FERIENKURS ANALYSIS 1

Dozent BERTRAM KLEIN

email bklein@ph.tum.de

office 3211

Materialien www.ph.tum.de/studium/praktika/ferienkurse/2012w

Beachte: Dort auch Material von Ferienkursen aus vorangegangen Jahren (an dem ich mich auch stark orientiert habe) → zusätzliche Übungsmöglichkeiten!

Skript Prof. Kreiner

www.ma.tum/HM/MA9202_2012W/WebHome

Vorgehen: 10-12 Vorlesung (mit vielen Fragen!?)

13-17 Übung + Besprechung

GRUNDLAGEN

Aussagen, Logik, Beweise

Aussagen: Zentraler Gegenstand der Mathematik sind Aussagen, vor allem über mathematische Objekte, d.h. Sätze, deren Inhalt man sinnvoll als "wahr" oder "falsch" bezeichnen kann.

Beispiele:
1) $0 + 0 = 0$ (w)
2) Für jede natürliche Zahl n gilt $n + 0 = n$. (w.)
3) 4 ist eine Primzahl (f)
4) Es gibt eine reelle Zahl x mit $x \cdot 0 = 1$ (f)

Logische Verknüpfungen: Aussagen können auf verschiedene Arten verknüpft werden:

- Implikation: "Wenn A, dann B"; "Aus A folgt B": symbolisch: $A \Rightarrow B$
- Äquivalenz: "A genau dann, wenn B" symbolisch $A \Leftrightarrow B$
- Adjunktion: "A oder B", symbolisch $A \vee B$
- Konjunktion: "A und B", symbolisch $A \wedge B$
- Negation: "nicht A", symbolisch $\neg A$

Wahrheitstafel: zeigt, wann abhängig von der Wahrheit (w/f) von Aussagen A und B die entsprechenden Verknüpfungen wahr sind.

A	B	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$	$A \vee B$	$A \wedge B$
w	w	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f
f	w	(w)	f	w	f
f	f	(w)	(w)	f	f

Merke:

- "oder" ist immer einschließend, d.h. $A \vee B$ ist wahr auch wenn A und B beide wahr sind
- aus einer falschen Aussage kann man alles folgern, das ist aber normalerweise nicht hilfreich! (eingeklammerte Einträge).

Beweise: Mathematische Sätze sind häufig Implikationen, d.h. von der Form $A \Rightarrow B$: Falls die Voraussetzung A erfüllt ist, gilt die Folgerung B. Wenn $A \Rightarrow B$ wahr ist, dann nennt man

- A eine hinreichende Bedingung für B
- B eine notwendige Bedingung für A.

Das Zweite folgt aus der Negation:

$$\neg B \Rightarrow \neg A$$

d.h. wenn B nicht vorliegt, kann auch A nicht wahr sein!

<u>Beweistechniken:</u>

- direkter Beweis von $A \Rightarrow B$: Finde Kette von wahren Implikationen $A \Rightarrow A' \Rightarrow A'' \Rightarrow \ldots \Rightarrow B'' \Rightarrow B$
- Kontraposition (Umkehrschluß): $\neg B \Rightarrow \neg A$ wird bewiesen (durch eine Kette von wahren Implikationen) $\Rightarrow$ beweist dann $A \Rightarrow B$
- indirekter Beweis / Beweis durch Widerspruch: $A \wedge (\neg B)$ Nimm an, dass A gilt, aber B falsch ist. Dann folgere (... durch eine Kette wahrer Implikationen), dass gleichzeitig C und $\neg C$ gelten $\Rightarrow$ falsche Aussage. Da damit aus einer wahren eine falsche Aussage folgen würde, muss gelten $A \wedge (\neg B)$ f. $\Rightarrow$ $A \Rightarrow B$ wie gewünscht folgt.
- vollständige Induktion: Wenn man zu jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ eine Aussage $A(n)$ gegeben hat, die man beweisen möchte, dann kann oft wie folgt vorgehen:

  1.) Induktionsanfang: Beweise die Aussage $A(n_0)$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}$. (Schritt <u>nicht</u> entbehrlich!)

  2) Induktionsschritt: Beweise, dass aus der Gültigkeit von $A(n)$ für $n \geq n_0$ auch die Gültigkeit von $A(n+1)$ folgt.

Damit hat man bewiesen, dass $A(n)$ für jedes $n \geq n_0$ gilt.

Beispiel: Zeige, dass $\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt!

Induktionsanfang $n_0 = 1$: $A(n_0) = A(1)$: $1 = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$ (w)

Induktionsschritt: Induktionsvoraussetzung $A(n)$ gilt:

$$1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\begin{aligned} A(n+1): \; & 1+2+\dots+n+(n+1) = \\ & [1+2+\dots+n]+(n+1) = \\ & = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \left(1+\frac{n}{2}\right)(n+1) \\ & = \frac{(2+n)(n+1)}{2} \quad \text{(w)} \end{aligned}$$

$\square$

Zum Äquivalenzbeweis: $A \Leftrightarrow B$:

zu zeigen sind $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$

(Schreibweise: "$\Rightarrow$" und "$\Leftarrow$")

("Hin-" und "Rück-" Richtung des Beweises)

MENGEN und KÖRPER

<u>Menge:</u> Zusammenfassung von unterscheidbaren Objekten.

Ist M eine Menge, schreiben wir $x \in M$, wenn x ein Element der Menge M ist, und $x \notin M$, wenn x nicht Element der Menge M ist.

Eine Menge, die kein Elemente enthält, heißt <u>leere Menge</u> $\emptyset$.

Die Menge aller Elemente aus M, für die eine Aussage A gilt, schreibt man als

$$\{x \in M : \text{Aussage } A \text{ ist für } x \text{ wahr}\}.$$

Für zwei Mengen M und N sagt man:

- M ist eine <u>Teilmenge</u> von N, wenn alle Elemente von M auch in N enthalten sind:
  $M \subset N$
  enthält N ein Element $y \notin M$, so ist M eine <u>echte Teilmenge</u>
- M und N sind <u>gleich</u>, $M = N$, wenn
  $M \subset N$ und $N \supset M$

Man definiert:

- Vereinigung $M \cup N := \{x : x \in M \vee x \in N\}$
- Durchschnitt $M \cap N := \{x : x \in M \wedge x \in N\}$
- Differenz $M \setminus N := \{x : x \in M \wedge x \notin N\}$

Ist $M \cap N = \emptyset$, so sind M und N <u>disjunkt</u>.

<u>Kartesisches Produkt</u> $M \times N$ zweier Mengen M, N nennt man die Menge aller geordneten Paare (x, y) mit $x \in M, y \in N$

$$M \times N := \{(x, y) : x \in M \ , \ y \in N\}$$

Eine <u>geordnete Menge</u> ist eine Menge M, auf der eine <u>Ordnung</u> gegeben ist, d.h. eine Relation $<$ mit den folgenden Eigenschaften:

- Für $x, y \in M$ gilt genau <u>eine</u> der Aussagen
  $x < y$, $x = y$, $y < x$.
- Sind $x, y, z \in M$, so gilt:
  $x < y$ und $y < z \Rightarrow x < z$.

<u>Obere und Untere Schranken, Supremum, Infimum.</u>

Sei A eine Teilmenge der geordneten Menge M.

- Dann heißt A <u>nach oben beschränkt</u>, falls es ein $s \in M$ mit $x \leq s$ für alle $x \in A$ gilt.
- $s \in M$ (nicht notwendig in A!) heißt dann <u>obere Schranke</u> von A.
- $s \in M$ heißt <u>Supremum</u> (kleinste obere Schranke) von A, wenn s eine obere Schranke von A ist <u>und</u> jedes $z \in M$ mit $z < s$ keine obere Schranke von A ist.
  symbolisch: $s = \sup A$

Analog definiert man untere Schranke und größte untere Schranke (das Infimum) von A ($\inf A$).

<u>Supremums-Eigenschaft</u>: Eine geordnete Menge M hat die Supremums-Eigenschaft, wenn gilt:
Ist $A \subset M$ nichtleer und nach oben beschränkt, so existiert $\sup A$ in M.

Dann ist diese Menge vollständig.

Beispiel: Sei $M = \mathbb{Q}$ (Menge der rationalen Zahlen) und
$A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\}$. Dann ist A beschränkt, aber besitzt kein Supremum (in M), denn $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ und es gibt kein kleinstes $s \in \mathbb{Q}$ mit $s > \sqrt{2}$

In $\mathbb{R}$ existiert das Supremum allerdings: daher ist $\mathbb{R}$ vollständig.

Körper

Ein Körper $(K, +, \cdot)$ ist eine Menge K, auf der die Verknüpfungen $+ : K \times K \to K$ und $\cdot : K \times K \to K$ definiert sind, die folgende Axiome erfüllen:

- Addition:

  A1: $x \in K$ und $y \in K \Rightarrow x + y \in K$ (Abgeschlossenheit)

  A2: $x + y = y + x \quad \forall x, y \in K$ (Kommutativität)

  A3: $(x+y)+z = x + (y+z) \quad \forall x, y, z \in K$ (Assoziativität)

  A4: Es existiert $0 \in K$ mit $0 + x = x \quad \forall x \in K$
  (neutrales Element der Addition)

  A5: Für jedes $x \in K$ existiert ein $-x \in K$
  mit $x + (-x) = 0$
  (inverses Element der Addition)

- Multiplikation:

  M1: $x \in K$ und $y \in K \Rightarrow x \cdot y \in K$ (Abgeschlossenheit)

  M2: $x \cdot y = y \cdot x \quad \forall x, y \in K$ (Kommutativität)

  M3: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \quad \forall x, y, z \in K$ (Assoziativität)

  M4: Es existiert ein $1 \in K$ mit $1 \neq 0$ und
  $1 \cdot x = x \quad \forall x \in K$ (neutrales Element der Multiplikation)

  M5: Für jedes $x \in K$ mit $x \neq 0$ existiert ein
  $x^{-1} \in K$ mit $x \cdot x^{-1} = 1$
  (inverses Element der Multiplikation)

- Distributivgesetz:

  $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ für alle $x, y, z \in K$.

Ein *geordneter* (angeordneter) *Körper* ist ein Körper, der zugleich auch eine geordnete Menge ist mit

(a) $x+y < x+z$ für $x, y, z \in K$ und $y < z$

(b) $x \cdot y > 0$ für $x, y \in K$ mit $x > 0$, $y > 0$.

alternative Formulierung: ein Körper K ist geordnet, wenn es eine Teilmenge K_+ ("positive Zahlen") gibt mit den Eigenschaften:

(a) Für jedes $x \in K$ gilt genau eine der drei Aussagen:

$$x \in K_+ \;, \quad x = 0 \;, \quad (-x) \in K_+ .$$

(b) Für alle $x, y \in K_+$ gilt $x+y \in K_+$ und $x \cdot y \in K_+$

Beispiel: Der kleinste mögliche Körper hat nur die zwei Elemente $\{0,1\}$. Er ist also nicht geordnet, da für die Addition $\oplus_2$ ($\cdot \bmod 2$) die 1 ihr eigenes inverses Element ist ($1 \oplus_2 1 = 2 \bmod 2 = 0$), und damit $1 \in K_+$ und $(-1) \in K_+$ ↯ zur Anordnung.

$\mathbb{Q}$ ist ein angeordneter Körper.

$\mathbb{R}$ ist ein vollständiger, angeordneter Körper.

Metrische Räume

Eine Menge M ist ein metrischer Raum, wenn je zwei Elementen $x_1 \in M$, $x_2 \in M$ eine reelle Zahl $d(x_1, x_2)$ zugeordnet ist mit $d: M \times M \to [0, \infty)$
und

a) $d(x_1, x_2) > 0$ für $x_1 \neq x_2$, $d(x, x) = 0$

b) $d(x_1, x_2) = d(x_2, x_1)$

c) $d(x_1, x_3) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) \;\forall x_2 \in M$.

Die Funktion d mit diesen Eigenschaften heißt Distanzfunktion oder Metrik.

Beispiele: $d(x, y) = |x - y|$ auf $\mathbb{R}$

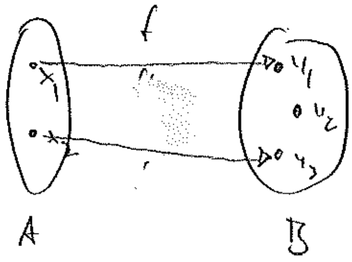
Funktionen + Abbildungen

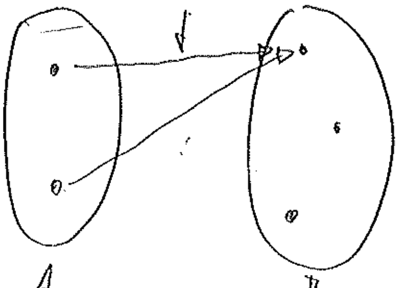
Definition: gegeben seien zwei beliebige Mengen A, B. Ist jedem $x \in A$ auf irgendeine Weise ein Element $y \in B$ zugeordnet, welches mit $f(x)$ bezeichnet wird, so ist f eine Funktion (Abbildung) von A nach B.

$$f : A \to B, \quad x \mapsto f(x) = y$$

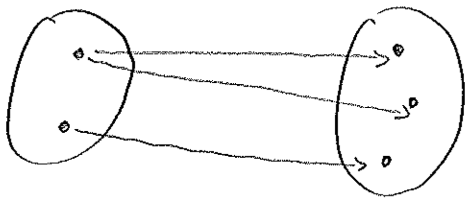
$y = f(x)$ ist das Bild von x unter f, x das Urbild von y unter f. Die Menge A ist der Definitionsbereich von f, die Menge der $f(x)$ ist der Werte- oder Bildbereich von f.

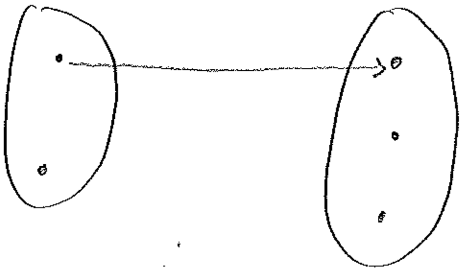
Abbildungen:





keine Abbildungen:





Für jede Menge A kann man definieren die Identität: $id_A : A \to A, \quad x \mapsto x$ auf der Menge A.

Mit $M \subset A$ (Teilmenge von A) ist das
<u>Bild von M unter f</u> gegeben durch

$$f(M) := \{ f(x) : x \in M \} \subset B$$

Für $f(A) = B$ bildet f A auf B ab:

$f : A \to B$ ist <u>surjektiv</u> | äquivalent: $\forall y \in B : \exists x \in A$ mit $f(x) = y$

Mit $N \subset B$ (Teilmenge von B) ist das
Urbild von N unter f

$$f^{-}(N) := \{ x \in A : f(x) \in N \} \subset A.$$

Enthält für jedes $y \in B$ das Urbild $f^{-}(y)$ <u>höchstens</u>
<u>ein</u> Element $x \in A$, so sagt man
$f : A \to B$ ist <u>injektiv</u>.

Äquivalent: f ist injektiv, wenn für alle $x_1 \in A$, $x_2 \in A$
mit $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

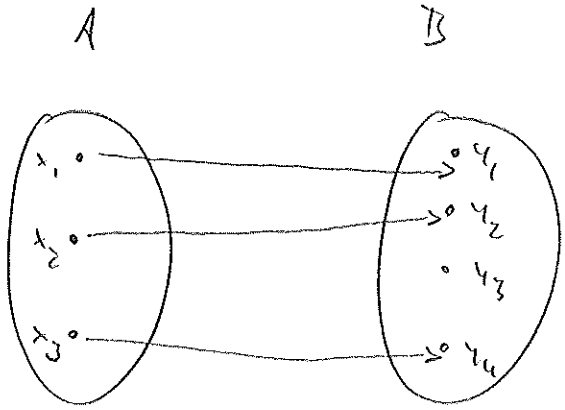
äquivalent dazu:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 .$$

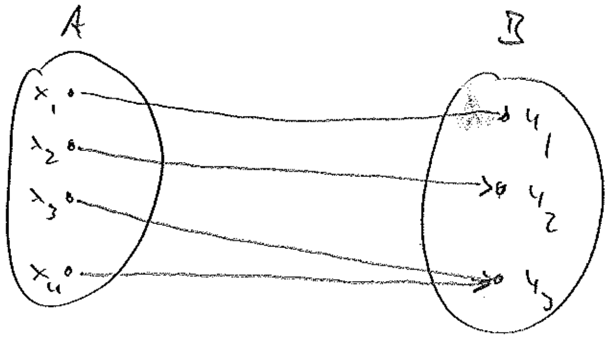
Eine Abbildung, die injektiv und surjektiv ist, nennt
man <u>bijektiv</u>.

Für eine bijektive Abbildung $f : A \to B$ nennt man
diejenige Abbildung von B auf A, die jedem $y \in B$
das eindeutig bestimmte $x \in A$ mit $f(x) = y$ zuordnet,
die <u>Umkehrabbildung</u> f^{-1}.

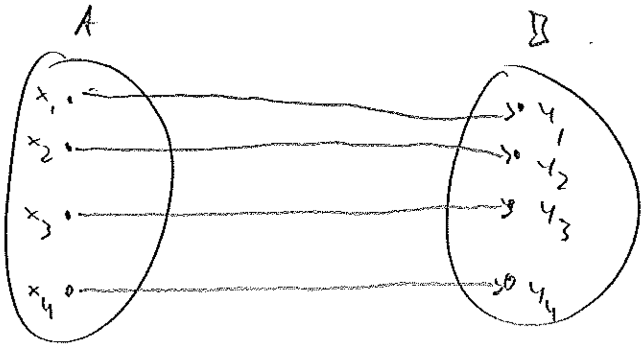
Injektivität:



Surjektivität:



Bijektivität



Zusammenfassend: Wenn für alle $y \in \mathbb{B}$ gilt

- $f^{-1}(y)$ enthält __höchstens__ ein $x \in A$, dann ist f __injektiv__.
- $f^{-1}(y)$ enthält __mindestens__ ein $x \in A$, dann ist f __surjektiv__
- $f^{-1}(y)$ enthält __genau__ ein $x \in A$, dann ist f __injektiv__.

$\Rightarrow$ Illustration.

Für zwei Abbildungen $f: A \to B$, $g: \mathbb{B} \to C$ bezeichnet man die Abbildung

$$g \circ f : A \to C, \quad x \mapsto g(f(x)) = (g \circ f)(x)$$

als __Komposition__ von g __nach__ f. Dabei kommt es auf die Reihenfolge an! ($f \circ g \neq g \circ f$)

Für eine bijektive Abbildung $f: A \to B$ und ihre Umkehrabbildung $f^{-1}: \mathbb{B} \to A$ gilt:

$$f^{-1} \circ f = id_A$$

(Frage: Was ist $f \circ f^{-1}$?
$\Rightarrow f \circ f^{-1} = id_B$!)

__Äquivalenz:__ Gibt es eine bijektive Abbildung zwischen zwei Mengen A und B, so nennt man A und B __äquivalent__.

__Abzählbarkeit:__ Eine Menge A heisst abzählbar, wenn sie aus endlich vielen Elementen besteht oder zu $\mathbb{N}$ äquivalent ist.

(d.h. man muss eine bijektive Abbildung finden, die jedem Element von A eine natürliche Zahl zuweist).