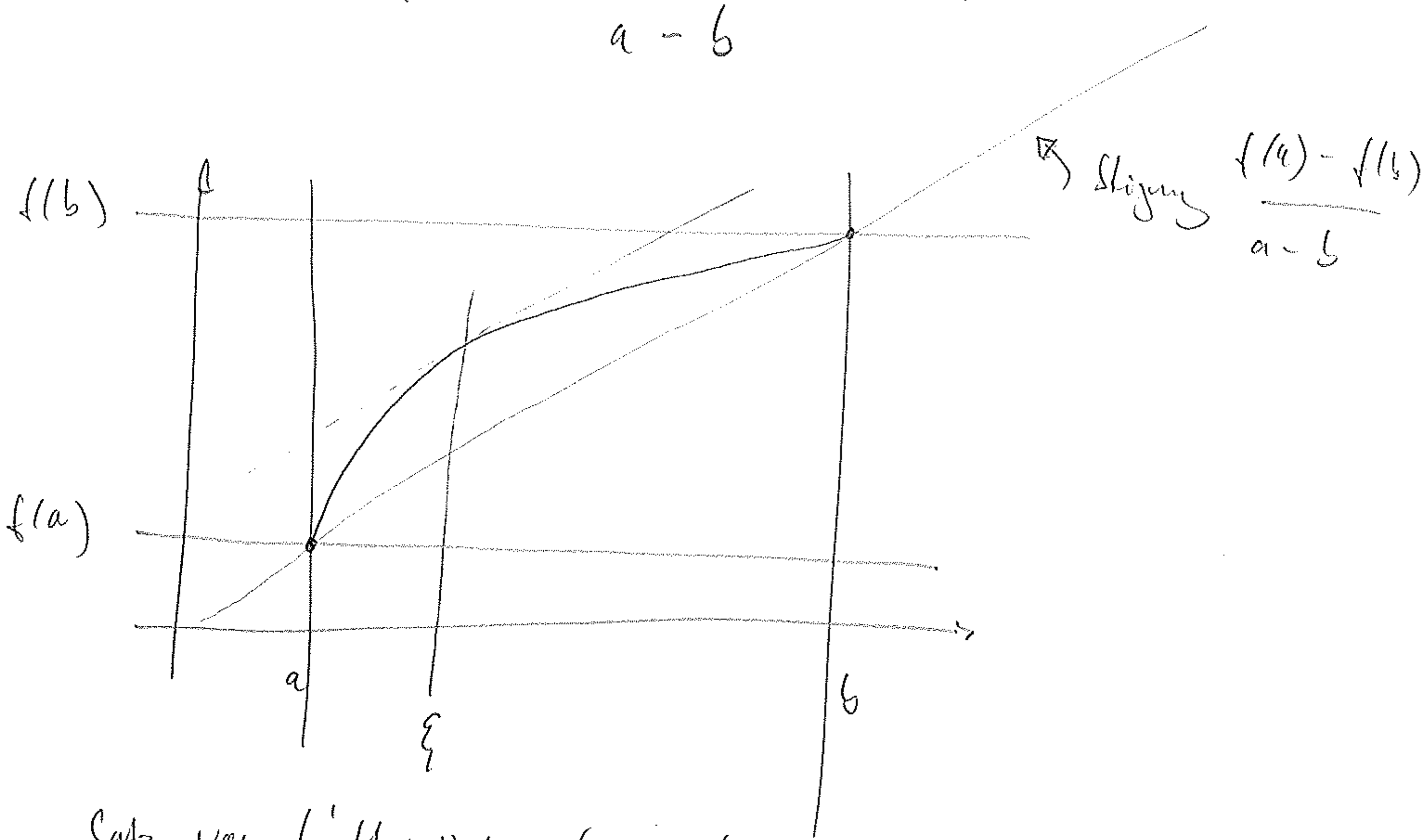
Sei $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $f(a) = f(b)$. Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$





<u>Mittelwertsatz</u>: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Dann gibt es ein $\xi \in (a,b)$ mit der Eigenschaft

$$f'(\xi) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b} .$$



<u>Satz von L'Hospital</u>: Seien $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen und $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$. Wenn $f(p) = g(p) = 0$ für ein $p \in (a,b)$ ist <u>und</u> wenn der Grenzwert $\lim\limits_{x \to p} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, <u>dann</u> existiert auch der Grenzwert

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)}$$

und es gilt

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to p} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

Das geht auch für (a, ∞) und $p \to \infty$, wenn alle Grenzwerte existieren.

Taylorentwicklung

Satz von Taylor: f sei eine n-mal stetig differenzierbare reelle Funktion auf $[a,b]$ und $f^{(n+1)}$ existiere auf (a,b). Für $p, x \in [a,b]$ mit $x \neq p$ existiert eine Zwischenstelle ξ zwischen p und x mit

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(p)}{k!}(x-p)^k}_{} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-p)^{n+1}}_{=R_n(x)}$$

$=T_n(x)$ nennt man das n-te Taylorpolynom von f an p.

$R_n(x)$ heißt Lagrange'sches Restglied

Taylorreihe: Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall mit den Randpunkten x und p.
Für $f \in C^\infty(I)$ (i.e. unendlich oft stetig differenzierbare Funktion auf I) heißt dann die (konvergente oder divergente) Reihe

$$T_\infty(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(p)}{k!}(x-p)^k$$

die Taylorreihe (oder Taylorentwicklung) von f an p.