FOLGEN und GRENZWERTE

FOLGE: Unter einer Folge reeller Zahlen versteht man eine Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto a_n$. Jedem $n \in \mathbb{N}$ ist also ein $a_n \in \mathbb{R}$ zugeordnet. Man schreibt hierfür

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad (a_0, a_1, a_2, a_3, \dots) \text{ oder kurz } (a_n).$$

Beispiele

- $a_n = a$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist eine konstante Folge
- $a_n = 2n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist die Folge der geraden Zahlen.
- $a_n = \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist die Folge
  $$\left(1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \dots\right)$$
- $a_n = (-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist die Folge
  $$(-1, +1, -1, +1, \dots)$$

Grenzwert: Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge.
Dann heißt $a \in \mathbb{R}$ der Grenzwert von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft gibt, dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$.
Gegebenenfalls schreibt man $a = \lim_{n \to \infty} a_n$ und sagt: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen a.
Wenn ein Grenzwert existiert, heißt $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent, sonst divergent.

Bemerkungen: • Die Zahl N hängt von ε ab! Je kleiner ε, desto größer wird im Allgemeinen N sein müssen.

• Für $\varepsilon > 0$ versteht man unter der ε-Umgebung von $a \in \mathbb{R}$ die Menge aller Punkte in $\mathbb{R}$, die von a einen Abstand kleiner als ε haben. Die Konvergenzbedingung ist damit: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein N, so dass

$$a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \text{ für alle } n \geq N.$$

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert somit genau dann gegen a, wenn in jeder noch so kleinen ε-Umgebung von a fast alle Glieder der Folge liegen, d.h. alle bis auf endlich viele Ausnahmen.

• Eine Folge, die gegen 0 konvergiert, nennt man Nullfolge.

Cauchy-Folge: Eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt Cauchy-Folge, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $|a_n - a_m| < \varepsilon$ für alle $m, n \geq N$.

Bemerkungen:

– Es genügt hier nicht, dass die Differenz zweier aufeinander folgender Folgenglieder $|a_n - a_{n+1}|$ beliebig klein wird, sondern die Differenz $|a_n - a_m|$ muss kleiner als ε sein für alle voneinander unabhängigen $m, n \geq N$ (das von ε abhängt)

– Bei der Cauchy-Folge wird die Konvergenz definiert, ohne auf den Grenzwert selbst Bezug zu nehmen.

Cauchy-Konvergenzkriterium: Jede konvergente Folge reeller Zahlen ist eine Cauchy-Folge.

Beweis: Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere gegen a. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq N$. Dann gilt also

für alle $n, m \geq N$: $|a_n - a_m| = |(a_n - a) - (a_m - a)|$

$\underset{\uparrow}{\leq} |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Dreiecksungleichung

$\boxtimes$

Vollständigkeitsaxiom: In $\mathbb{R}$ konvergiert jede Cauchy-Folge. ($\mathbb{R}$ ist abgeschlossen!)

$\boxtimes$ Konvergenz und Beschränktheit

Beschränktheit: Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt beschränkt, wenn es eine reelle Konstante $M \geq 0$ gibt, so dass

$|a_n| < M$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

$\square$ Jede konvergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt.

Bemerkungen: – Jede nicht beschränkte Folge ist nicht konvergent.

– Eine beschränkte Folge ist also nicht notwendig konvergent; Bsp. $a_n = (-1)^n$ ist beschränkt, aber nicht konvergent!

Dennoch kann man über beschränkte Folgen einige Aussagen machen.

Teilfolge: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge.
Ist $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton wachsende Folge in $\mathbb{N}$, so nennt man $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Häufungspunkt: Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn es eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, die gegen a konvergiert.

Beispiel: $a_n = (-1)^n$ hat die Häufungspunkte (-1) und $(+1)$ die Teilfolgen $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$.

Bemerkung: Eine konvergente Folge hat genau einen Häufungspunkt, ihren Grenzwert nämlich.

Satz von Bolzano-Weierstraß: Jede beschränkte, reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt eine konvergente Teilfolge und hat also mindestens einen Häufungspunkt.

(Bemerkung: Beweis darüber, dass es ja irgend ein Intervall geben muss, in dem unendlich viele Folgeglieder liegen, und wenn man immer kleinere Intervalle mit dieser Eigenschaft sucht, findet man eine konvergente Teilfolge.)

<u>Monotone Folge</u>: Eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt

- <u>monoton wachsend</u>, falls $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$
- <u>streng monoton wachsend</u>, falls $a_{n+1} > a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$
- <u>monoton fallend</u>, falls $a_n \geq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$
- <u>streng monoton fallend</u>, falls $a_n > a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

<u>Monotoniesatz</u>: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge, die monoton wächst und nach oben beschränkt ist. Dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Bemerkung: Analog für eine monoton fallende, nach unten beschränkte Folge.

<u>Rechenregeln</u> für konvergente Folgen. Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$.

Dann gilt:
- Die Folge $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, gegen $a+b$.
- Die Folge $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, gegen $a \cdot b$.
- Falls $b \neq 0$ konvergiert $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\frac{a}{b}$.
- Falls $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann ist $a \leq b$.
- Für $\lambda \in \mathbb{R}$ konvergiert die Folge $(\lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gegen λa.

- <u>Einschließungskriterium</u>: Falls $a = b$ und falls $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine weitere reelle Folge ist und
$$a_n \leq c_n \leq b_n \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N} \text{ gilt, dann}$$
konvergiert auch $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, und zwar gegen a

<u>Asymptotische Gleichheit</u>: Zwei reelle Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißen <u>asymptotisch gleich</u>, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$. Symbolisch: $a_n \simeq b_n$ für $n \to \infty$.

REIHEN

Reihen als Folgen von Partialsummen.

<u>Partialsumme</u>: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Unter der m-ten <u>Partialsumme</u> der Folge (a_n) versteht man
$$s_m := \sum_{n=0}^{m} a_n = a_0 + a_1 + \dots + a_m.$$
Bemerkungen: - Die Folge $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen heißt <u>(unendliche) Reihe</u> mit den Gliedern a_n und wird als $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ bezeichnet.

- Alle Sätze über Folgen gelten auch für Reihen, die ja Folgen von Partialsummen $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$ sind!

- Konvergiert die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen, so wird der Grenzwert ebenfalls mit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ bezeichnet und heißt Summe oder Wert der Reihe. (Vorsicht! Die Folge der Partialsummen und ihr Grenzwert haben damit die gleiche Bezeichnung!)

Teleskopsumme: Jede Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen läßt sich als Reihe darstellen, denn es gilt

$$c_n = c_0 + \sum_{k=1}^{n} (c_k - c_{k-1}) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Beispiele: - Geometrische Reihe: Für $|x|<1$ gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}$$

Mittels vollständiger Induktion kann man zeigen, dass die m-te Partialsumme gegeben ist durch

$s_m = \sum_{k=0}^{m} x^k = \frac{1-x^{m+1}}{1-x}$. Grenzwertbildung liefert das obige Ergebnis

- harmonische Reihe: Divergiert!

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = \infty.$$

[4] Konvergenzkriterien für Reihen

Cauchy-Kriterium für Reihen: Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit der Eigenschaft, dass

$$\left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| = | a_m + a_{m+1} + \dots + a_n | < \varepsilon$$

für alle $n \geq m \geq N$.

Beweis: Folgt unmittelbar aus dem Cauchy-Kriterium für Folgen angewandt auf die Folge der Partialsummen. Es ist

$$| s_m - s_n | = \left| \sum_{k=m}^{n} a_n \right| = | a_m + \dots + a_n | < \varepsilon$$

gerade das Cauchy-Kriterium für die Partialsummen. □

□ Aus der Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ folgt, dass $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Beweis: Cauchy-Kriterium für $m=n$ liefert $|a_n| < \varepsilon$ für $n \geq N$. Daraus folgt die Behauptung.

Bemerkung: Die Aussage liefert ein starkes Divergenzkriterium: Ist $(a_n)_n$ keine Nullfolge, so divergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$!

☐ Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mit $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ konvergiert genau dann, wenn die Folge der Partialsummen (die Reihe) beschränkt ist.

<u>Beweis</u>: Folgt aus dem Satz über die Konvergenz monoton wachsender, nach oben beschränkter Folgen. Wegen $a_n \geq 0$ ist die Folge der Partialsummen

$s_m = \sum_{n=0}^{m} a_n$, $m \in \mathbb{N}$ monoton wachsend, und nach Voraussetzung beschränkt. Daher konvergiert die Folge der Partialsummen.

<u>(Leibniz-Kriterium für Konvergenz)</u>: Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine reelle, monoton fallende, nicht-negative Nullfolge ($\lim_{k\to\infty} a_k = 0$). Dann konvergiert die alternierende Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$.

Beispiele: – alternierende harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

– Leibniz-Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

<u>Absolute Konvergenz</u>: Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt <u>absolut konvergent</u>, wenn die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

<u>Majoranten-Kriterium</u>: Sei $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ eine konvergente Reihe mit nicht-negativen Gliedern, und sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $|a_n| \le b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut.

Das impliziert gleichzeitig ein Divergenzkriterium:

<u>Minoranten-Kriterium</u>: Sei $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ eine divergente Reihe mit lauter nicht-negativen Gliedern und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $a_n \ge c_n$ für alle n. Dann divergiert auch $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

<u>Quotientenkriterium</u>: Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $a_k \neq 0$ für fast alle $k \in \mathbb{N}$ (es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $a_k \neq 0$ für $k \ge n_0$).

Wenn $\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = q$ existiert, so gilt:

- Falls $q < 1$, konvergiert die Reihe.
- Falls $q > 1$, divergiert die Reihe.

Bemerkung: Für Konvergenz muss $q < 1$ <u>echt</u> kleiner als 1 sein!

<u>Wurzelkriterium</u>: Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine Reihe. Es sei

$$q = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}.$$ Dann gilt:

- Falls $q<1$, so konvergiert die Reihe absolut.
- Falls $q>1$, divergiert die Reihe.

($\limsup_{k\to\infty} a_k$ ist der größte Häufungspunkt der Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$.)

<u>Umordnungssatz</u>: Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine absolut konvergente Reihe. Dann konvergiert auch jede Umordnung dieser Reihe gegen denselben Grenzwert.

<u>Cauchy-Produkt</u>: Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ zwei absolut konvergente Reihen. Dann gilt

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \quad \text{mit } c_k = \sum_{n=0}^{k} a_n b_{k-n}$$

und die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ konvergiert absolut.

POTENZREIHEN: Sei $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $c_k \in \mathbb{C}$ eine Folge komplexer Zahlen und $z \in \mathbb{C}$. Eine Reihe der Form

$$P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

nennt man Potenzreihe.

Beispiel: Die Exponentialreihe $\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$.

Konvergenzradius: Die Zahl

$$R := \frac{1}{\limsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{|c_k|}}$$

heißt Konvergenzradius der Potenzreihe.

Konvergenz von Potenzreihen: Sei R der Konvergenzradius der Potenzreihe $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ mit $c_k \in \mathbb{C}$.

Dann gilt:
- $P(z)$ konvergiert absolut für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < R$
- $P(z)$ divergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > R$.

Beweis folgt aus dem Wurzelkriterium.